# 难点 03 二次函数与方程综合问题

## 命题趋势

近几年四川中考看，几乎年年会出现二次函数与的题目，经常以解答题的形式出现，内容主要是二次函数与一次函数联立方程的考法，难度偏下，属于各市中考考查的重点，主要考查学生们的计算能力。

## 满分技巧

1、含字母的一次函数解析式的求法；

2、二次函数与一次函数联立，韦达定理的熟练应用；

3、两点间距离公式的应用；

## 限时检测

### 【中考真题】

1.（2022·四川巴中·统考中考真题）如图 1，抛物线 $y=ax^2+2x+c$，交 $x$ 轴于 $A$、$B$ 两点，交 $y$ 轴于点 $C$，$F$ 为抛物线顶点，直线 $EF$ 垂直于 $x$ 轴于点 $E$，当 $y\geq 0$ 时，$-1\leq x\leq 3$.

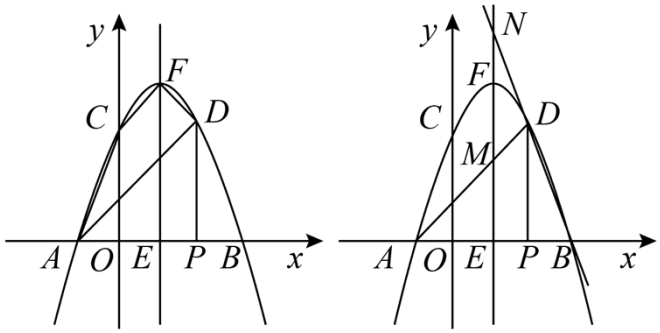


图1



图2

(1)求抛物线的表达式；

(2)点 $P$ 是线段 $BE$ 上的动点（除 $B$、$E$ 外），过点 $P$ 作 $x$ 轴的垂线交抛物线于点 $D$.

①当点 $P$ 的横坐标为 2 时，求四边形 $ACFD$ 的面积；

②如图 2，直线 $AD$，$BD$ 分别与抛物线对称轴交于 $M$、$N$ 两点．试问，$EM+EN$ 是否为定值？如果是，请求出这个定值；如果不是，请说明理由.

【答案】(1) $y=-x^2+2x+3$

(2)①4；②是，定值为8，理由见解析

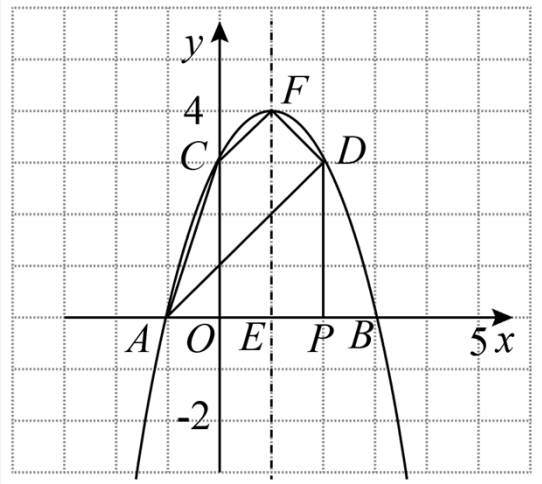
【详解】（1）解：∵当 $y\geq 0$ 时，$-1\leq x\leq 3$，

∴ $x_1=-1$，$x_2=3$ 是 $ax^2+2x+c=0$ 的两根，$A(-1,0)$，$B(3,0)$，

∴ $\begin{cases}a-2+c=0\\9a+6+c=0\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}a=-1\\c=3\end{cases}$，

∴抛物线的表达式为：$y=-x^2+2x+3$；

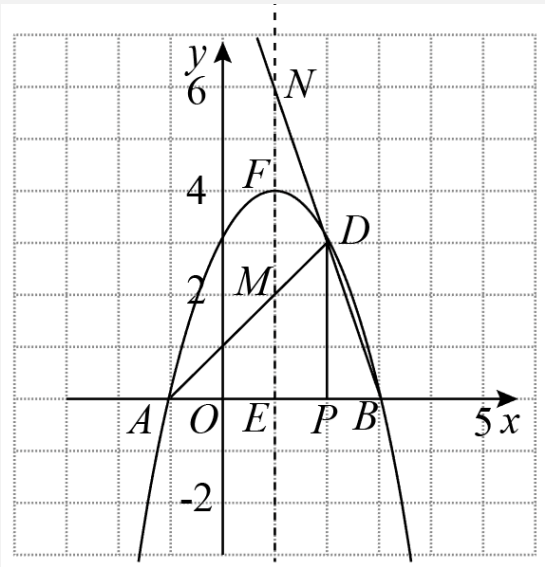



（2）①把 $x=2$ 代入 $y=-x^2+2x+3$ 得：$y=3$，∴ $D(2,3)$.

又当 $x=0$，$y=3$，∴ $C(0,3)$，∴线段 $CD$ // $x$ 轴.

∵ $y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$，∴ $F(1,4)$，

$S_{四边形ACFD}=S_{\triangle FCD}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}CD\left(y_F-y_A\right)=4$；



②设 $D\left(m,-m^2+2m+3\right)(1<m<3)$，

直线 $AD:y=k_1x+b_1$，$BD:y=k_2x+b_2$，

因此可得：

$\begin{cases}0=-k_1+b_1\\-m^2+2m+3=k_1m+b_1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}0=3k_2+b_2\\-m^2+2m+3=k_2m+b_2\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}k_1=3-m\\b_1=3-m\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k_2=-1-m\\b_2=3m+3\end{cases}$，

$\therefore$ 直线 $AD:y=(3-m)x+(3-m)$，

$BD:y=-(m+1)x+3(m+1)$.

令 $x=1$ 得 $y_M=6-2m$，$y_N=2m+2$，

$\therefore ME=6-2m$，$NE=2m+2$，

$\therefore NE+ME=8$.

2.（2022·四川达州·统考中考真题）如图 1，在平面直角坐标系中，已知二次函数 $y=ax^2+bx+2$ 的图象经过点 $A(-1,0)$，$B(3,0)$，与 $y$ 轴交于点 $C$.

