第 4 章 数列（知识归纳+题型突破）

重要题型

题型一 数列的概念与简单表示法
题型二 等差数列
题型三 等比数列
题型四 数列求和
题型五数列的综合应用
题型六 数列综合解答题

基础知识归纳

一、数列的概念

1.数列的定义
按照确定的顺序排列的一列数称为数列，数列中的每一个数叫做这个数列的项.
2.数列的分类

分类标准	类型	满足条件	
项数	有穷数列	项数有限	
	无穷数列	项数无限	
项与项间的大小关系	递增数列	$a_{n+1}>a_n$	其中 $n\in\mathbf{N}^*$
	递减数列	$a_{n+1}<a_n$	
	常数列	$a_{n+1}=a_n$	
	摆动数列	从第二项起，有些项大于它的前一项，有些项小于它的前一项的数列	

3.数列的表示法
数列有三种表示法，它们分别是表格法、图象法和解析式法.
4.数列的通项公式
如果数列$\{a_n\}$的第 n 项 a_n 与它的序号 n 之间的对应关系可以用一个式子来表示，那么这个式子叫做这个数列的通项公式.
5.数列的递推公式
如果一个数列的相邻两项或多项之间的关系可以用一个式子来表示，那么这个式子叫做这个数列的递推公式.
常用结论：
1.若数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，通项公式为 a_n，则 $a_n=\begin{cases}S_1, & n=1,\\ S_n-S_{n-1}, & n\geq 2.\end{cases}$
2.在数列$\{a_n\}$中，若 a_n 最大，则$\begin{cases}a_n\geq a_{n-1},\\ a_n\geq a_{n+1}.\end{cases}$ 若 a_n 最小，则$\begin{cases}a_n\leq a_{n-1},\\ a_n\leq a_{n+1}.\end{cases}$

二、等差数列及其前 n 项和

1.等差数列的概念
(1)定义：如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都等于同一个常数，那么这个数列就叫做等差数列.
数学语言表达式：$a_{n+1}-a_n=d(n\in\mathbf{N}^*$，$d$ 为常数).
(2)等差中项：由三个数 a，A，b 组成的等差数列可以看成是最简单的等差数列，这时 A 叫做 a 与 b 的等差中项，根据等差数列的定义可以知道，$2A=a+b$.
2.等差数列的通项公式与前 n 项和公式
(1)若等差数列$\{a_n\}$的首项是 a_1，公差是 d，则其通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d$.

(2)前 n 项和公式：$S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$.

3.等差数列的性质

(1)通项公式的推广：$a_n=a_m+(n-m)d(n，m\in\mathbf{N}^*)$.

(2)若$\{a_n\}$为等差数列，且 $k+l=m+n(k，l，m，n\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_k+a_l=a_m+a_n$.

(3)若$\{a_n\}$是等差数列，公差为 d，则 $a_k，a_{k+m}，a_{k+2m}，\ldots(k，m\in\mathbf{N}^*)$是公差为 md 的等差数列.

(4)若 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，则数列 $S_m，S_{2m}-S_m，S_{3m}-S_{2m}，\ldots$也是等差数列.

(5)若 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，则数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$也为等差数列.

常用结论：

1.已知数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=pn+q$(其中 $p，q$ 为常数)，则数列$\{a_n\}$一定是等差数列，且公差为 p.

2.在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1>0，d<0$，则 S_n 存在最大值；若 $a_1<0，d>0$，则 S_n 存在最小值.

3.等差数列$\{a_n\}$的单调性：当 $d>0$ 时，$\{a_n\}$是递增数列；当 $d<0$ 时，$\{a_n\}$是递减数列；当 $d=0$ 时，$\{a_n\}$是常数列.

4.数列$\{a_n\}$是等差数列$\Leftrightarrow S_n=An^2+Bn(A，B$ 为常数).

三、等比数列及其前 n 项和

1.等比数列的概念

(1)定义：如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的比都等于同一个常数，那么这个数列叫做等比数列，这个常数叫做等比数列的公比，公比通常用字母 q 表示(显然 $q\neq 0$).

数学语言表达式：$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q(n\geq 2，q$ 为非零常数).

(2)等比中项：如果在 a 与 b 中间插入一个数 G，使 $a，G，b$ 成等比数列，那么 G 叫做 a 与 b 的等比中项.此时 $G^2=ab$.

2.等比数列的通项公式及前 n 项和公式

(1)若等比数列$\{a_n\}$的首项为 a_1，公比是 q，则其通项公式为 $a_n=a_1q^{n-1}$；

通项公式的推广：$a_n=a_mq^{n-m}$.

