

湖南省长沙市 2023 届高三数学上学期新高考适应性考试试卷

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知复数 z 满足 $z(1-i)=3+i$ ，则 $|z| =$ ()

A. $\sqrt{10}$

B. $\sqrt{5}$

C. 2

D. $\sqrt{2}$

【答案】B

【详解】 $z = \frac{3+i}{1-i} = \frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+4i}{2} = 1+2i$,

所以 $|z| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

故选：B

2. 设集合 $A = \{(x, y) | y = x\}$ ， $B = \{(x, y) | y = x^3\}$ ，则 $A \cap B$ 的元素个数是 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】C

【详解】 联立 $\begin{cases} y = x \\ y = x^3 \end{cases}$ ，即 $x = x^3$ ，解得： $x = 0$ 或 ± 1 ，

即 $A \cap B = \{(0, 0), (1, 1), (-1, -1)\}$ ，

故 $A \cap B$ 的元素个数为 3.

故选：C

3. 已知 $a = \log_2 1.8$ ， $b = \log_4 3.6$ ， $c = \frac{1}{2}$ ，则 ()

A. $a > b > c$

B. $a > c > b$

C. $b > a > c$

D. $b > c > a$

【答案】C

【详解】 $a = \log_2 1.8 = \log_4 1.8^2$ ，

所以 $a - b = \log_4 1.8^2 - \log_4 3.6 = \log_4 \frac{1.8^2}{3.6} < \log_4 1 = 0$ ，所以 $a < b$.

$$a = \log_2 1.8 > \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2} = c, \text{ 所以 } a > c.$$

所以有 $b > a > c$.

故选: C.

4. $\left(\frac{1}{x} - 2\right)(1-2x)^4$ 的展开式中, 常数项为 ()

A. -4

B. -6

C. -8

D. -10

【答案】D

【详解】 $(1-2x)^4$ 展开式的通项公式为 $T_{r+1} = C_4^r (-2x)^r = C_4^r (-2)^r \cdot x^r$,

所以 $\left(\frac{1}{x} - 2\right)(1-2x)^4$ 的展开式中, 常数项为

$$C_4^1 \times (-2) + (-2) \times C_4^0 = -8 - 2 = -10,$$

故选: D

5. 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 $AB=4$, $AD=3$, $AA_1=5$, $\angle BAD=90^\circ$,

$\angle BAA_1 = \angle DAA_1 = 60^\circ$, 则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD_1}$ 的值为 ()

A. 10.5

B. 12.5

C. 22.5

D. 42.5

【答案】A

【详解】由题意得 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$,

因为 $AB=4$, $AD=3$, $AA_1=5$, $\angle BAD=90^\circ$, $\angle BAA_1 = \angle DAA_1 = 60^\circ$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD_1} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$$

$$= -\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA_1}$$

$$= -\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA_1}$$

$$= -16 + 4 \times 5 \cos 60^\circ + 9 + 3 \times 5 \cos 60^\circ$$

$$= -16 + 10 + 9 + 7.5$$

$$= 10.5,$$

是以数学家爱德华·卢卡斯命名，与斐波那契数列联系紧密，即 $L_1=1$ ，且

$L_{n+1} = F_n + F_{n+2} (n \in \mathbb{N}^*)$ ，则 $F_{2023} = (\quad)$

A. $\frac{1}{3}L_{2022} + \frac{1}{6}L_{2024}$

B. $\frac{1}{3}L_{2022} + \frac{1}{7}L_{2024}$

C. $\frac{1}{5}L_{2022} + \frac{1}{5}L_{2024}$

D. $-\frac{1}{5}L_{2022} + \frac{2}{5}L_{2024}$

【答案】C

【详解】因为 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n (n \in \mathbb{N}^*)$ ，

所以当 $n \geq 3$ 时， $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ，

所以 $3F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + 2F_n = F_{n-2} + (F_{n-1} + F_n) + F_n = F_{n-2} + F_{n+1} + F_n = F_{n-2} + F_{n+2}$ ，

故 $3F_{2023} = F_{2021} + F_{2025}$ ，

因为 $L_{n+1} = F_n + F_{n+2} (n \in \mathbb{N}^*)$ ，

所以 $L_{2022} = F_{2021} + F_{2023}$ ， $L_{2024} = F_{2023} + F_{2025}$ ，

故 $L_{2022} + L_{2024} = (F_{2021} + F_{2023}) + (F_{2023} + F_{2025}) = 2F_{2023} + F_{2021} + F_{2025} = 5F_{2023}$ ，

所以 $F_{2023} = \frac{1}{5}L_{2022} + \frac{1}{5}L_{2024}$ 。

故选：C。

8. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知 $A(3,0)$ ， $B(0,t) (t > 0)$ ，若该平面中存在点 P ，同时满