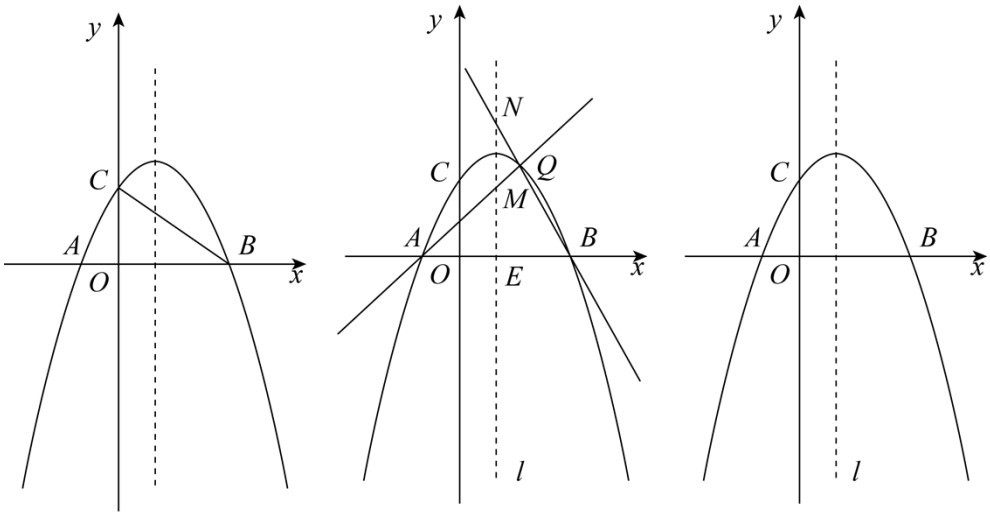



图 1　　图 2　　备用图

(1)求该二次函数的表达式；

(2)连接 $BC$，在该二次函数图象上是否存在点 $P$，使 $\angle PCB=\angle ABC$？若存在，请求出点 $P$ 的坐标；若不存在，请说明理由；

(3)如图 2，直线 $l$ 为该二次函数图象的对称轴，交 $x$ 轴于点 $E$．若点 $Q$ 为 $x$ 轴上方二次函数图象上一动点，过点 $Q$ 作直线 $AQ$，$BQ$ 分别交直线 $l$ 于点 $M$，$N$，在点 $Q$ 的运动过程中，$EM+EN$ 的值是否为定值？若是，请求出该定值；若不是，请说明理由.

【答案】(1) $y=-\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x+2$；(2) $P(2,2)$ 或 $\left(\frac{28}{5},-\frac{286}{25}\right)$；(3) $\frac{16}{3}$

【详解】（1）解：∵由二次函数 $y=ax^2+bx+2$，令 $x=0$，则 $y=2$，

$\therefore C(0,2)$，

∵过点 $A(-1,0)$，$B(3,0)$，

设二次函数的表达式为 $y=a(x+1)(x-3)=a(x^2-2x-3)$，

将点 $C(0,2)$ 代入得，

$2=-3a$，

解得 $a=-\frac{2}{3}$，

$\therefore y=-\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x+2$，

（2）∵二次函数 $y=ax^2+bx+2$ 的图象经过点 $A(-1,0)$，$B(3,0)$，

$\therefore$ 抛物线的对称轴为 $x=1$，

①如图，过点 $C$ 作关于 $x=1$ 的对称点 $P$，

$\therefore CP\parallel AB$，

$\therefore \angle PCB=\angle ABC$，

∵$C(0,2)$，

$\therefore P(2,2)$，

②$x$ 轴上取一点 $D$，使得 $DC=DB$，则 $\angle DCB=\angle ABC$，设 $D(d,0)$，

则 $CD=\sqrt{2^2+d^2}$，$BD=3-d$，

$\therefore 2^2+d^2=(3-d)^2$，解得 $d=\frac{5}{6}$，即 $D\left(\frac{5}{6},0\right)$，

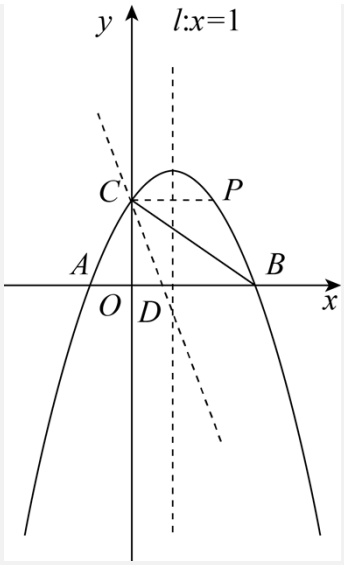
设直线 $CD$ 的解析式为 $y=kx+b$，

$\begin{cases}\frac{5}{6}k+b=0\\ b=2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}k=-\frac{12}{5}\\ b=2\end{cases}$，

$\therefore$ 直线 $CD$ 的解析式为 $y=-\frac{12}{5}x+2$，

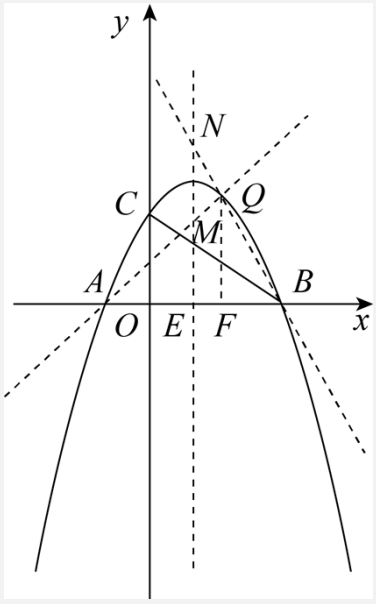
联立 $\begin{cases}y=-\frac{12}{5}x+2\\ y=-\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x+2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=0\\ y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\frac{28}{5}\\ y=-\frac{286}{25}\end{cases}$，$\therefore P\left(\frac{28}{5},-\frac{286}{25}\right)$，

综上所述，$P(2,2)$ 或 $\left(\frac{28}{5},-\frac{286}{25}\right)$，




（3）$EM+EN$ 的值是定值 $\frac{16}{3}$，

设 $Q\left(t,-\frac{2}{3}t^2+\frac{4}{3}t+2\right)$，$-1<t<3$，过点 $Q$ 作 $QF\perp x$ 轴于点 $F$，则 $F(t,0)$，




$\because A(-1,0),B(3,0),E(1,0),F(t,0)$，

$\therefore AE=BE=2,AF=t+1,BF=3-t$，

$\therefore ME\parallel QF,NE\parallel QF$，

$\therefore \triangle AME\backsim\triangle AQF,\triangle BNE\backsim\triangle BQF$，

$\therefore \frac{ME}{QF}=\frac{AE}{AF},\frac{NE}{QF}=\frac{BE}{BF}$，

即 $\frac{ME}{QF}=\frac{2}{t+1},\frac{NE}{QF}=\frac{2}{3-t}$，

$\therefore ME=\dfrac{2}{t+1}QF$，$NE=\dfrac{2}{3-t}QF$，

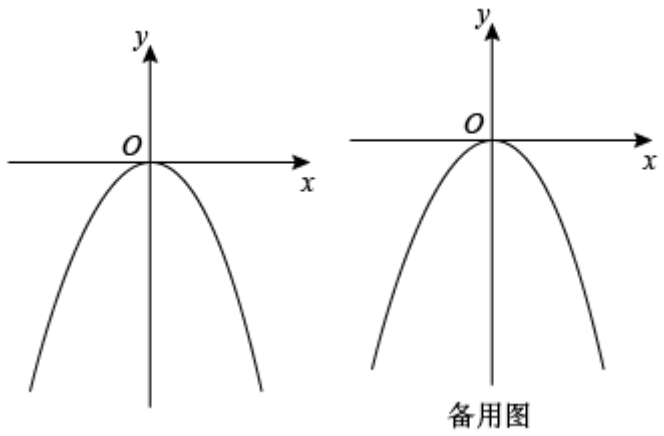
$\therefore ME+NE=\left(\dfrac{2}{t+1}+\dfrac{2}{3-t}\right)QF$，

