湖南省张家界市2023-2024学年高三第二次模拟考试数学试卷

注意事项：

1． 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。

2．选择题必须使用2B铅笔填涂；非选择题必须使用0．5毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。

3．请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。

4．保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

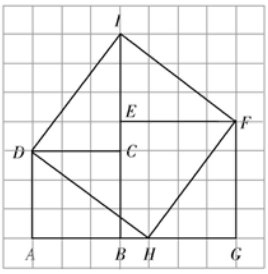
1．已知等差数列$\{a_n\}$的前13项和为52，则$(-2)^{a_6+a_8}=$（　　）

A．256　　B．-256　　C．32　　D．-32

2．已知复数$z=\dfrac{(2+ai)i}{1-i}$是纯虚数，其中a是实数，则z等于（　）

A．$2i$　　B．$-2i$　　C．i　　D．$-i$

3．刘徽是我国魏晋时期伟大的数学家，他在《九章算术》中对勾股定理的证明如图所示."勾自乘为朱方，股自乘为青方，令出入相补，各从其类，因就其余不移动也.合成弦方之幂，开方除之，即弦也".已知图中网格纸上小正方形的边长为1，其中"正方形$ABCD$为朱方，正方形$BEFG$为青方"，则在五边形$AGFID$内随机取一个点，此点取自朱方的概率为（　　）



A．$\dfrac{16}{37}$　　B．$\dfrac{9}{49}$　　C．$\dfrac{9}{37}$　　D．$\dfrac{3}{11}$

4．已知F为抛物线$C:y^2=8x$的焦点，点$A(1,m)$在C上，若直线AF与C的另一个交点为B，则$|AB|=$(　　)

A．12　　B．10　　C．9　　D．8

5．设复数z满足$\dfrac{i^3}{z}=1+i$，则$z=$（　　）

A．$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$　　B．$-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$　　C．$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$　　D．$-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$

6．已知函数$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$g(x)=xe^{-x}$.若存在$x_1\in(0,+\infty)$，$x_2\in R$使得$f(x_1)=g(x_2)=k(k<0)$成立，则$\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2e^k$的最大值为（　　）

A．e^2　　B．e

C. $\dfrac{4}{e^2}$　　　　D. $\dfrac{1}{e^2}$

7．设等差数列$\left\{a_n\right\}$的前 **n** 项和为S_n，且$S_8=0$，$a_3=-3$，则$S_9=$(　　)

A．9　　　　B．12　　　　C．-15　　　　D．-18

8．已知命题p：任意$x\ge 4$，都有$\log_2 x\ge 2$；命题q：$a>b$，则有$a^2>b^2$．则下列命题为真命题的是（　　）

A．$p\wedge q$　　　　B．$p\wedge(\neg q)$　　　　C．$(\neg p)\wedge(\neg q)$　　　　D．$(\neg p)\vee q$

9．把函数$f(x)=\sin^2 x$的图象向右平移$\dfrac{\pi}{12}$个单位，得到函数$g(x)$的图象．给出下列四个命题

①$g(x)$的值域为$(0,1]$

②$g(x)$的一个对称轴是$x=\dfrac{\pi}{12}$

③$g(x)$的一个对称中心是$\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)$

④$g(x)$存在两条互相垂直的切线

其中正确的命题个数是（　　）

A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

10．抛物线$y^2=4x$的焦点为 **F**，点$P(x,y)$为该抛物线上的动点，若点$A(-1,0)$，则$\dfrac{PF}{PA}$的最小值为（　　）

A．$\dfrac{1}{2}$　　　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　　D．$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

11．已知AM，BN分别为圆$O_1:(x+1)^2+y^2=1$与$O_2:(x-2)^2+y^2=4$的直径，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}$的取值范围为（　　）