(2)等比数列的前 n 项和公式：当 $q=1$ 时，$S_n=na_1$；当 $q\neq 1$ 时，$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$.

3.等比数列的性质

已知$\{a_n\}$是等比数列，S_n 是数列$\{a_n\}$的前 n 项和.

(1)若 $k+l=m+n(k，l，m，n\in\mathbf{N}^*)$，则有 $a_k\cdot a_l=a_m\cdot a_n$.

(2)相隔等距离的项组成的数列仍是等比数列，即 $a_k，a_{k+m}，a_{k+2m}，\ldots$仍是等比数列，公比为 q^m.

(3)当 $q\neq -1$，或 $q=-1$ 且 n 为奇数时，$S_n，S_{2n}-S_n，S_{3n}-S_{2n}，\ldots$仍成等比数列，其公比为 q^n.

常用结论：

1.若数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$(项数相同)是等比数列，则数列$\{c\cdot a_n\}(c\neq 0)$，$\{|a_n|\}$，$\{a_n^2\}$，$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$，$\{a_n\cdot b_n\}$，$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$也是等比数列.

2.由 $a_{n+1}=qa_n，q\neq 0$，并不能立即断言$\{a_n\}$为等比数列，还要验证 $a_1\neq 0$.

3.在运用等比数列的前 n 项和公式时，必须注意对 $q=1$ 与 $q\neq 1$ 分类讨论，防止因忽略 $q=1$ 这一特殊情形而导致解题失误.

4.三个数成等比数列，通常设为$\frac{x}{q}$，x，xq；四个符号相同的数成等比数列，通常设为$\frac{x}{q^3}$,$\frac{x}{q}$，xq，xq^3.

四、数列求和

1.特殊数列的求和公式

(1)等差数列的前 n 项和公式：

$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$.

(2)等比数列的前 n 项和公式：

$$S_n=\begin{cases}na_1, & q=1,\\ \dfrac{a_1-a_nq}{1-q}=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & q\neq 1.\end{cases}$$

2.数列求和的几种常用方法

(1)分组转化法

把数列的每一项分成两项或几项，使其转化为几个等差、等比数列，再求解.

(2)裂项相消法

把数列的通项拆成两项之差，在求和时中间的一些项可以相互抵消，从而求得其和.

(3)错位相减法

如果一个数列的各项是由一个等差数列和一个等比数列的对应项之积构成的，这个数列的前 n 项和可用错位相减法求解.

(4)倒序相加法

如果一个数列$\{a_n\}$的前 n 项中与首末两端等"距离"的两项的和相等或等于同一个常数，那么求这个数列的前 n 项和即可用倒序相加法求解.

常用结论：

1.$1+2+3+4+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

2.$1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3.裂项求和常用的三种变形

(1)$\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$.

(2)$\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$.

(3)$\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

4.在应用错位相减法求和时，若等比数列的公比为参数，应分公比等于 1 和不等于 1 两种情况求解.

***五、数学归纳法**

一般地，证明一个与正整数 n 有关的命题，可按下列步骤进行：

(1)(归纳奠基)证明当 $n=$_n_0__($n_0\in\mathbf{N}^*$)时命题成立；

(2)(归纳递推)以“当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*，k\geqslant n_0)$时命题成立”为条件，推出“当 $n=$_$k+1$__时命题也成立”.

只要完成这两个步骤，就可以断定命题对从 n_0 开始的所有正整数 n 都成立，这种证明方法称为数学归纳法.

想一想：用数学归纳法证明命题的关键是什么？

提示：步骤(2)是用数学归纳法证明命题的关键．归纳假设“当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*，k\geqslant n_0)$时命题成立”起着已知的作用，证明“当 $n=k+1$ 时命题也成立”的过程中，必须用到归纳假设，再根据有关的定理、定义、公式、性质等推证出当 $n=k+1$ 时命题也成立．而不能直接将 $n=k+1$ 代入归纳假设，此时 $n=k+1$ 时命题成立也是假设，命题并没有得证。

重要题型

题型一 数列的概念与简单表示法

【例题】

1．下列说法中正确的是（　）

A．如果一个数列不是递增数列，那么它一定是递减数列

B．数列 1，0，-1，-2 与 -2，-1，0，1 是相同的数列

C．数列$\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$的第 k 项为$1+\dfrac{1}{k}$

D．数列 0，2，4，6，$\cdots$可记为$\{2n\}$

【答案】C

【分析】对 A，考虑常数数列；对 B，数列的项是有顺序的；对 C，$n=k$代入，可判断；对 D，考虑第一项能不能表示.