足两个条件 $|PA|^2 + 2|PO|^2 = 12$ 与 $|PO| = \sqrt{2}|PB|$ ，则 t 的取值范围是 $(\quad)$

A. $\left(0, \frac{\sqrt{6}}{2} - 1\right)$

B. $\left(\frac{\sqrt{6}}{2} + 1, +\infty\right)$

C. $\left(\frac{\sqrt{6}}{2} - 1, \frac{\sqrt{6}}{2} + 1\right)$

D. $\left(0, \frac{\sqrt{6}}{2} - 1\right) \cup \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + 1, +\infty\right)$

【答案】C

【详解】解：由题知，不妨设 $P(x,y)$ ，

因为 $|PA|^2 + 2|PO|^2 = 12$ ，

所以 $(x-3)^2 + y^2 + 2(x^2 + y^2) = 12$ ，

化简可得: $(x-1)^2 + y^2 = 2$,

故点 P 在以 $(1,0)$ 为圆心, $\sqrt{2}$ 为半径的圆上,

又因为 $|PO| = \sqrt{2}|PB|$,

所以 $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + (y-t)^2}$,

化简可得: $x^2 + (y-2t)^2 = 2t^2$,

即点 P 在以 $(0,2t)$ 为圆心, $\sqrt{2}t$ 为半径的圆上,

故只需圆 $(x-1)^2 + y^2 = 2$ 与圆 $x^2 + (y-2t)^2 = 2t^2$ 有交点即可,

即 $|\sqrt{2}t - \sqrt{2}| \leq \sqrt{1^2 + (2t)^2} \leq |\sqrt{2}t + \sqrt{2}|$,

同时平方化简可得: $1 - 4t \leq 2t^2 \leq 1 + 4t$,

即
$$\begin{cases} 2t^2 + 4t - 1 \geq 0 \\ 2t^2 - 4t - 1 \leq 0 \end{cases}$$
,

解得: $\frac{\sqrt{6}}{2} - 1 \leq t \leq \frac{\sqrt{6}}{2} + 1$.

故选:C

二、选择题 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知双曲线的方程为 $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{16} = 1$, 则 ()

A. 渐近线方程为 $y = \pm \frac{1}{2}x$

B. 焦距为 $8\sqrt{5}$

C. 离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

D. 焦点到渐近线的距离为 8

【答案】BC

【详解】 $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{16} = 1$ 焦点在 y 轴上, 故渐近线方程为 $y = \pm \frac{a}{b}x = \pm 2x$, A 错误;

$c^2 = 64 + 16 = 80$, 故 $c = 4\sqrt{5}$, 故焦距为 $8\sqrt{5}$, B 正确;

离心率为 $\frac{c}{a} = \frac{4\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, C 正确;

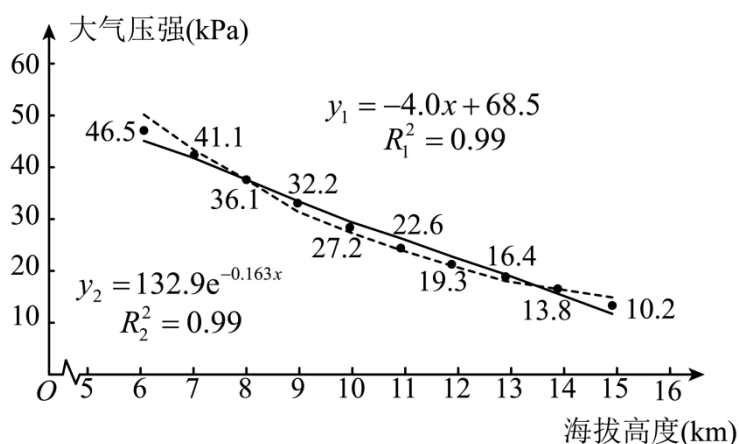
焦点坐标为 $(0, \pm 4\sqrt{5})$ ，故焦点到渐近线 $y = \pm 2x$ 的距离为 $\frac{|\pm 4\sqrt{5}|}{\sqrt{4+1}} = 4$ ，D 错误.

