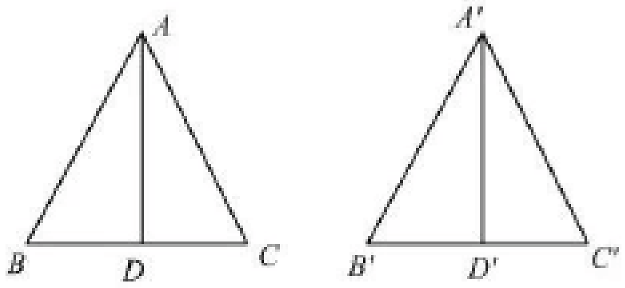
全等三角形典型例题汇总

模块一　全等基本模型

【典题1】 证明：两全等三角形的对应角的角平分线相等．

【答案】已知：$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，$AD$ 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于 D，$A'D'$ 平分 $\angle B'A'C'$ 交 $B'C'$ 于 D'．



求证： $AD = A'D'$．

证明：$\because \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，

$\therefore \angle BAC = \angle B'A'C'$，

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于 D， $A'D'$ 平分 $\angle B'A'C'$ 交 $B'C'$ 于 D'

$\therefore \angle BAD = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\angle B'A'C' = \angle B'A'D'$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle A'B'D'$ 中，

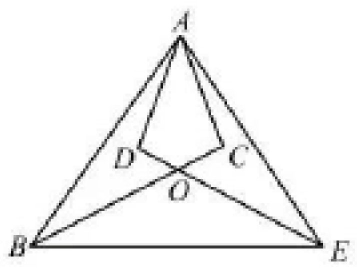
$$\begin{cases} \angle BAD = \angle B'A'D' \\ AB = A'B' \\ \angle B = \angle B' \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle A'B'D'$，

$\therefore AD = A'D'$

【典题2】 如图，在 $\triangle ABE$ 中，$AB = AE$，$AD = AC$，$\angle BAD = \angle EAC$，BC、DE 交于点 O．

求证：(1) $\triangle ABC \cong \triangle AED$；(2) $OB = OE$．



【答案】(1) $\because \angle BAD = \angle EAC$

$\therefore \angle BAC = \angle EAD$

在1::,.ABC 和 A AED ,ⅱ

AB = AE
乙BAC = 乙£AD
AC = AD

: . 心 ABC 竺心AED(S心)

(2) 由(I)知乙AB C = 乙AED

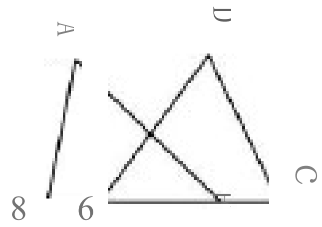
·•. AB=AE

:. LADE=乙4EB

: . L OBE=乙0 £B

:. 0B = OE

【典题3) 如图，点E` F 在BC 上， BE=CF， 1IB=DC， L B=L C 求证： AF = DE



【答案 】证明： ' : BE = CF

:. BE+ £F = CF +EF

即BF = CE

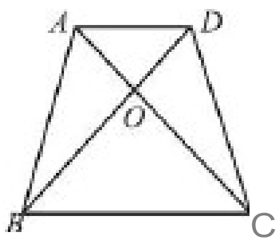
在心ABF 与 l:,,DCE 中

AB=DC 乙B =L C BF = CE

•6 ABF 竺 l:,,DC£(SAS)

: . AF = DE

[共超4) 已知：如图 ，在四 边形 ABCD中，对角线 AC 、BD 相交于 点0, L ABC = L BCD, AB=CD.
求证： OA = OD



[答案1 证法一.

在心ABC 和 l::.DCB 中，

·: AB = CD， 乙 BC =LBCD， BC是公 共边，

: . l::.ABC 盆6 DCB

: . .4C= DB

且. LACB = LDBC .