$\because QF=-\dfrac{2}{3}t^2+\dfrac{4}{3}t+2=\left(-\dfrac{2}{3}\right)\times(t+1)(t-3)$，

$\therefore ME+NE=\left(\dfrac{2}{t+1}+\dfrac{2}{3-t}\right)\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)\times(t+1)(t-3)=-\dfrac{4}{3}\left[(t-3)-(t+1)\right]=\dfrac{16}{3}$.

即 $EM+EN$ 的值是定值 $\dfrac{16}{3}$

3．（2022·四川成都·统考中考真题）如图，在平面直角坐标系 $xOy$ 中，直线 $y=kx-3(k\neq 0)$ 与抛物线 $y=-x^2$ 相交于 A，$B$ 两点（点 A 在点 $B$ 的左侧），点 $B$ 关于 $y$ 轴的对称点为 $B'$.



备用图

(1)当 $k=2$ 时，求 A，$B$ 两点的坐标；

(2)连接 $OA$，$OB$，$AB'$，$BB'$，若 $\triangle B'AB$ 的面积与 $\triangle OAB$ 的面积相等，求 $k$ 的值；

(3)试探究直线 $AB'$ 是否经过某一定点．若是，请求出该定点的坐标；若不是，请说明理由．

【答案】(1)点 A 的坐标为 $(-3,-9)$，点 $B$ 的坐标为 $(1,-1)$

(2) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(3)是，$(0,3)$

【详解】（1）根据题意，得 $\begin{cases}y=2x-3\\ y=-x^2\end{cases}$，

整理得到 $x^2+2x-3=0$，

解方程，得 $x_1=-3,x_2=1$，

当 $x$=-3 时，$y$=-9；当 $x$=1 时，$y$= -1；

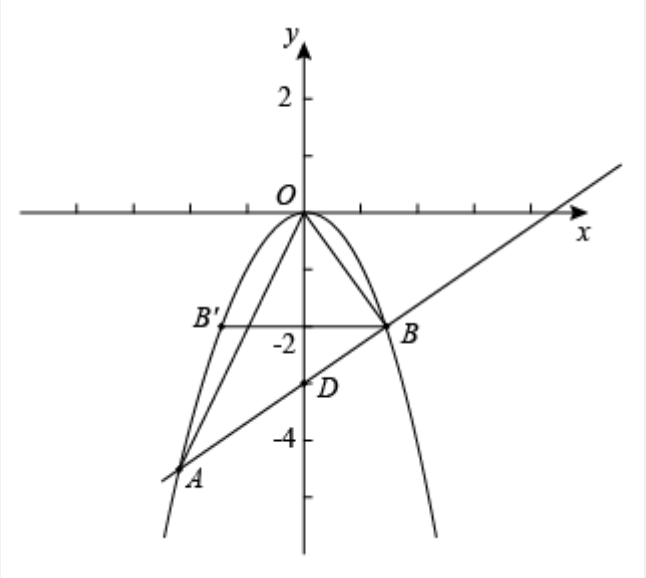
∵点 A 在点 $B$ 的左侧，

∴点 A 的坐标为（-3，-9），点 $B$ 的坐标为（1，-1）.

（2）∵$A$，$B$ 是抛物线 $y=-x^2$ 图像上的点，

设 $A$（$m$，$-m^2$），$B$（$n$，$-n^2$），则 $B'$（$-n$，$-n^2$），

当 $k>0$ 时，




根据题意，得 $\begin{cases} y=kx-3 \\ y=-x^2 \end{cases}$，

整理得到 $x^2+kx-3=0$，

∴$m$，$n$ 是 $x^2+kx-3=0$ 的两个根，

∴$m+n=-k$，$mn=-3$，

设直线 $y=kx-3$ 与 $y$ 轴的交点为 $D$，则点 $D$（0，-3）

∴$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}OD\cdot(n-m)=\frac{3}{2}\times(n-m)$，$S_{\triangle B'AB}=\frac{1}{2}BB'\cdot(y_{B'}-y_A)=\frac{1}{2}\times 2n\times(-n^2+m^2)$，

∴$\frac{3}{2}\times(n-m)=\frac{1}{2}\times 2n\times(-n^2+m^2)=\frac{1}{2}\times 2n\times(m+n)(m-n)$，

∴$3=-2n\times(m+n)=2nk$，

∴$2nk=-mn$，

∵$n\neq 0$，

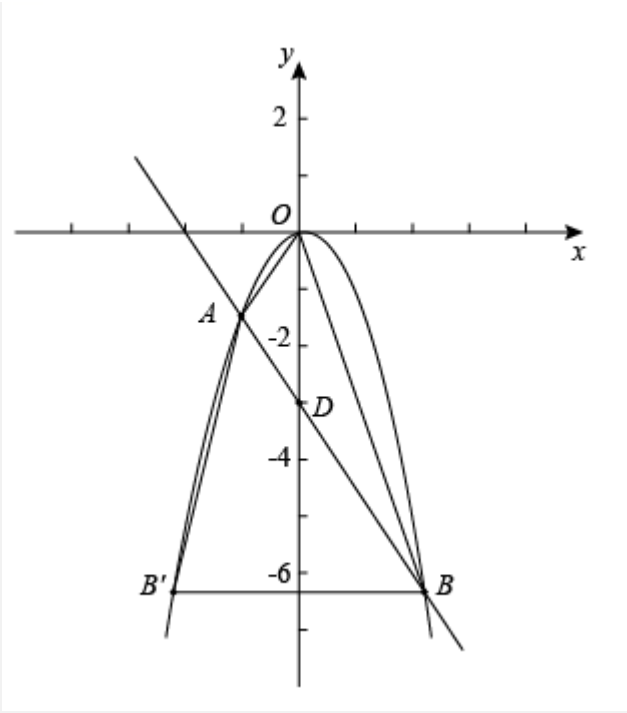
∴$m=-2k$，$n=k$，

∴$-2k\times k=-3$，

解得 $k=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $k=-\frac{\sqrt{6}}{2}$（舍去），