故选：BC

10. 自然环境中，大气压受到各种因素的影响，如温度、湿度、风速和海拔等方面的改变，都将导致大气压发生相应的变化，其中以海拔的影响最为显著. 下图是根据一组观测数据得到海拔 6 千米~15 千米的大气压强散点图，根据一元线性回归模型得到经验回归方程为

$y_1 = -4.0x + 68.5$ ，决定系数为 $R_1^2 = 0.99$ ；根据非线性回归模型得到经验回归方程为

$y_2 = 132.9e^{-0.163x}$ ，决定系数为 $R_2^2 = 0.99$ ，则下列说法正确的是（ ）



- A. 由散点图可知，大气压强与海拔高度负相关
- B. 由方程 $y_1 = -4.0x + 68.5$ 可知，海拔每升高 1 千米，大气压强必定降低 4.0kPa
- C. 由方程 $y_1 = -4.0x + 68.5$ 可知，样本点 $(11, 22.6)$ 的残差为-1.9
- D. 对比两个回归模型，结合实际情况，方程 $y_2 = 132.9e^{-0.163x}$ 的预报效果更好

【答案】ACD

【详解】对于 A 项，由图象知，海拔高度越高，大气压强越低，所以大气压强与海拔高度负相关，故 A 项正确；

对于 B 项，回归直线得到的数据为估计值，而非精确值，故 B 项错误；

对于 C 项，当 $x=11$ 时， $\hat{y}_1 = -4.0 \times 11 + 68.5 = 24.5$ ，又由散点图知观测值为 22.6，所以样本点 $(11, 22.6)$ 的残差为 $22.6 - 24.5 = -1.9$ ，故 C 项正确；

对于 D 项，随着海拔高度的增加，大气压强越来越小，但不可能为负数，因此方程

$y_2 = 132.9e^{-0.163x}$ 的预报效果更好，故 D 项正确.

故选: ACD.

11. 已知函数 $y = \frac{x+1}{x-1}$ 与 $y = e^x$ 相交于 A, B 两点, 与 $y = \ln x$ 相交于 C, D 两点, 若 $A, B,$

C, D 四点的横坐标分别为 x_1, x_2, x_3, x_4 , 且 $x_1 < x_2, x_3 < x_4$, 则 ()

A. $x_1 + x_2 = 0$

B. $x_3 x_4 = 1$

C. $x_1 \ln x_3 = 1$

D. $x_4 e^{x_1} = 1$

【答案】 ABD

【详解】 由题意可知 x_1 是方程 $e^x = \frac{x+1}{x-1}$ 的一个根, 则 $e^{x_1} = \frac{x_1+1}{x_1-1}$, 将 $-x_1$ 代入得

$$e^{-x_1} = \frac{-x_1+1}{-x_1-1} = \frac{x_1-1}{x_1+1}, \text{ 所以 } -x_1 \text{ 也是方程 } e^x = \frac{x+1}{x-1} \text{ 的一个根, 所以 } -x_1 = x_2, \text{ 故}$$

$x_1 + x_2 = 0$, 故 A 正确,

由题意可知 x_3 是方程 $\ln x = \frac{x+1}{x-1}$ 的一个根, 则 $\ln x_3 = \frac{x_3+1}{x_3-1}$, 则

$$\ln \frac{1}{x_3} = -\ln x_3 = -\frac{x_3+1}{x_3-1} = \frac{\frac{1}{x_3}+1}{\frac{1}{x_3}-1}, \text{ 所以 } \frac{1}{x_3} \text{ 也是方程 } \ln x = \frac{x+1}{x-1} \text{ 的一个根, 所以 } \frac{1}{x_3} = x_4,$$

故 $x_3 x_4 = 1$, 故 B 正确,

设点 $P(x_0, y_0)$ 在函数 $y = \frac{x+1}{x-1}$ 上, 则满足 $y_0 = \frac{x_0+1}{x_0-1}$, 即 $y_0 x_0 - y_0 - x_0 - 1 = 0$ 点

$P(x_0, y_0)$ 关于直线 $y = x$ 的对称点为 $P'(y_0, x_0)$, 将 $P'(y_0, x_0)$ 代入 $y = \frac{x+1}{x-1}$ 得

$$x_0 = \frac{y_0+1}{y_0-1}, \text{ 即可 } y_0 x_0 - y_0 - x_0 - 1 = 0, \text{ 因此可知 } P'(y_0, x_0) \text{ 在函数 } y = \frac{x+1}{x-1} \text{ 上, 即}$$

$y = \frac{x+1}{x-1}$ 关于直线 $y = x$ 的对称, 又 $y = \ln x, y = e^x$ 关于直线 $y = x$ 的对称, 因此可知 A, C