A．$[0,8]$　　　　B．$[0,9]$　　　　C．$[1,8]$　　　　D．$[1,9]$

12．已知集合 **A={x|x<1}**，**B={x|**$3^x<1$}，则

A．$A\cap B=\{x\mid x<0\}$　　　　B．$A\cup B=R$

C．$A\cup B=\{x\mid x>1\}$　　　　D．$A\cap B=\varnothing$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知抛物线$C:y^2=4x$的焦点为F，过点F且斜率为 **1** 的直线与抛物线C交于点A,B，以线段AB为直径的圆E上存在点P,Q，使得以PQ为直径的圆过点$D(-2,t)$，则实数t的取值范围为________．

14．已知函数$f\left(x\right)=a\ln\left(2x\right)-e^{\frac{2x}{e}}$有且只有一个零点，则实数$a$的取值范围为__________．

15．在平面五边形$ABCDE$中，$\angle A=60^\circ$，$AB=AE=6\sqrt{3}$，$BC\perp CD$，且$BC=DE=6$.将五边形$ABCDE$

沿对角线 BE 折起，使平面 ABE 与平面 $BCDE$ 所成的二面角为$120°$，则沿对角线 BE 折起后所得几何体的外接球的表面积是______.

16．在ΔABC中，已知M是BC的中点，且$AM=1$，点P满足$PA=2PM$，则$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$的取值范围是

_______.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）设函数 $f(x)=x^2-4x\sin x-4\cos x$.

（1）讨论函数 $f(x)$在$[-\pi，\pi]$上的单调性；

（2）证明：函数 $f(x)$在 **R** 上有且仅有两个零点.

18．（12 分）已知函数$f\left(x\right)$和$g\left(x\right)$的图象关于原点对称，且$f\left(x\right)=x^2+2x$.

（1）解关于x的不等式$g\left(x\right)\geq f\left(x\right)-\left|x-1\right|$；

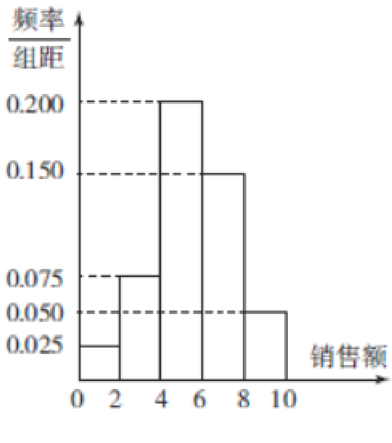
（2）如果对$\forall x\in R$，不等式$g\left(x\right)+c\leq f\left(x\right)-\left|x-1\right|$恒成立，求实数$c$的取值范围.

19．（12 分）已知圆 M：$\left(x+2\sqrt{3}\right)^2+y^2=64$及定点$N\left(2\sqrt{3},0\right)$，点 A 是圆 M 上的动点，点 B 在NA上，点 G 在MA上，且满足$\overrightarrow{NA}=2\overrightarrow{NB}$，$\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{NA}=0$，点 G 的轨迹为曲线 C.

（1）求曲线 C 的方程；

（2）设斜率为 k 的动直线 l 与曲线 C 有且只有一个公共点，与直线$y=\frac{1}{2}x$和$y=-\frac{1}{2}x$分别交于 P、Q 两点.当$\left|k\right|>\frac{1}{2}$时，求$\Delta OPQ$（$O$ 为坐标原点）面积的取值范围.

20．（12 分）某网络商城在2019年1月1日开展“庆元旦”活动，当天各店铺销售额破十亿，为了提高各店铺销售的积极性，采用摇号抽奖的方式，抽取了40家店铺进行红包奖励.如图是抽取的40家店铺元旦当天的销售额（单位：千元）的频率分布直方图.



（1）求抽取的这40家店铺，元旦当天销售额的平均值；

（2）估计抽取的40家店铺中元旦当天销售额不低于4000元的有多少家；

（3）为了了解抽取的各店铺的销售方案，销售额在$[0,2)$和$[8,10]$的店铺中共抽取两家店铺进行销售研究，求抽取的店铺销售额在$[0,2)$中的个数ζ的分布列和数学期望.