故 $k=\frac{\sqrt{6}}{2}$；

当 $k<0$ 时，




根据题意，得 $\begin{cases} y = kx - 3 \\ y = -x^2 \end{cases}$ ，

整理得到 $x^2 + kx - 3 = 0$ ，

∴$m$，$n$ 是 $x^2 + kx - 3 = 0$ 的两个根，

∴ $m + n = -k$，$mn = -3$ ，

设直线 $y=kx-3$ 与 $y$ 轴的交点为 $D$，则点 $D$（0，-3）

∴ $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OD \cdot (n - m) = \frac{3}{2} \times (n - m)$ ， $S_{\triangle B'AB} = \frac{1}{2} BB' \cdot (y_A - y_{B'}) = \frac{1}{2} \times 2n \times (n^2 - m^2)$ ，

∴ $\frac{3}{2} \times (n - m) = \frac{1}{2} \times 2n \times (n^2 - m^2) = \frac{1}{2} \times 2n \times (m + n)(n - m)$ ，

∴$3 = 2n \times (m + n) = -2nk$ ，

∴$-2nk = -mn$ ，

∵$n \neq 0$，

∴ $m = 2k$ ， $n = -3k$ ，

∴ $2k \times (-3k) = -3$ ，

解得 $k=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (舍去)，

故 $k=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ；

综上所述，$k$ 的值为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

（3）直线 $AB'$ 一定过定点（0，3）．理由如下：

∵$A$，$B$ 是抛物线 $y=-x^2$ 图像上的点，

∴设 $A$（$m$，$-m^2$），$B$（$n$，$-n^2$），则 $B'$（-$n$，$-n^2$），

根据题意，得 $\begin{cases}y=kx-3\\y=-x^2\end{cases}$，

整理得到 $x^2+kx-3=0$，

∴$m$，$n$ 是 $x^2+kx-3=0$ 的两个根，

∴ $m+n=-k$，$mn=-3$，

设直线 $AB'$ 的解析式为 $y=px+q$，根据题意，得

$\begin{cases}-m^2=mp+q\\-n^2=-np+q\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}p=n-m\\q=-mn\end{cases}$，

∴直线 $AB'$ 的解析式为 $y=(n-m)x-mn$，

∵$mn$=-3，

∴-$mn$=3，

∴直线 $AB'$ 的解析式为 $y=(n-m)x+3$，

故直线 $AB'$ 一定过定点（0，3）.

4．（2020·四川自贡·统考中考真题）在平面直角坐标系中，抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 与 $x$ 轴相交于 $A(-3,0)$、$B(1,0)$，交 $y$ 轴于点 $N$，点 $M$ 抛物线的顶点，对称轴与 $x$ 轴交于点 $C$．

(1)求抛物线的解析式；

(2)如图 1，连接 $AM$，点 $E$ 是线段 $AM$ 上方抛物线上的一动点，$EF\perp AM$ 于点 $F$；过点 $E$ 作 $EH\perp x$ 轴于点 $H$，交 $AM$ 于点 $D$．点 $P$ 是 $y$ 轴上一动点，当 $EF$ 取最大值时．

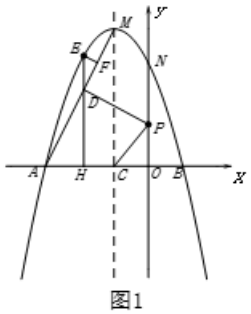


图1

①.求 $PD+PC$ 的最小值；

②.如图 2，$Q$ 点是 $y$ 轴上一动点，请直接写出 $DQ+\frac{1}{4}OQ$ 的最小值．

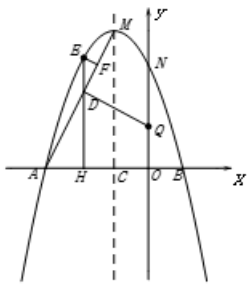


图2

【答案】(1) $y=-x^2-2x+3$；

(2)①$\sqrt{13}$；②$\dfrac{\sqrt{15}+1}{2}$

【解析】（1）解：将 A（-3,0）、B（1,0）代入二次函数 $y=ax^2+bx+3$ 得，

$\begin{cases}9a-3b+3=0\\a+b+3=0\end{cases}$ 解之得 $\begin{cases}a=-1\\b=-2\end{cases}$，∴二次函数的解析式为 $y=-x^2-2x+3$；

（2）

①将二次函数 $y=-x^2-2x+3$ 配方得 $y=-(x+1)^2+4$，

∴M（-1,4）

设直线 AM 的解析式为 $y=px+q$，将 $A(-3,0),M(-1,4)$ 代入直线可得，

$\begin{cases}-3p+q=0\\-p+q=4\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}p=2\\q=6\end{cases}$，

∴直线 AM 的解析式为 $y=2x+6$，

过 E 作直线 $l$，平行于直线 AM，且解析式为 $y=2x+m$，

∵E 在直线 AM 上方的抛物线上，

∴$-3<x_E<-1$；

当直线 $l$ 与 AM 距离最大时，EF 取得最大值，

∴当 $l$ 与抛物线只有一个交点时，EF 取得最大值，

将直线 $l$ 的解析式代入抛物线得 $x^2+4x+m-3=0$，

由题意可得，$\triangle=16-4\times1(m-3)=0$，经计算得 $m=7$，将 $m=7$ 代入二次方程可得，

$x^2+4x+4=0$，

∴$x=-2$，即 E 点的横坐标为-2，将 $x=-2$ 代入抛物线得 $y=3$，

∴$E(-2,3)$，

又∵$ED\perp x$ 轴，

∴$x_D=x_E=-2$，将 $x_D=-2$ 代入直线 AM，

∴$D(-2,2)$，

∵$C(-1,0),B(1,0)$，

∴B、C 两点关于 $y$ 轴对称，∴$PB=PC$，

∴$PC+PD=PB+PD$，当 P、B、D 三点不共线时 $PB+PD>BD$，

当 P、B、D 三点共线时，$PB+PD=BD$，

∴当 P、B、D 三点共线时 PC+PD 取得最小值，

在 Rt△BHD 中，DH=2，BH=3，∴BD=$\sqrt{DH^2+BH^2}=\sqrt{13}$，∴$PC+PD$ 的最小值为$\sqrt{13}$；

②过点 $O$ 作直线 $OK$，使 $\sin\angle NOK=\frac{1}{4}$，过点 $D$ 作 $DK\perp OK$ 于点 $K$，交 $y$ 轴于点 $Q$，则点 $Q$ 为所求点，$DQ+\frac{1}{4}OQ=DQ+QK=DK$ 为最小值，