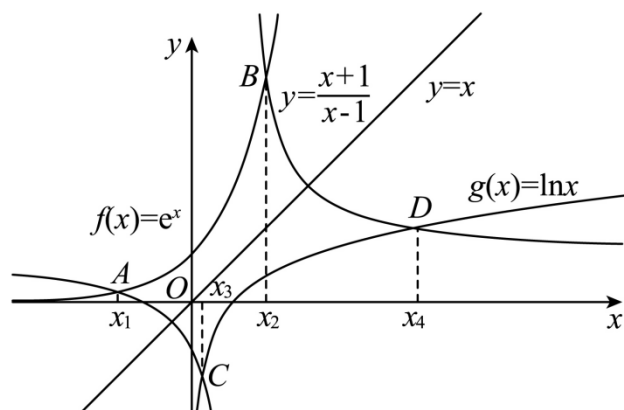
对称, B, D 对称,

$$\text{故 } \begin{cases} x_1 = y_3 = \ln x_3 \\ x_3 = y_1 = e^{x_1} \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} x_2 = y_4 = \ln x_4 \\ x_4 = y_2 = e^{x_2} \end{cases},$$

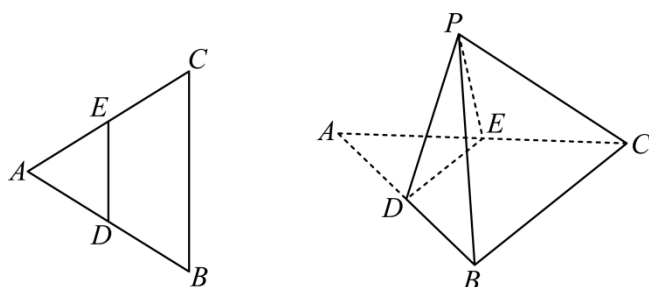
所以 $e^{x_1} = x_3 = \frac{1}{x_4}$, $x_4 e^{x_1} = 1$, 故 D 正确,

由于 $x_1 = \ln x_3$, $x_1 \neq \pm 1$, 故 C 错误,

故选: ABD



12. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 4 的等边三角形, D, E 分别是 AB, AC 的中点, 将 $\triangle ADE$ 沿着 DE 翻折, 使点 A 到点 P 处, 得到四棱锥 $P-BCED$, 则 ()



- A. 翻折过程中, 该四棱锥的体积有最大值为 3
- B. 存在某个点 P 位置, 满足平面 $PDE \perp$ 平面 PBC
- C. 当 $PB \perp PC$ 时, 直线 PB 与平面 $BCDE$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- D. 当 $PB = \sqrt{10}$ 时, 该四棱锥的五个顶点所在球的表面积为 $\frac{52}{3}\pi$

【答案】ACD

【详解】

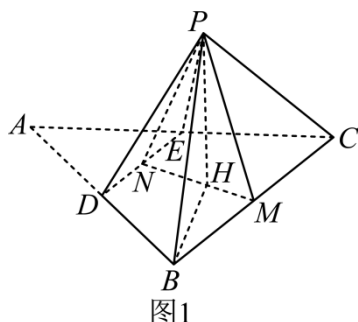


图1

对于 A 项, 当平面 $PDE \perp$ 平面 $BCDE$ 时, 四棱锥 $P-BCED$ 的体积最大. $\triangle PDE$ 的高为 $PN = \sqrt{3}$, 四边形 $BCDE$ 为高为 $MN = \sqrt{3}$ 的梯形, 梯形面积 $S = \frac{4+2}{2} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$, 体积 $V = \frac{1}{3} \times S \times \sqrt{3} = 3$, 故 A 项正确;

对于 C 项, 如图 1, 过点 P 作 $PH \perp MN$, 垂足为 H . 由 B 分析可得, $BC \perp$ 平面 PMN , 所以平面 $BCDE \perp$ 平面 PMN , 平面 $BCDE \cap$ 平面 $PMN = MN$, $PH \subset$ 平面 PMN , 所以 $PH \perp$ 平面 $BCDE$. 所以 $\angle PBH$ 即为直线 PB 与平面 $BCDE$ 所成的角. 由题意可知,

$$\cos \angle PMN = \frac{PM^2 + NM^2 - PN^2}{2PM \cdot NM} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 所以 } \sin \angle PMN = \frac{\sqrt{6}}{3}; \text{ 在 } \triangle PMH \text{ 中,}$$

对于 D 项, 当 $PB = \sqrt{10}$ 时, 由 $BN = \sqrt{7}$, 可知 $PN^2 + BN^2 = PB^2$, 即 $PN \perp BN$, 又 $PN \perp DE$, 且 $BN \cap DE = N$, 则 $PN \perp$ 平面 $BCDE$, 又 $PN \subset$ 平面 PDE , 则平面 $PDE \perp$ 平面 $BCDE$. 四棱锥 $P-BCED$ 的外接球球心为 O , $\triangle PDE$ 的外心为 G , 则 $OG \perp$ 平面 PDE . 如图 2, 易知点 M 为等腰梯形 $BCDE$ 的外心, 则 $OM \perp$ 平面 $BCDE$,

9

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/728037010065006104>