21.（12 分）某机构组织的家庭教育活动上有一个游戏，每次由一个小孩与其一位家长参与，测试家长对小孩饮食习惯的了解程度．在每一轮游戏中，主持人给出 *A*，*B*，*C*，*D* 四种食物，要求小孩根据自己的喜爱程度对其排序，然后由家长猜测小孩的排序结果．设小孩对四种食物排除的序号依次为 $x_Ax_Bx_Cx_D$，家长猜测的序号依次为 $y_Ay_By_Cy_D$，其中 $x_Ax_Bx_Cx_D$ 和 $y_Ay_By_Cy_D$ 都是 1，2，3，4 四个数字的一种排列．定义随机变量 $X=(x_A-y_A)^2+(x_B-y_B)^2+(x_C-y_C)^2+(x_D-y_D)^2$，用 X 来衡量家长对小孩饮食习惯的了解程度．

（1）若参与游戏的家长对小孩的饮食习惯完全不了解．

（ⅰ）求他们在一轮游戏中，对四种食物排出的序号完全不同的概率；

（ⅱ）求 X 的分布列（简要说明方法，不用写出详细计算过程）；

（2）若有一组小孩和家长进行来三轮游戏，三轮的结果都满足 $X<4$，请判断这位家长对小孩饮食习惯是否了解，说明理由．

22.（10 分）已知 $f(x)=|x+3|-|x-2|$

（1）求函数 $f(x)$的最大值 m；

（2）正数 a，b，c 满足 $a+2b+3c=m$，求证：$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\geq\frac{36}{5}$.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

利用等差数列的求和公式及等差数列的性质可以求得结果.

【详解】

由 $S_{13}=13a_7=52$，$a_7=4$，得 $(-2)^{a_6+a_8}=(-2)^8=256$.选 A.

【点睛】

本题主要考查等差数列的求和公式及等差数列的性质，等差数列的等和性应用能快速求得结果.

2、**A**

【解析】

对复数z进行化简，由于z为纯虚数，则化简后的复数形式中，实部为**0**，得到a的值，从而得到复数z．

【详解】

$$z=\frac{(2+ai)i}{1-i}=\frac{-a+2i}{1+i}=\frac{(-a+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2-a}{2}+\frac{a+2}{2}i$$

因为z为纯虚数，所以$\frac{2-a}{2}=0$，得$a=2$

所以$z=2i$．

故选**A**项

【点睛】

本题考查复数的四则运算，纯虚数的概念，属于简单题.

3、**C**

【解析】

首先明确这是一个几何概型面积类型，然后求得总事件的面积和所研究事件的面积，代入概率公式求解.

【详解】

因为正方形$ABCD$为朱方，其面积为**9**，

五边形$AGFID$的面积为$S_{ABCD}+S_{BGFE}+S_{\Delta DCI}+S_{\Delta IEF}=37$，

所以此点取自朱方的概率为$\frac{9}{37}$.

故选：**C**

【点睛】

本题主要考查了几何概型的概率求法，还考查了数形结合的思想和运算求解的能力，属于基础题.

4、**C**

【解析】

求得A点坐标，由此求得直线AF的方程，联立直线AF的方程和抛物线的方程，求得B点坐标，进而求得$|AB|$

【详解】

抛物线焦点为$F(2,0)$，令$x=1$，$y^2=8$，解得$y=\pm 2\sqrt{2}$，不妨设$A(1,2\sqrt{2})$，则直线AF的方程为

$y=\frac{2\sqrt{2}}{1-2}(x-2)=-2\sqrt{2}(x-2)$，由$\begin{cases}y=-2\sqrt{2}(x-2)\\ y^2=8x\end{cases}$，解得$A(1,2\sqrt{2}),B(4,-4\sqrt{2})$，所以

$|AB|=\sqrt{(4-1)^2+(-4\sqrt{2}-2\sqrt{2})^2}=9$.

故选：**C**

【点睛】

本小题主要考查抛物线的弦长的求法，属于基础题.

5、**D**

【解析】

根据复数运算，即可容易求得结果.