则直线 $OK$ 的表达式为：$y=\sqrt{15}x$，

$\because DK\perp OK$，故设直线 $DK$ 的表达式为：$y=-\frac{1}{\sqrt{15}}x+b$，

将点 $D$ 的坐标代入上式并解得：$b=2-\frac{2}{\sqrt{15}}$，

而直线 $DK$ 的表达式为：$y=-\frac{1}{\sqrt{15}}x+2-\frac{2}{\sqrt{15}}$，

故点 $Q\left(0,2-\frac{2}{\sqrt{15}}\right)$，

由直线 $KD$ 的表达式知，$QD$ 与 $x$ 轴负半轴的夹角（设为 $\alpha$）的正切值为 $\frac{1}{\sqrt{15}}$，则 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}$，

则 $DQ=\frac{x_Q-x_D}{\cos\alpha}=\frac{2}{\frac{\sqrt{15}}{4}}=\frac{8}{\sqrt{15}}$，而 $\frac{1}{4}OQ=\frac{1}{4}\left(2-\frac{2}{\sqrt{15}}\right)$，

则 $DQ+\frac{1}{4}OQ$ 为最小值 $=\frac{8}{\sqrt{15}}+\frac{1}{4}\left(2-\frac{2}{\sqrt{15}}\right)=\frac{\sqrt{15}+1}{2}$.

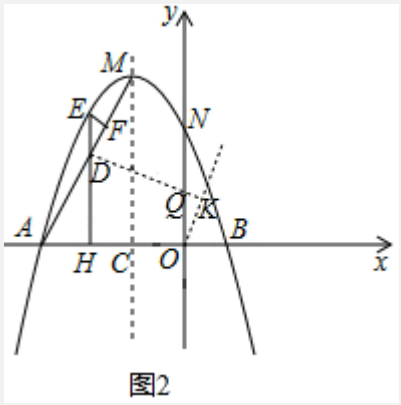


图2

5．（2019·四川乐山·统考中考真题）如图，已知抛物线 $y=a(x+2)(x-6)$ 与 $x$ 轴相交于 A、$B$ 两点，与 $y$ 轴交于 $C$ 点，且 $\tan\angle CAB=\frac{3}{2}$.设抛物线的顶点为 $M$，对称轴交 $x$ 轴于点 $N$.

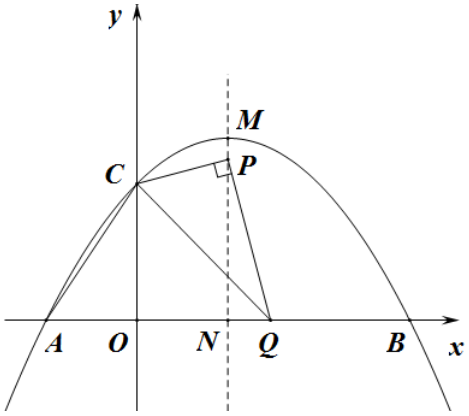
（1）求抛物线的解析式；

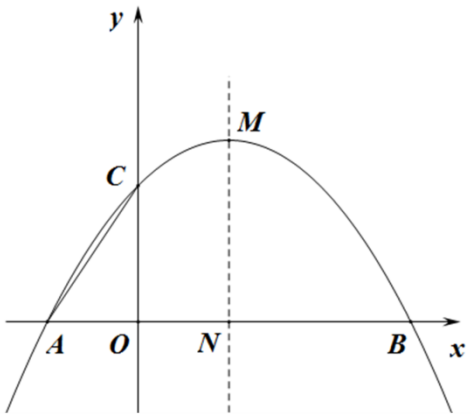
（2）$P$ 为抛物线的对称轴上一点，$Q(n,0)$ 为 $x$ 轴上一点，且 $PQ \perp PC$.

①当点 $P$ 在线段 $MN$ (含端点)上运动时，求 $n$ 的变化范围；

②当 $n$ 取最大值时，求点 $P$ 到线段 $CQ$ 的距离；

③当 $n$ 取最大值时，将线段 $CQ$ 向上平移 $t$ 个单位长度，使得线段 $CQ$ 与抛物线有两个交点，求 $t$ 的取值范围.




备用图

【答案】（1） $y=-\frac{1}{4}(x+2)(x-6)$；（2）① $\frac{7}{8} \le n \le 4$ ②2 ③ $3 \le t < \frac{49}{16}$

【详解】解：（1）令 y=0 得：a（x+2）（x-6）=0

解得：x=-2 或 6

$\therefore A(-2,0), B(6,0)$,

在 $Rt\Delta AOC$ 中

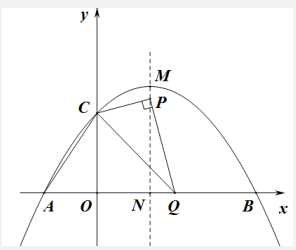
$\because \tan \angle CAO=\frac{CO}{AO}=\frac{3}{2}$，且 $OA=2$,

$\therefore CO=3$,

$\therefore C(0,3)$,将 $C$ 点坐标代入 $y=a(x+2)(x-6)$ 得：$a=-\frac{1}{4}$,

故抛物线解析式为：$y=-\frac{1}{4}(x+2)(x-6)$；

（2）①由（1）知，抛物线的对称轴为：x=2，顶点 M(2,4)，




设 P 点坐标为（2，m）（其中 0≤m≤4），

则 $PC^2=2^2+(m-3)^2$，$PQ^2=m^2+(n-2)^2$，$CQ^2=3^2+n^2$，

∵PQ⊥PC，

∴在 Rt△PCQ 中中，由勾股定理得：$PC^2+PQ^2=CQ^2$,

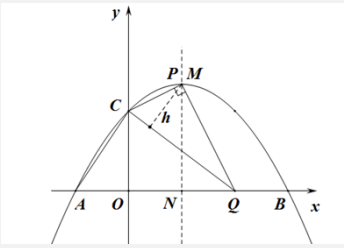
即 $2^2+(m-3)^2+ m^2+(n-2)^2=3^2+n^2$，整理得：

$n=\frac{1}{2}\left(m^2-3m+4\right)=\frac{1}{2}\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{8}$（0≤m≤4），

∴当 $m=\frac{3}{2}$ 时，n 取得最小值为 $\frac{7}{8}$；当 $m=4$ 时，n 取得最大值为 4，

∴$\frac{7}{8}$≤n≤4；

②由①知：当 n 取最大值 4 时，m=4，




∴P（2,4），Q（4,0）

则 PC=$\sqrt{5}$，PQ=2$\sqrt{5}$，CQ=5，

设点 P 到线段 CQ 距离为 $h$，

由 $S_{\Delta PCQ}=\frac{1}{2}CQ\cdot h=\frac{1}{2}PC\cdot PQ$，

得：$h=\frac{PC\cdot PQ}{CQ}=2$

故点 $P$ 到线段 $CQ$ 距离为 $2$；

③由②可知：当 $n$ 取最大值 4 时，$Q(4,0)$，

$\therefore$ 线段 $CQ$ 的解析式为：$y=-\frac{3}{4}x+3$，

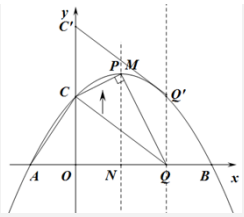
设线段 $CQ$ 向上平移 $t$ 个单位长度后的解析式为：$y=-\frac{3}{4}x+3+t$，