【解析】对 A，数列可为常数数列，A 错误；

对 B，一个递减，一个递增，不是相同数列，B 错误；

对 C，当$n=k$时，$a_k=\dfrac{k+1}{k}=1+\dfrac{1}{k}$，C 正确；

对 D，数列中的第一项不能用$a_n=2n$表示，D 错误.

故选：C

巩固训练：

2．已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=n^3,\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，则$a_5+a_6+a_7+a_8=$________.

【答案】448

【分析】直接利用S_8-S_4计算即可.

【解析】由题意可知$a_5+a_6+a_7+a_8=S_8-S_4=8^3-4^3=448$.

故答案为：448

3．已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=3^n+a$，若数列$\{a_n\}$为等比数列，则$a=$_____.

【答案】-1

【分析】根据题干给的关系式，求a_1,a_2,a_3，再结合等比数列的性质，列式求解.

【解析】根据题意，等比数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=3^n+a$，

则$a_1=3^1+a=3+a$，$a_2=S_2-S_1=\left(3^2+a\right)-\left(3+a\right)=6$，$a_3=S_3-S_2=\left(3^3+a\right)-\left(3^2+a\right)=18$，

则有$(3+a)\times 18=36$，解得$a=-1$，

故答案为：-1.

4．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=5a_n+4$，则$\{a_n\}$的通项公式$a_n=$_____.

【答案】$2\times 5^{n-1}-1$

【分析】构造等比数列$\{a_n+1\}$，再求通项即可.

【解析】由$a_{n+1}=5a_n+4$得，$a_{n+1}+1=5(a_n+1)$，

又 $a_1=1$，则 $a_1+1=2\neq 0$，由此 $a_n+1\neq 0$，

则 $\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=5$，所以数列 $\{a_n+1\}$ 是以 2 为首项，5 为公比的等比数列.

故 $a_n+1=2\times 5^{n-1}$，$a_n=2\times 5^{n-1}-1$.

故答案为：$2\times 5^{n-1}-1$.

5．在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=-\dfrac{1}{4}$，$a_n\cdot a_{n-1}=a_{n-1}-1$（$n\geq 2$），则 $a_{2023}=$______.

【答案】$-\dfrac{1}{4}$/$\dfrac{-1}{4}$

【分析】由 a_1 和数列的递推公式，计算 a_2,a_3,a_4，得到数列的周期，可求 a_{2023}.

【解析】由 $a_n\cdot a_{n-1}=a_{n-1}-1$（$n\geq 2$），得 $a_n=1-\dfrac{1}{a_{n-1}}$（$n\geq 2$），

又 $a_1=-\dfrac{1}{4}$，得 $a_2=1-\dfrac{1}{a_1}=5$，$a_3=1-\dfrac{1}{a_2}=\dfrac{4}{5}$，$a_4=1-\dfrac{1}{a_3}=-\dfrac{1}{4}=a_1$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 3 为周期的数列，得 $a_{2023}=a_{674\times 3+1}=a_1=-\dfrac{1}{4}$.

故答案为：$-\dfrac{1}{4}$

题型二 等差数列

【例题】

6．等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3+a_7=37$，则 $a_2+a_8=$______.

【答案】37

【分析】根据等差数列的性质直接得出结果.

【解析】因为数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，$a_3+a_7=37$，

所以 $a_2+a_8=a_3+a_7=37$.

故答案为：37

巩固训练：

7．$3-2\sqrt{2}$ 与 $3+2\sqrt{2}$ 的等差中项为______.

【答案】3

【分析】根据等差中项的定义求解.

【解析】$3-2\sqrt{2}$ 与 $3+2\sqrt{2}$ 的等差中项为 $\dfrac{3-2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2}}{2}=3$.

故答案为：3.

8．在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=-10$，且 $2a_{n+1}-2a_n=1\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，则 $a_{51}=$_________.

【答案】15

【分析】由$2a_{n+1}-2a_n=1\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$可证明数列$\{a_n\}$是等差数列，利用通项公式可得$a_{51}=15$.

【解析】将$2a_{n+1}-2a_n=1$同时除以2，得出$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}$，

即数列$\{a_n\}$是以$a_1=-10$为首项，公差$d=\frac{1}{2}$的等差数列，

则$a_{51}=a_1+(51-1)d=-10+50\times\frac{1}{2}=15$.