: .0 B = OC

:. OA=OD

证法二

心ABC 竺凸DC8（同id:法 一•）

:，乙 CB= 乙DBC

. . 乙4B0 =乙DCO

又 ' 、乙AOB= L.DOC ,

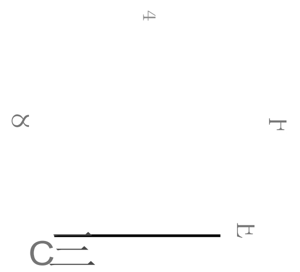
:. 6. AOB竺心DOC

:. OA = OD

【典题5】 如图 所示，AB= AF，BC= FE， LB=LF， D是CE的中点

(1) 求证 AD.l. CE:

(2) 连接BF 后，还能 得出什 么结 论？ 请你写出两个（不要求证明）



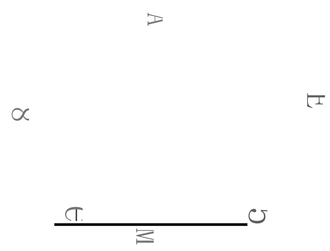
［答案I (I) 连结 1C、AE ，则 C;ABC兰凸心 E ， . . AC = . “

又.'. D 是 CE 的中 县，:. ADJ.CE

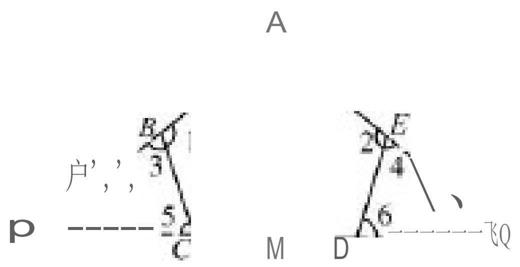
(2) ADJ. BF', BF II CE

［典赶6) 如图，在 五边形ABCDE中，LB= LE， LC= LD， BC = DE， M 为CD中点

求证： AM 上 C D



【答案1 分别延长AB, DC交十点 P： 分别 延长A£ , CD 交于点Q



.. L 1= L2，乙1+ L3 = 180°, L2 + L4 = 180 °

:. 乙3 =4

同理 L 5; L 6

在 心PCB 计16 QDE 中

白白

:. . 从 P C B 竺6 QDE(ASA)

_._L P = L Q, CP = DQ

:. AP = AQ

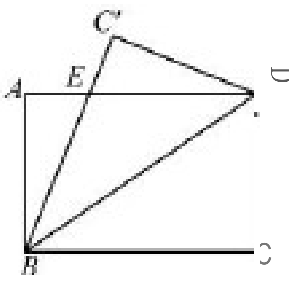
·· C M = DM

:. PM=QM

:. M为等腰l.c,. PQ 底边中占

:. AM .L CD

［共题7） 如图，把长方形 ABCD （ AB =CD， A/) = BC， ∠A = L ABC = ∠C = LCD.4 = 90勺 沿对角线 8D对折，使点 C 治在点 C' 处，诮说明 AJ:ξ C 'E



【答案 I ∠AEB = ∠C'ED， 乙 i = ∠C =90°， AB = CD = C'D，

•: A An E 兰 6- C' Dli ， :. AE = C'E 。

（共题8） 将两个全等的直角三伯形 ABC 和 DBE 按图@ 方式摆放，其中 LACB = LDEB = 90°，
乙A = LD = 30°，点 E 落在 AB 上、 DE 所在直线交AC 所在直线干点 F .（

I) 求 吐 AF + EF = DE，

(2) 若将图 1 中的 l::,DBE 绕点 8 按顺时针方向旋料角＂， 且 0° < a < 600, 其他条件不变，诺在图 2 中画出变抉后的图形，并直接写出(I)中的结 化是否仍然成立

(3) 若将图 1 中的心DBE 绕点 8 按顺时针方向旋转角′， 且60 ° < /3 < ls0 0 ，其他条件不变，如图 3，你认为(I) 中的结论还成立吗？ 若成立，写出研明过程：若不成立，i'/.1写出此时 AF 、EF 与 DE 之间的关系，并说明理由

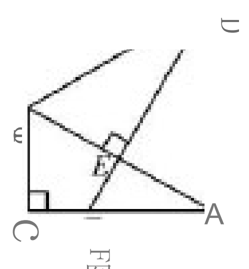
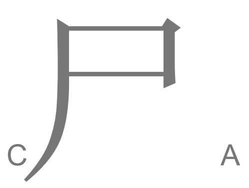
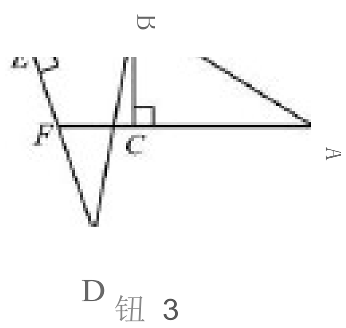