当线段 $CQ$ 向上平移，使点 $Q$ 恰好在抛物线上时，线段 $CQ$ 与抛物线有两个交点

此时对应的点 $Q'$ 的纵坐标为：$-\frac{1}{4}(4+2)(4-6)=3$，

将 $Q'(4,3)$ 代入 $y=-\frac{3}{4}x+3+t$ 得：$t=3$，

当线段 $CQ$ 继续向上平移，线段 $CQ$ 与抛物线只有一个交点时，




联解 $\begin{cases} y=-\dfrac{1}{4}(x+2)(x-6) \\ y=-\dfrac{3}{4}x+3+t \end{cases}$

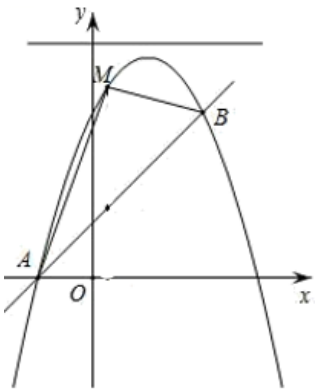
得：$-\dfrac{1}{4}(x+2)(x-6)=-\dfrac{3}{4}x+3+t$，化简得：

$x^2-7x+4t=0$，

由 $\Delta=49-16t=0$，得 $t=\dfrac{49}{16}$，

∴当线段 $CQ$ 与抛物线有两个交点时，$3\le t<\dfrac{49}{16}$.

6．（2019·四川·统考中考真题）如图，已知直线 $AB$ 与抛物线 $C$：$y=ax^2+2x+c$ 相交于 $A(-1,0)$ 和点 $B(2,3)$ 两点.




⑴求抛物线 $C$ 的函数表达式；

⑵若点 $M$ 是位于直线 $AB$ 上方抛物线上的一动点，以 $MA$、$MB$ 为相邻两边作平行四边形 $MANB$，当平行四边形 $MANB$ 的面积最大时，求此时四边形 $MANB$ 的面积 S 及点 $M$ 的坐标；

⑶在抛物线 $C$ 的对称轴上是否存在定点 $F$，使抛物线 $C$ 上任意一点 $P$ 到点 $F$ 的距离等于到直线 $y=\dfrac{17}{4}$ 的距离，若存在，求出定点 $F$ 的坐标；若不存在，请说明理由.

【答案】⑴ $y=-x^2+2x+3$；⑵当 $a=\dfrac{1}{2}$，$S_{□MANB}=2S_{△ABM}=\dfrac{27}{4}$，此时 $M\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{15}{4}\right)$；⑶存在. 当 $F\left(1,\dfrac{15}{4}\right)$ 时，无论 $x$ 取任何实数，均有 $PG=PF$. 理由见解析.

【详解】（1）由题意把点（-1，0）、（2，3）代入 $y=ax^2+2x+c$，

得，$\begin{cases}a-2+c=0\\4a+4+c=3\end{cases}$，

解得 a=-1，c=3，

∴此抛物线 C 函数表达式为：$y=-x^2+2x+3$；

（2）如图 1，过点 M 作 MH⊥x 轴于 H，交直线 AB 于 K，

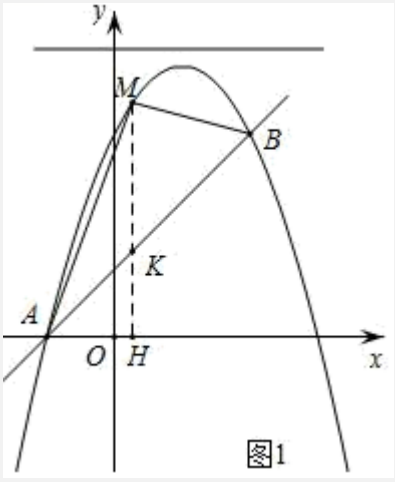


图1

将点（-1，0）、（2，3）代入 y=kx+b 中，

得，$\begin{cases}-k+b=0\\2k+b=3\end{cases}$，解得，k=1，b=1，∴$y_{AB}=x+1$，

设点 M（a，$-a^2+2a+3$），则 K（a，a+1），

则 $MK=-a^2+2a+3-(a+1)=-(a-\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4}$，

根据二次函数的性质可知，当 $a=\frac{1}{2}$ 时，MK 有最大长度 $\frac{9}{4}$，

∴$S_{△AMB\text{最大}}=S_{△AMK}+S_{△BMK}=\frac{1}{2}MK\cdot AH+\frac{1}{2}MK\cdot(x_B-x_H)=\frac{1}{2}MK\cdot(x_B-x_A)=\frac{1}{2}\times\frac{9}{4}\times3=\frac{27}{8}$，

∴以 MA、MB 为相邻的两边作平行四边形 MANB，当平行四边形 MANB 的面积最大时，

$S_{\text{最大}}=2S_{△AMB\text{最大}}=2\times\frac{27}{8}=\frac{27}{4}$，M（$\frac{1}{2}$，$\frac{15}{4}$）；

（3）存在点 F，

∵$y=-x^2+2x+3$

$=-(x-1)^2+4$，

∴对称轴为直线 x=1，

当 y=0 时，$x_1=-1$，$x_2=3$，

∴抛物线与 x 轴正半轴交于点 C（3，0），

如图 2，分别过点 B，C 作直线 $y=\frac{17}{4}$ 的垂线，垂足为 N，H，

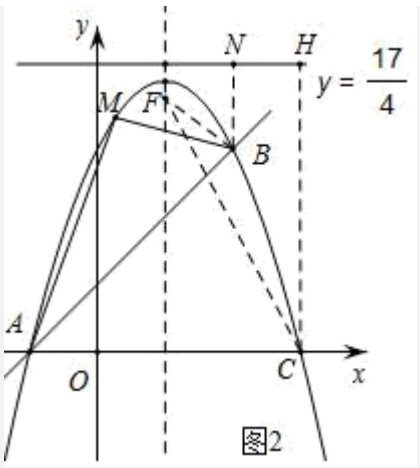


图2

抛物线对称轴上存在点F，使抛物线C上任意一点P到点F的距离等于到直线y=$\frac{17}{4}$的距离，

设F（1，a），连接BF，CF，则BF=BN=$\frac{17}{4}$-3=$\frac{5}{4}$，CF=CH=$\frac{17}{4}$，

由题意可列：$\begin{cases}(2-1)^2+(a-3)^2=\left(\frac{5}{4}\right)^2\\(3-1)^2+a^2=\left(\frac{17}{4}\right)^2\end{cases}$，解得，a=$\frac{15}{4}$，∴F（1，$\frac{15}{4}$）.