故答案为：15

9．在等差数列$\{a_n\}$中，若a_7和a_{16}是方程$x^2-80x+m=0$的两个根，则数列$\{a_n\}$的前22项的和S_{22}等于 __.

【答案】880

【分析】直接利用一元二次方程根和系数的关系及等差数列的性质求出结果.

【解析】由于等差数列$\{a_n\}$中，若a_7和a_{16}是方程$x^2-80x+m=0$的两个根，

所以，$a_7+a_{16}=a_1+a_{22}=80$，

所以$S_{22}=\frac{22(a_1+a_{22})}{2}=11\times80=880$.

故答案为：880.

10．等差数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=5$，且在前n项和S_n中，仅当$n=10$时，S_{10}最大，则公差d的取值范围为__________.

【答案】$\left(-\frac{5}{9},-\frac{1}{2}\right)$

【分析】首先写成等差数列前n项和的函数解析式，再利用二次函数的对称轴的范围，即可求解.

【解析】$\{a_n\}$为等差数列，且$a_1=5$，

则前n项和$S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(5-\frac{d}{2}\right)n$，是关于$n$的二次函数，且$n\in\mathrm{N}^*$，

因为仅当$n=10$时，S_{10}最大，所以对称轴在区间$\left(\frac{19}{2},\frac{21}{2}\right)$，

即$\frac{19}{2}<\frac{1}{2}-\frac{5}{d}<\frac{21}{2}$，解得：$-\frac{5}{9}<d<-\frac{1}{2}$，

则公差d的取值范围是$\left(-\frac{5}{9},-\frac{1}{2}\right)$.

故答案为：$\left(-\frac{5}{9},-\frac{1}{2}\right)$

题型三 等比数列

【例题】

11．在等比数列$\{a_n\}$中，若$a_1+a_2=2$，$a_3+a_4=4$，则$a_5+a_6=$________.

【答案】8

【分析】根据等比数列的性质直接得出答案即可.

【解析】在等比数列$\{a_n\}$中，a_1+a_2，a_3+a_4，a_5+a_6也成等比数列，

因为$a_1+a_2=2$，$a_3+a_4=4$，

所以$a_5+a_6=8$，

故答案为：8

巩固训练：

12．等比数列$\{a_n\}$的n前项和为S_n，若$\frac{S_3}{S_6}=\frac{8}{9}$，$a_2+a_5=54$，则$a_6=$________.

【答案】3

【分析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，首项为a_1，对公比分类讨论，然后利用等比数列的前n项和公式及通项公式结合已知条件计算即可.

【解析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，首项为a_1，且$q\neq 0$，

若$q=1$，则$\frac{S_3}{S_6}=\frac{1}{2}\neq\frac{8}{9}$，与题设矛盾，所以$q\neq 1$.

$\frac{S_3}{S_6}=\frac{\frac{a_1\left(1-q^3\right)}{1-q}}{\frac{a_1\left(1-q^6\right)}{1-q}}=\frac{1}{1+q^3}=\frac{8}{9}$，解得$q=\frac{1}{2}$，

又因为$a_2+a_5=a_1q+a_1q^4=a_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{16}\right)=\frac{9a_1}{16}=54$，所以$a_1=96$，

所以$a_6=a_1q^5=96\times\frac{1}{32}=3$.

故答案为：3

13．公差不为零的等差数列$\{a_n\}$，$S_6=15$，如果a_2,a_4,a_5成等比数列，求数列$\{a_n\}$的通项____.

【答案】$a_n=6-n$

【分析】根据给定条件，列出方程组求出数列$\{a_n\}$的首项及公差，再求出通项即得.

【解析】设数列$\{a_n\}$的公差为$d(d\neq 0)$，由$S_6=15$，得$6a_1+15d=15$，即$2a_1+5d=5$，

由a_2,a_4,a_5成等比数列，得$(a_1+3d)^2=(a_1+d)(a_1+4d)$，化简整理得$a_1=-5d$，

因此$a_1=5,d=-1$，所以数列$\{a_n\}$的通项为$a_n=5+(n-1)\cdot(-1)=6-n$.

故答案为：$a_n=6-n$

14．已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^n-1$，数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=2n-1$，n为正整数，若数列$\{b_n\}$中去掉$\{a_n\}$的项后，余下的项按原顺序组成数列$\{c_n\}$，则$c_1+c_2+\cdots+c_{2024}=$_____.