图 ⊢





钮 3

【答案 1 (I) 连结 BF， ·: b. BED 兰 A BC， :. BE = BC， 又 .. BF 是公共边，

•• Rt A BCF 竺 RI心BEF， :. CF = EF， :. AF + EF = AC = DE，

(2) 成立

(3) 不成立， AF - EF = DE，

连结 BF， 与 l0 同理 RI A BCF 竺 Rl b. BEF ， :. CF = EF

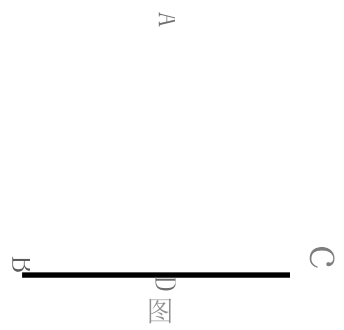
:. AF - EF = AC = DE

粗块二 角平分线基本模型

（共赳9） b. A8C 中.

(I) 如图 I, 若LBIIC的平分线过BC的中点D . 猪想AB与AC的关系并证 明 .

(2)如图 2, 若乙8AC的平分线不过BC的中点D，而是与 BC的垂亘平 分线交于 点E，过E（乍 EF .L A8， 垂足为 F，猪想8F 、A8 、AC的关系并证明.



图

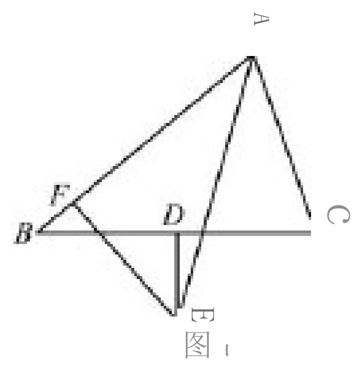
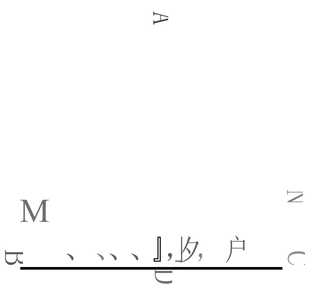


图 ı

【答案1 (I)猪想 A/J= .4C:

证明： 过 D 作DM .L AB于M， DN .L AB 千iV；



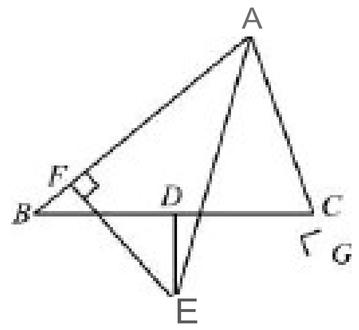
·: AD平分乙BAC . :. DM = DN，

又 . AD o AD, BD = CD， :. 6. ADM 竺 6. ADN， f;.BDM 竺 6.CDN

•· AM = AN， BM = CN, :, AII= AC,

(2)猪想， 2BF = AII - AC

证明 连结 EB， EC，过町 乍EG .L AC 交 AC 延长线于点 G



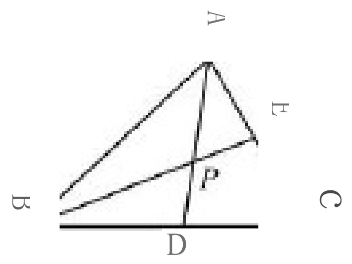
·: A£ 平分L BAC， EF.LAB， EC.L AC， :. EF = EC， .F = AG

·.• DE 垂直平分BC， ;,BE=CE, ;, ⊳EBF !<?.!>ECG , ,; BF =CG,

:. AB- AC = AF + BF - (AG - CG) = 2BF

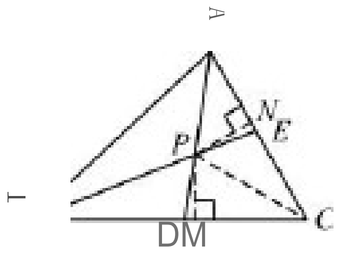
［典超10） 如图， .!>ABC的角平分线AD，BE相交于点p，已知L C = 60°. (I)求LAPE的度数

(2)说明PD = PE的理由.