【详解】

$$z=\frac{i^3}{1+i}=\frac{-i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-1-i}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i.$$

故选：**D.**

【点睛】

本题考查复数的四则运算，属基础题.

6、**C**

【解析】

由题意可知，$g\left(x\right)=f\left(e^x\right)$，由$f\left(x_1\right)=g\left(x_2\right)=k\left(k<0\right)$可得出$0<x_1<1$，$x_2<0$，利用导数可得出函数$y=f\left(x\right)$在区间$\left(0,1\right)$上单调递增，函数$y=g\left(x\right)$在区间$\left(-\infty,0\right)$上单调递增，进而可得出$x_1=e^{x_2}$，由此可得出$\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_2}{e^{x_2}}=g\left(x_2\right)=k$，可得出$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2e^k=k^2e^k$，构造函数$h\left(k\right)=k^2e^k$，利用导数求出函数$y=h\left(k\right)$在$k\in\left(-\infty,0\right)$上的最大值即可得解.

【详解】

$\because f\left(x\right)=\frac{\ln x}{x}$，$g\left(x\right)=\frac{x}{e^x}=\frac{\ln e^x}{e^x}=f\left(e^x\right)$，

由于$f\left(x_1\right)=\frac{\ln x_1}{x_1}=k<0$，则$\ln x_1<0\Rightarrow 0<x_1<1$，同理可知，$x_2<0$，

函数$y=f\left(x\right)$的定义域为$\left(0,+\infty\right)$，$f'\left(x\right)=\frac{1-\ln x}{x^2}>0$对$\forall x\in\left(0,1\right)$恒成立，所以，函数$y=f\left(x\right)$在区间$\left(0,1\right)$上单调递增，同理可知，函数$y=g\left(x\right)$在区间$\left(-\infty,0\right)$上单调递增，

$\therefore f\left(x_1\right)=g\left(x_2\right)=f\left(e^{x_2}\right)$，则$x_1=e^{x_2}$，$\therefore\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_2}{e^{x_2}}=g\left(x_2\right)=k$，则$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2e^k=k^2e^k$，

构造函数$h\left(k\right)=k^2e^k$，其中$\mathrm{k}<0$，则$h'\left(k\right)=\left(k^2+2k\right)e^k=k\left(k+2\right)e^k$.

当$k<-2$时，$h'(k)>0$，此时函数$y=h(k)$单调递增；当$-2<k<0$时，$h'(k)<0$，此时函数$y=h(k)$单调递减.

所以，$h(k)_{\max}=h(-2)=\frac{4}{e^2}$.

故选：C.

【点睛】

本题考查代数式最值的计算，涉及指对同构思想的应用，考查化归与转化思想的应用，有一定的难度.

7、A

【解析】

由$S_8=0$，$a_3=-3$可得a_1,d以及a_9，而$S_9=S_8+a_9$，代入即可得到答案.

【详解】

设公差为d，则$\begin{cases}a_1+2d=-3,\\8a_1+\frac{8\times7}{2}d=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=-7,\\d=2,\end{cases}$

$a_9=a_1+8d=9$，所以$S_9=S_8+a_9=9$.

故选：A.

【点睛】

本题考查等差数列基本量的计算，考查学生运算求解能力，是一道基础题.

8、B

【解析】

先分别判断命题p,q真假，再由复合命题的真假性，即可得出结论.

【详解】

p为真命题；命题q是假命题，比如当$0>a>b$，

或a=1，$b=-2$时，则$a^2>b^2$ 不成立.

则$p\wedge q$，$(\neg p)\wedge(\neg q)$，$(\neg p)\vee q$均为假.

故选:B

【点睛】

本题考查复合命题的真假性，判断简单命题的真假是解题的关键，属于基础题.

9、C

【解析】

由图象变换的原则可得 $g(x)=-\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$,由 $\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\in[-1,1]$ 可求得值域; 利用代入检验法判断②③;

对 $g\left(x\right)$ 求导,并得到导函数的值域,即可判断④.