【答案】4137142

【分析】分析可知，数列$\{c_n\}$的前2024项由数列$\{b_n\}$的前2035项剔除数列$\{a_n\}$的前11项后得到，利用等比数列和等差数列的求和公式可求得$c_1+c_2+\cdots+c_{2024}$的值.

【解析】因为$b_{2024}=2\times2024-1=4047$，令$a_n=2^n-1\le4047$，可得$2^n\le4048$，

因为$2^{11}=2048<4048<2^{12}=4096$，则$n\le11$，

又因为$b_{2035}=2\times2035-1=4069<2^{12}-1=4095=a_{12}$，

所以，数列$\{c_n\}$的前2024项由数列$\{b_n\}$的前2035项剔除数列$\{a_n\}$的前11项后得到，

所以，$c_1+c_2+\cdots+c_{2024}=\dfrac{(1+2\times2035-1)\times2035}{2}-\left(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{11}-11\right)$

$=2035^2-\dfrac{2\left(1-2^{11}\right)}{1-2}+11=4137142$.

故答案为：4137142.

15．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$\{a_n\}$不是常数列，其中正确命题的个数为_____.

①若数列$\{a_n\}$为等差数列，则$\{2^{a_n}\}$为等比数列；

②若数列$\{a_n\}$为等差数列，$S_n>0$恒成立，则$\{a_n\}$是严格增数列；

③若数列$\{a_n\}$为等比数列，则$S_{2023}\cdot a_{2023}>0$恒成立；

④若数列$\{a_n\}$为等差数列，$a_1>0$，$S_6=S_{11}$，则S_n的最大值在n为8或9时取到.

【答案】4

【分析】定义法求出$\dfrac{2^{a_{n+1}}}{2^{a_n}}=2^d$，即可说明①；反证法，证明$d<0$不成立，即可说明②；设等比数列公比为$q$，则$q\ne1$，求解$S_{2023}\cdot a_{2023}$，讨论$q$确定其符号，即可判断③；根据等差数列的性质可得，$a_9=0$，进而结合已知可得$d<0$．即可得出$a_n$的符号，进而判断④.

【解析】对于①，设等差数列$\{a_n\}$公差为d，则$a_{n+1}-a_n=d$，

则$\frac{2^{a_{n+1}}}{2^{a_n}}=2^{a_{n+1}-a_n}=2^d$是个常数，所以$\left\{2^{a_n}\right\}$为等比数列，故①正确；

对于②，假设公差$d<0$，已知$S_n>0$恒成立，显然有$a_1>0$．

有$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=n(a_1+\frac{n-1}{2}d)$，

则当$n\geq\frac{-2a_1}{d}+1$时，有$n-1\geq\frac{-2a_1}{d}$，即$a_1+\frac{n-1}{2}d\leq 0$，

有$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=n(a_1+\frac{n-1}{2}d)\leq n(a_1+\frac{1}{2}\times\frac{-2a_1}{d}\times d)=0$，

与已知$S_n>0$恒成立，矛盾，所以，假设不成立，所以$d>0$．

所以$\{a_n\}$是严格增数列，故②正确；

对于③，数列$\{a_n\}$为等比数列，设等比数列公比为q，则$q\neq 1$，

所以$S_{2023}\cdot a_{2023}=\frac{a_1(1-q^{2023})}{1-q}\cdot a_1\cdot q^{2022}=a_1^2\cdot q^{2022}\cdot\frac{1-q^{2023}}{1-q}$，

当$q<0$时，有$q^{2023}<0$，所以$1-q^{2023}>0,1-q>0$，则$S_{2023}\cdot a_{2023}>0$，

当$0<q<1$时，有$0<q^{2023}<1$，所以$1-q^{2023}>0,1-q>0$，则$S_{2023}\cdot a_{2023}>0$，

当$q>1$时，有$q^{2023}>1$，所以$1-q^{2023}<0,1-q<0$，则$S_{2023}\cdot a_{2023}>0$，

则$S_{2023}\cdot a_{2023}>0$恒成立，故③正确；

对于④，数列$\{a_n\}$为等差数列，由$S_6=S_{11}$可得，$a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}=5a_9=0$，所以$a_9=0$．

又$a_1>0$，所以$d<0$，

且当$1\leq n\leq 8$时，$a_n>0$；当$n\geqslant 10$时，$a_n<0$．

所以，S_n的最大值在n为8或9时取到，故④正确．

综上可得正确命题的个数为4个.

故答案为：4．

题型四 数列求和

【例题】.

16．已知数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n，且$a_1=1$，$a_{n+1}=3S_n$（n为正整数），则$S_6=$________.

【答案】1024