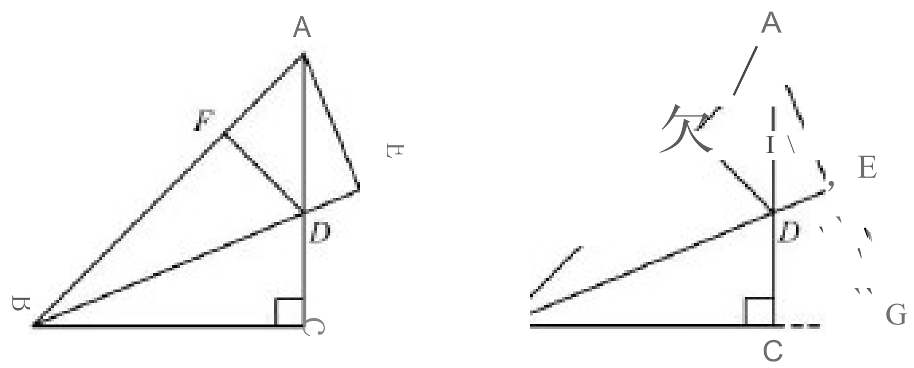
LAPE= LPAB+LPBA =;:L CAB+ -;:CBA = -;:(180°- L A) = 60°
【答案 I (l) 2 2 2

(2)过 P f乍 PM .L BC 于 M， PN.L AC 于 N， 连结 PC



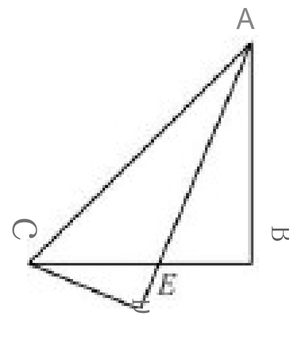
∵ AD， BE 是/::.ABC 的角 平分线， .•.PC 平分 ∠ACB， :. PM = PN,
∠PDM =L ABD＋∠BAD =∠ABP+∠PBD＋∠BAD＝∠AI' £ + L PBC = 60°＋∠PBC
∠PEN =∠EBC +L BCN= ∠EBC+ 60°
:. L PDM = L PEN ， 又？ ∠PMD = L PNE ， : . 心PMD竺心PNE， :. PD = PE
8

（共题11】 如图．在从ABC 中． £.C = 90•， AC = BC．D 是 AC 上一 点． AEI. BD 交 8D 的延长线于 E，且 Ae = 1/2 ...8D， DF .L AB 于 F 求证：CD = DF

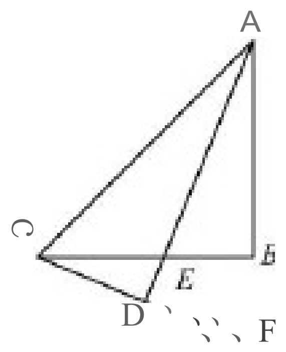


［答案】延长 A£ 、 BC 交于点 G，
AE = GE= I/2 .;. AG
易得心ACG竺心BCO，． AG = BO，. .
又．BE.l. AG，: . 从BAE 竺从BGE，:. BE 平分 ∠ABC，: . DC = DF

［共题12】 已知 从巨 CB， AB l. CB， 从入L CD， AE 平分 ∠CAB，求证： AIS= 2CD．



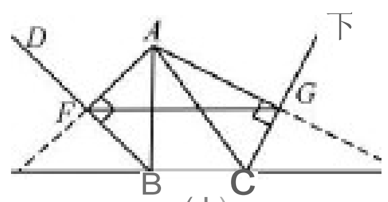
［答案 1 延长 AB 、 CD 交于点 F，



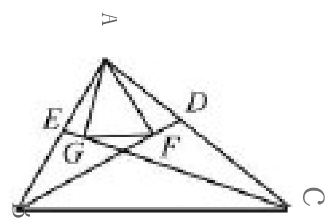
t::.ADC 竺 6 ADF，6 AB£ 竺 CBF， : . AE = CF = 2CD

【共题13】 已知．如图(I)．BD、CE 分别是 A ABC 的外角平分线，过点 A 作 AF .L8D， AG .LCE，垂足分别为 F 、G 连结 FG，延长 AF 、AG，与宜线 8C 相交，易证：F G = 7 (AB+ BC + AC)
2

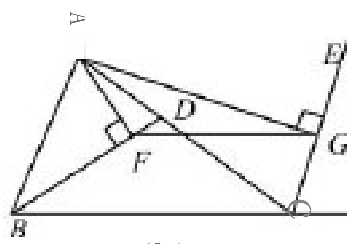
若(I) BD 、CE 分别是心 ABC 的内角平分线（如图(2))
(2) BD 为 D.ABC 的内角平分线， CE 为心 ABC 的外角平分线（如 图(3))，
则在图 (2)、图 (3)两抻悄况下，线段 FG 与心 A8C 三边又有怎样的数益关系？请写出你的稍想，并对其中的 种悄况给子证明．



(I)



(2)