【详解】

由题, $f(x)=\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$,

则向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位可得, $g(x)=\frac{1-\cos 2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)}{2}=-\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$

Q $\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\in[-1,1]$,$\therefore$ $g(x)$ 的值域为 $[0,1]$,①错误;

当 $x=\frac{\pi}{12}$ 时, $2x-\frac{\pi}{6}=0$,所以 $x=\frac{\pi}{12}$ 是函数 $g(x)$ 的一条对称轴,②正确;

当 $x=\frac{\pi}{3}$ 时, $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,所以 $g(x)$ 的一个对称中心是 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$,③正确;

$g'(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\in[-1,1]$,则 $\exists x_1,\, x_2\in R,\, g'(x_1)=-1,\, g'(x_2)=1$,使得 $g'(x_1)\cdot g'(x_2)=-1$,则 $g(x)$ 在 $x=x_1$ 和

$x=x_2$ 处的切线互相垂直,④正确.

即②③④正确,共 **3** 个.

故选:**C**

【点睛】

本题考查三角函数的图像变换,考查代入检验法判断余弦型函数的对称轴和对称中心,考查导函数的几何意义的应用.

10、**B**

【解析】

通过抛物线的定义，转化 $PF=PN$ ，要使 $\frac{|PF|}{|PA|}$ 有最小值，只需 $\angle APN$ 最大即可，作出切线方程即可求出比值的最小值.

【详解】

解：由题意可知，抛物线 $y^2=4x$ 的准线方程为 $x=-1$ ， $A(-1,0)$ ，

过 P 作 PN 垂直直线 $x=-1$ 于 N ，

由抛物线的定义可知$PF=PN$，连结PA，当PA是抛物线的切线时，$\frac{|PF|}{|PA|}$有最小值，则$\angle APN$最大，即$\angle PAF$

最大，就是直线 PA 的斜率最大，

设在 PA 的方程为：$y=k(x+1)$，所以 $\begin{cases} y=k(x+1) \\ y^2=4x \end{cases}$，

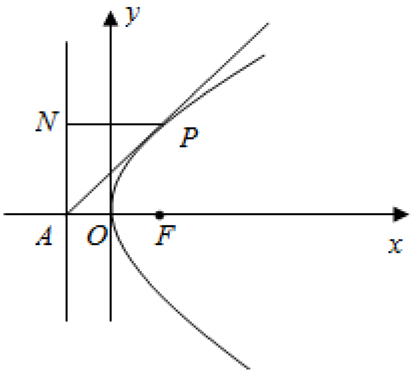
解得：$k^2x^2+(2k^2-4)x+k^2=0$，

所以 $\Delta=(2k^2-4)^2-4k^4=0$，解得 $k=\pm1$，

所以 $\angle NPA=45°$，

$\frac{|PF|}{|PA|}=\cos\angle NPA=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故选：B.



【点睛】

本题考查抛物线的基本性质，直线与抛物线的位置关系，转化思想的应用，属于基础题.

11、A

【解析】

由题先画出基本图形，结合向量加法和点乘运算化简可得

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}=\left[\overrightarrow{O_1O_2}+\left(\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_2B}\right)\right]\cdot\left[\overrightarrow{O_1O_2}-\left(\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_2B}\right)\right]=9-\left|\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_2B}\right|^2$，结合 $\left|\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_2B}\right|$ 的范围即可求解

【详解】

如图，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2B}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MO_1}+\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2N}\right)=\left[\overrightarrow{O_1O_2}+\left(\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_2B}\right)\right]\cdot\left[\overrightarrow{O_1O_2}-\left(\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_2B}\right)\right]$

$=\left|\overrightarrow{O_1O_2}\right|^2-\left|\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_2B}\right|^2=9-\left|\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_2B}\right|^2$ 其中 $\left|\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_2B}\right|\in\left[2-1,2+1\right]=\left[1,3\right]$，所以

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}\in\left[9-3^2,9-1^2\right]=\left[0,8\right]$.