

新疆维吾尔自治区阿克苏地区阿克苏市高级中学 2024 届高三数学第一学期期末教学质量检测试题

考生须知：

1. 全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
2. 请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
3. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 关于函数 $f(x) = |\cos x| + \cos |2x|$ ，有下列三个结论：① π 是 $f(x)$ 的一个周期；② $f(x)$ 在 $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ 上单调递增；

③ $f(x)$ 的值域为 $[-2, 2]$ 。则上述结论中，正确的个数为 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

2. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，球 O_1 同时与以 A 为公共顶点的三个面相切，球 O_2 同时与以 C_1 为公共顶点的三个面相切，且两球相切于点 F 。若以 F 为焦点， AB_1 为准线的抛物线经过 O_1, O_2 ，设球 O_1, O_2 的半径分别为 r_1, r_2 ，则

$$\frac{r_1}{r_2} = (\quad)$$

- A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ B. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ C. $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $2-\sqrt{3}$

3. 已知复数 $z = (1+i)(3-i)$ (i 为虚数单位)，则 z 的虚部为 ()

- A. 2 B. $2i$ C. 4 D. $4i$

4. 设复数 z 满足 $(1+i)z = 1-7i$ ，则 z 在复平面内的对应点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列， S_n 为其前 n 项和， $4+a_5=a_6+a_{10}$ ，则 $S_{21} = (\quad)$

- A. 7 B. 14 C. 28 D. 84

6. 已知 P 为圆 $C: (x-5)^2 + y^2 = 36$ 上任意一点， $A(-5, 0)$ ，若线段 PA 的垂直平分线交直线 PC 于点 Q ，则 Q 点的轨迹方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ B. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

C. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \quad (x < 0)$

D. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \quad (x > 0)$

7. 已知某口袋中有 3 个白球和 a 个黑球 ($a \in N^*$), 现从中随机取出一球, 再换回一个不同颜色的球 (即若取出的是白球, 则放回一个黑球; 若取出的是黑球, 则放回一个白球), 记换好球后袋中白球的个数是 ξ . 若 $E\xi = 3$, 则 $D\xi =$ ()

A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

8. 函数 $y = \sqrt{4-x^2}$ 的定义域为 A , 集合 $B = \{x | \log_2(x+1) > 1\}$, 则 $A \cap B =$ ()

A. $\{x | 1 < x \leq 2\}$ B. $\{x | -2 \leq x \leq 2\}$ C. $\{x | -2 < x < 3\}$ D. $\{x | 1 < x < 3\}$

9. 已知集合 $A = \{x \in Z | \frac{3-x}{x+2} \geq 0\}$, $B = \{y \in N | y = x - 1, x \in A\}$, 则 $A \cup B =$ ()

A. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ B. $\{-1, 0, 1, 2\}$ C. $\{0, 1, 2\}$ D. $\{x | -1 \leq x \leq 2\}$

10. “ $b = 2$ ”是“函数 $f(x) = (2b^2 - 3b - 1)x^\alpha$ (α 为常数) 为幂函数”的 ()

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

11. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F , O 为坐标原点, 以 OF 为直径的圆与双曲线 C 的一条渐近线交于点 O 及点 $A(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 则双曲线 C 的方程为 ()

A. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ B. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1$ C. $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ D. $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1$

12. 已知 $\triangle ABC$ 中, $|\overrightarrow{BC}| = 2, \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -2$. 点 P 为 BC 边上的动点, 则 $\overrightarrow{PC} \cdot (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ 的最小值为 ()

A. 2 B. $-\frac{3}{4}$ C. -2 D. $-\frac{25}{12}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 若 x, y 均为正数, 且 $x + y = xy$, 则 $x + y$ 的最小值为_____.

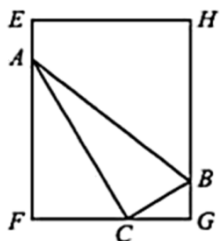
14. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两个焦点为 $F_1(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, $F_2(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, 点 P 是第一象限内双曲线上的点, 且 $\tan \angle PF_1F_2 = \frac{1}{2}$, $\tan \angle PF_2F_1 = -2$, 则双曲线的离心率为_____.

15. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 4$, 直线 l 与圆 O 交于 P, Q 两点, $A(2, 2)$, 若 $AP^2 + AQ^2 = 40$, 则弦 PQ 的长度的最大值为_____.

16. 曲线 $y = \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) \ln x$ 在 $(1, 0)$ 处的切线方程是_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 如图, $EFGH$ 是矩形, $\triangle ABC$ 的顶点 C 在边 FG 上, 点 A, B 分别是 EF, GH 上的动点 (EF 的长度满足需求). 设 $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$, 且满足 $\sin \alpha + \sin \beta = \sin \gamma(\cos \alpha + \cos \beta)$.



(1) 求 γ ;

(2) 若 $FC = 5$, $CG = 3$, 求 $\frac{5}{AC} + \frac{3}{BC}$ 的最大值.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x(x-1) - \frac{1}{2}e^a x^2$, $a < 0$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 求函数 $f(x)$ 的极小值;

(3) 求函数 $f(x)$ 的零点个数.

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 满足下列 3 个条件中的 2 个条件:

① 函数 $f(x)$ 的周期为 π ;

② $x = \frac{\pi}{6}$ 是函数 $f(x)$ 的对称轴;

③ $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ 且在区间 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调.

(I) 请指出这二个条件, 并求出函数 $f(x)$ 的解析式;

(II) 若 $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, 求函数 $f(x)$ 的值域.

20. (12 分) $f(x) = \ln x - ax$ 有最大值, 且最大值大于 0.

(1) 求 a 的取值范围;

(2) 当 $a = \frac{1}{3}$ 时, $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 证明: $x_1^2 x_2 < 30$.

(参考数据: $\ln 0.9 \approx -0.1$)

21. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的短轴长为 2, 直线 l 与椭圆 C 相交

于 A, B 两点, 线段 AB 的中点为 M . 当 M 与 O 连线的斜率为 $-\frac{1}{2}$ 时, 直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 若 $|AB| = 2$, P 是以 AB 为直径的圆上的任意一点, 求证: $|OP| \leq \sqrt{3}$

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = a \ln(1+x)$, $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax$, $h(x) = e^x - 1$.

(1) 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \leq h(x)$ 恒成立, 求 a 的取值范围;

(2) 当 $x < 0$ 时, 研究函数 $F(x) = h(x) - g(x)$ 的零点个数;

(3) 求证: $\frac{1095}{1000} < \sqrt[10]{e} < \frac{3000}{2699}$ (参考数据: $\ln 1.1 \approx 0.0953$).

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

利用三角函数的性质, 逐个判断即可求出。

【详解】

①因为 $f(x) = f(x + \pi)$, 所以 π 是 $f(x)$ 的一个周期, ①正确;

②因为 $f(\pi) = 2$, $f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} < 2$, 所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ 上不单调递增, ②错误;

③因为 $f(-x) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数, 又 π 是 $f(x)$ 的一个周期, 所以可以只考虑 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $f(x)$ 的值

域。当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $t = \cos x \in [0, 1]$,

$$f(x) = |\cos x| + \cos |2x| = \cos x + \cos 2x = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 2t^2 + t - 1$$

$y = 2t^2 + t - 1$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增，所以 $f(x) \in [-1, 2]$ ， $f(x)$ 的值域为 $[-1, 2]$ ，③错误；

综上，正确的个数只有一个，故选 B.

【点睛】

本题主要考查三角函数的性质应用.