## 【模拟题】

1．（2022·四川成都·四川省成都市七中育才学校校考模拟预测）抛物线$y=ax^2+bx+\sqrt{3}$分别交$x$轴于点$A(1,0)$，$B(-3,0)$，交$y$轴于点$C$，抛物线的对称轴与$x$轴相交于点$D$，点$M$为线段$OC$上的动点，点$N$为线段$AC$上的动点，且$MN\perp AC$．

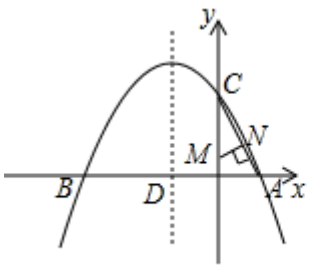


图1

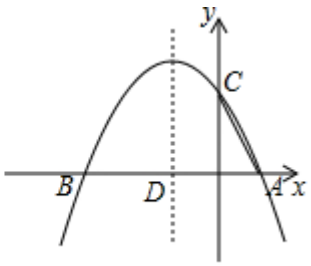


图2

(1)求抛物线的表达式；

(2)线段$MN$，$NC$在数量上有何关系，请写出你的理由；

(3)在$M$，$N$移动的过程中，$DM+\frac{1}{2}MC$是否有最小值，如果有，请写出理由．

【答案】(1)$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$

(2)$NC=\sqrt{3}MN$，见解析

(3)有，最小值为$\sqrt{3}$

【详解】（1）把点 $A(1,0)$，$B(-3,0)$ 代入抛物线 $y=ax^2+bx+\sqrt{3}$ 中得：

$\begin{cases} a+b+\sqrt{3}=0 \\ 9a-3b+\sqrt{3}=0 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} a=-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ b=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$，

∴抛物线的解析式为：$y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x^2-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$；

（2）$NC=\sqrt{3}MN$，

理由是：如图 1，

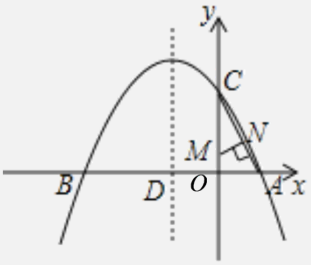


图1

令 $x=0$，则 $y=\sqrt{3}$，即 $C(0,\sqrt{3})$，

∵ $A(1,0)$，$C(0,\sqrt{3})$，

∴，$OC=\sqrt{3}$，$OA=1$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOC$ 中，$OC=\sqrt{3}$，$OA=1$，

∵ $MN\perp AC$，

∴ $\angle MNC=90°$，

∴ $\tan\angle OCA=\dfrac{OA}{OC}=\dfrac{MN}{NC}$，

∴ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{MN}{NC}$，

∴ $NC=\sqrt{3}MN$；

（3）在 $M$，$N$ 移动的过程中，$DM+\dfrac{1}{2}MC$ 有最小值是 $\sqrt{3}$，理由如下：

由（2）知：$\tan\angle OCA=\dfrac{OA}{OC}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

∴ $\angle OCA=30°$，即 $\angle OAC=60°$，

∴ $MN=\dfrac{1}{2}CM$，

∴$DM+\frac{1}{2}MC$ 的最小值是 $DM+MN$ 的最小值，即 $D$、$M$、$N$ 三点共线时，点 $D$ 到 $AC$ 的垂线段 $DN$ 的长，如图 2，

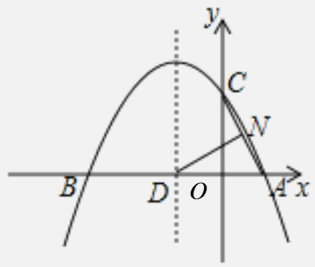


图2

抛物线解析式为：$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$；

∴对称轴是：$x=-1$，即 $D(-1,0)$，

∴ $AD=OA+OD=1+1=2$，

在 Rt△$ADN$ 中，$\angle DAN=60°$，

∴ $DN=AD\times\sin\angle DAN=\sqrt{3}$，

即 $DM+\frac{1}{2}MC=DM+MN=DN=\sqrt{3}$，

∴在 $M$，$N$ 移动的过程中，$DM+\frac{1}{2}MC$ 有最小值是 $\sqrt{3}$.

2．（2021·四川乐山·统考三模）抛物线 $y=ax^2+bx+3$（$a\neq0$）与 $x$ 轴交于点 $A$（﹣3，0）和 $B$（1，0），与 $y$ 轴交于点 $C$，顶点是点 $D$.

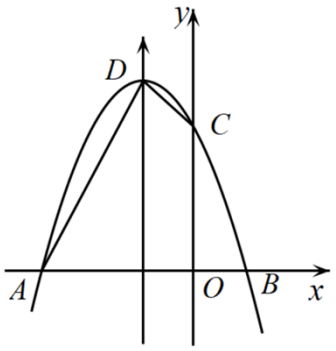
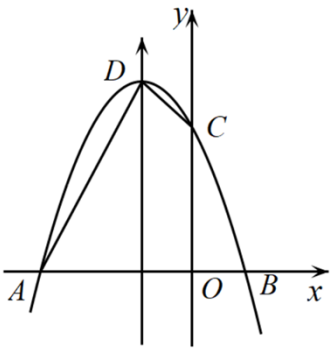


图1



备用图

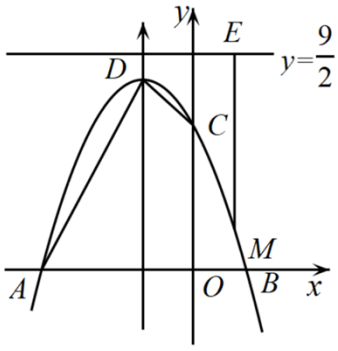


图2

(1)求抛物线解析式；

(2)连接 $AD$，$CD$，$BC$，将△$OBC$ 沿着 $x$ 轴以 1 个单位每秒的速度向左平移，对应点分别是 $O'$，$B'$，$C'$，设 $S$ 表示 $O'B'C'$与四边形 $AOCD$ 的重叠部分面积，求 $S$ 与时间 $t$ 的函数解析式；