(3)

猪想 图(2)中＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 图(3)中＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

吐明．如图（ ）

FG $=\frac{1}{2}$(AB + AC - BC)

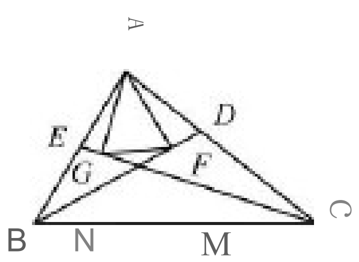
［答案 1 (1)结论：

(2) FG $=\frac{1}{2}$(AC+ BC - AB)

FG= $\frac{1}{2}$(AB + AC - BC)

证明：(2)

延长 AG 、 AF 交 BC 于点 'V、点M



证心 ABF 竺心B FM

: . AB =1\,fB,　AF=FM

同理AC =CN，　AG=NG

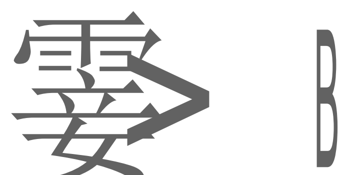
$GP=:.\frac{I}{2}.MN$

·· MN= BM+ CN- BC= AB+ AC - BC

$\cdot\ GF = \frac{I}{2}(A\ B + AC- BC)$

(3) 与(2)同理

【典题14】　如图(ll，Rt6　lIBC 中，LACB =911,°　C[J.L; /8'　垂足为D．AF 平分 LCJIB，交C[J千点E，交CB丁点 F

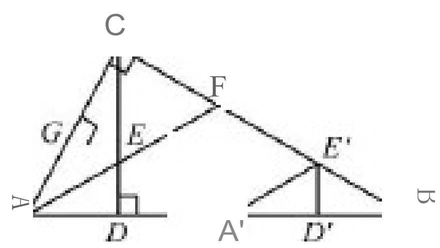


(l) 如　iE:　CE=CF

(2)将图1中的6　ADE 沿 ,18 向右平移到 A'D'E'的仿登，使点E'落在BC边上，其它条件4习变，如图 2 1沂不．试猪想．BE' 与CF 有怎样的数括关系汁肖证明你的结论

［答案］(1) 相等

(2)如图，过点 E 作 E G.L AC -f G .



困2

又• :AF 平分LCAB，ED.1AB，:. ED=EG

由平移的性庙可知．　D'E' = DE，:. D'E' = GE .

·: LACB =90•．:. L4CD + 乙DCB =欠 °

·: CD.1 AB于D．:. L8 + LDC8 =90°.

; 乙 CDa LB

在 Rtt:,.CEG 与和t:,.BE'D' 巾

·: LGCE=LB，　LCGE= LBD'E'，　GE= D'E'

: ,心CEG　t:,.BE'D'

: . CE = BE'

由(Jl可知CF = BE'

［典题15】　已知：如图，　BC >AD，DC• AD，BD平分乙ABC

求i祈　乙4+L.C=I80 ° _

一

B 二 ,

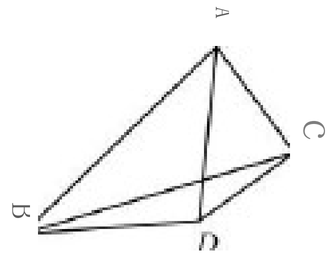
[‖　| ¦ BC上取点 E，使得 BE=BA，

乙二

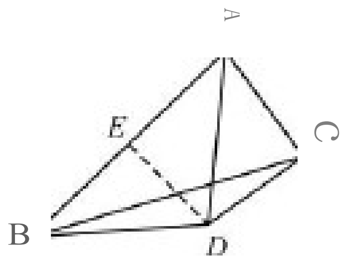
则 !:::.BAD 兰 !:::.BED. :. Al) = DE = DC, LBAD= LBED.

:. LC=LDEC， ·: LDEB+LDEC=IS铲，. 乙4+LC=180°.

【典赶16】 如图，6 ABC中. AC = $\frac{I}{2}$7 A8，AD 平分 LBAC，且 AD = BD，求证: CD.1 AC .



【答案 1 取AB中点E，连结DE，



则 AE = $\frac{1}{2}$C..AB= AC ， DEJ. AB,

. 6 ACD 竺 心 AED . .· LACD=LA£D=90° :, CD.L AC

【典 17】 已知：如图， AB=AC， P B=PC， PD.LAB， PE.L AC，亟足 分别为 D 、I:..

求证 ： P D= PE，