(3)如图 2，点 $M$（$m$，$n$）为抛物线上的任意一点，过 $M$ 向直线 $y=\frac{9}{2}$ 作垂线，垂足为 $E$，

点 $F$ 为抛物线对称轴上的一点，当 $ME-MF$ 恒等于 $\frac{1}{4}$ 时，求 $F$ 点的坐标．

【答案】(1)$y=-x^2-2x+3$；

(2)$S=\begin{cases}-\frac{3}{2}t^2+3t\left(0<t<1\right)\\ \frac{3}{2}\left(1\le t<\frac{3}{2}\right)\\ -\frac{2}{5}t^2+\frac{6}{5}t+\frac{3}{5}\left(\frac{3}{2}\le t\le 3\right)\\ \frac{3}{5}\left(t-4\right)^2\left(3<t\le 4\right)\end{cases}$

(3)（$-1$，$\frac{15}{4}$）．

【解析】（1）解：将点 $A$（$-3$，0）和 $B$（1，0）代入 $y=ax^2+bx+3$，

得：$\begin{cases}9a-3b+3=0\\ a+b+3=0\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=-1\\ b=-2\end{cases}$，∴抛物线解析式为：$y=-x^2-2x+3$；

（2）

∵$y=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$，

∴顶点 $D$ 的坐标为：（$-1$，4），

设直线 $AD$ 的函数关系式为：$y=mx+n$，

则：$\begin{cases}-m+n=4\\ -3m+n=0\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}m=2\\ n=6\end{cases}$，

∴直线 $AD$ 的函数关系式为：$y=2x+6$，

对 $y=-x^2-2x+3$ 来说，当 $x=0$ 时，$y=3$，即点 $C$ 的坐标是（0，3），

当 $C'$在 $AD$ 上时，令 $y=3$，即 $2x+6=3$，

解得：$x=-\frac{3}{2}$，

①如图 1，当 $0<t<1$ 时，

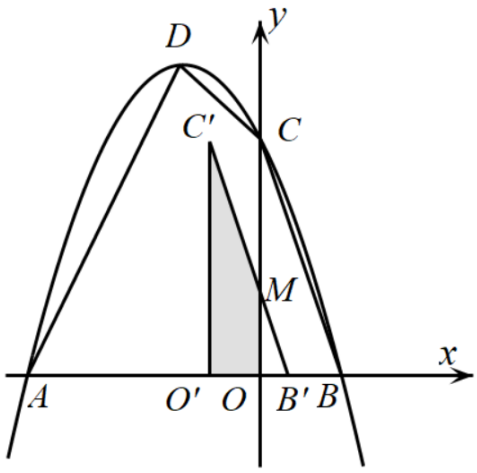


图1

由题意得，$OC=O'C'=3$，$OB=O'B'=1$，

$\therefore OB'=1-t$，

$\because OC \parallel O'C'$，

$\therefore \triangle O'B'C' \backsim \triangle OB'M$，

$\therefore \dfrac{O'C'}{OM}=\dfrac{O'B'}{OB'}$ 即 $\dfrac{3}{OM}=\dfrac{1}{1-t}$，

解得：$OM=3（1-t）$，

$S=S_{\triangle O'B'C'}-S_{\triangle OMB'}$

$=\dfrac{1}{2}\times 3\times 1-\dfrac{1}{2}\times 3（1-t）^2=-\dfrac{3}{2}t^2+3t$；

②当 $1\le t<\dfrac{3}{2}$ 时，如图 2，

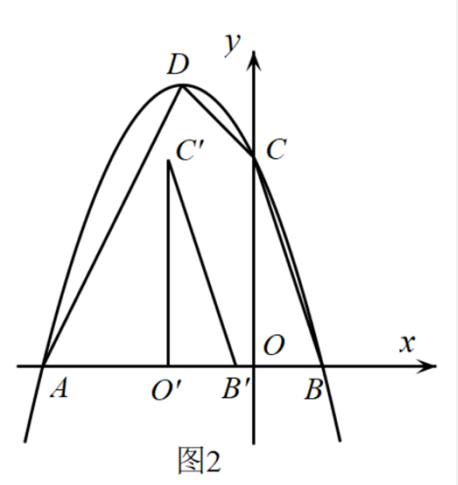


图2

$\triangle O'B'C'$ 完全在四边形 $AOCD$ 内，

此时：$S=\dfrac{1}{2}\times 1\times 3=\dfrac{3}{2}$；

③当$\frac{3}{2}\le t\le 3$时，如图 3，

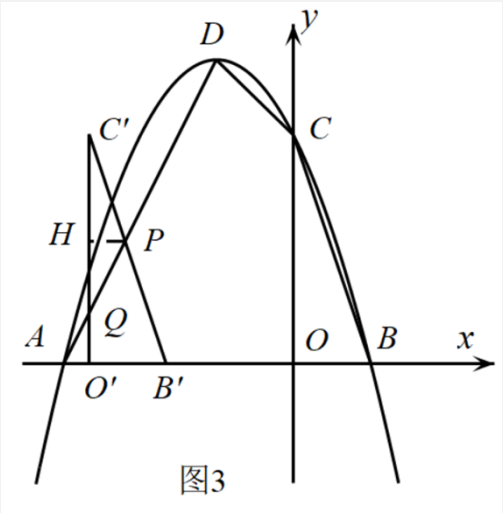


图3

设 $B'C'$，$C'O'$与 $AD$ 的交点分别为 $P$，$Q$，

过点 $P$ 作 $PH\perp C'O'$于点 $H$，

$\because AO=3$，$OO'=t$，

$\therefore AO'=3-t$，$O'Q=AO'\tan\angle QAO'=2AO'=6-2t$，

$\therefore C'Q=3-(6-2t)=2t-3$，

$\because PH\parallel AB$，

$\therefore \angle HPQ=\angle DAO$，

$\therefore QH=HP\tan\angle HPQ=2HP$，$C'H=\frac{HP}{\tan C'}=3HP$，

$\therefore HP=\frac{1}{5}C'Q=\frac{1}{5}(2t-3)$，

$\therefore S=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(2t-3)\times\frac{1}{5}(2t-3)=-\frac{2}{5}t^2+\frac{6}{5}t+\frac{3}{5}$；

④当 $3<t\le 4$ 时，如图 4，

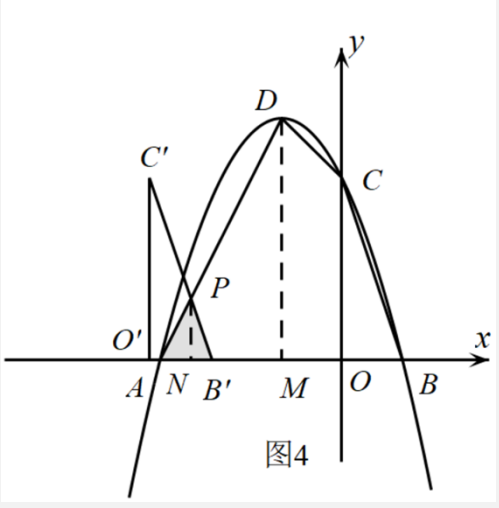


图4

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/728035001110006112