2、D

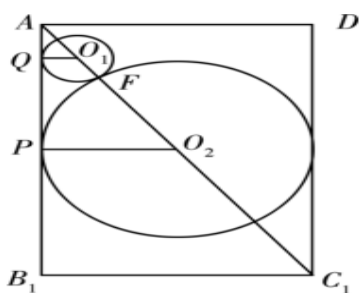
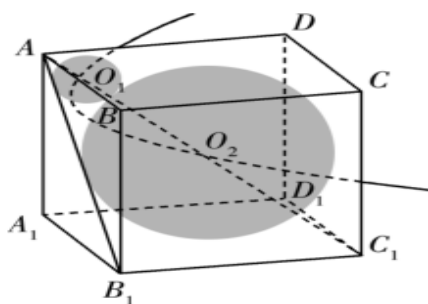
【解析】

由题先画出立体图，再画出平面 AB_1C_1D 处的截面图，由抛物线第一定义可知，点 O_2 到点 F 的距离即半径 r_2 ，也即点 O_2 到面 CDD_1C_1 的距离，点 O_2 到直线 AB_1 的距离即点 O_2 到面 ABB_1A_1 的距离因此球 O_2 内切于正方体，设 $r_2 = 1$ ，两球球心和公切点都在体对角线 AC_1 上，通过几何关系可转化出 r_1 ，进而求解

【详解】

根据抛物线的定义，点 O_2 到点 F 的距离与到直线 AB_1 的距离相等，其中点 O_2 到点 F 的距离即半径 r_2 ，也即点 O_2 到面 CDD_1C_1 的距离，点 O_2 到直线 AB_1 的距离即点 O_2 到面 ABB_1A_1 的距离，因此球 O_2 内切于正方体，不妨设 $r_2 = 1$ ，两个球心 O_1 ， O_2 和两球的切点 F 均在体对角线 AC_1 上，两个球在平面 AB_1C_1D 处的截面如图所示，则

$O_2F = r_2 = 1$ ， $AO_2 = \frac{AC_1}{2} = \sqrt{3}$ ，所以 $AF = AO_2 - O_2F = \sqrt{3} - 1$. 又因为 $AF = AO_1 + O_1F = \sqrt{3}r_1 + r_1$ ，因此 $(\sqrt{3} + 1)r_1 = \sqrt{3} - 1$ ，得 $r_1 = 2 - \sqrt{3}$ ，所以 $\frac{r_1}{r_2} = 2 - \sqrt{3}$.



故选：D

【点睛】

本题考查立体图与平面图的转化，抛物线几何性质的使用，内切球的性质，数形结合思想，转化思想，直观想象与数学运算的核心素养

3、A

【解析】

对复数 z 进行乘法运算，并计算得到 $z = 4 + 2i$ ，从而得到虚部为 2.

【详解】

因为 $z = (1+i)(3-i) = 4+2i$ ，所以 z 的虚部为 2.

【点睛】

本题考查复数的四则运算及虚部的概念，计算过程要注意 $i^2 = -1$.

4、C

【解析】

化简得到 $z = -3-4i$ ，得到答案.

【详解】

$$(1+i)z = 1-7i, \text{ 故 } z = \frac{1-7i}{1+i} = \frac{(1-7i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-6-8i}{2} = -3-4i, \text{ 对应点在第三象限.}$$

故选：C.

【点睛】

本题考查了复数的化简和对应象限，意在考查学生的计算能力.

5、D

【解析】

利用等差数列的通项公式，可求解得到 $a_{11} = 4$ ，利用求和公式和等差中项的性质，即得解

【详解】

$$4 + a_5 = a_6 + a_{10},$$

$$\therefore 4 + a_{11} - 6d = a_{11} - 5d + a_{11} - d$$

解得 $a_{11} = 4$.

$$\therefore S_{21} = \frac{21(a_1 + a_{21})}{2} = 21a_{11} = 84.$$

故选：D

【点睛】

本题考查了等差数列的通项公式、求和公式和等差中项，考查了学生综合分析，转化划归，数学运算的能力，属于中档题.

6、B

【解析】

如图所示：连接 QA ，根据垂直平分线知 $QA = QP$ ， $||QC| - |QA|| = 6 < 10$ ，故轨迹为双曲线，计算得到答案.

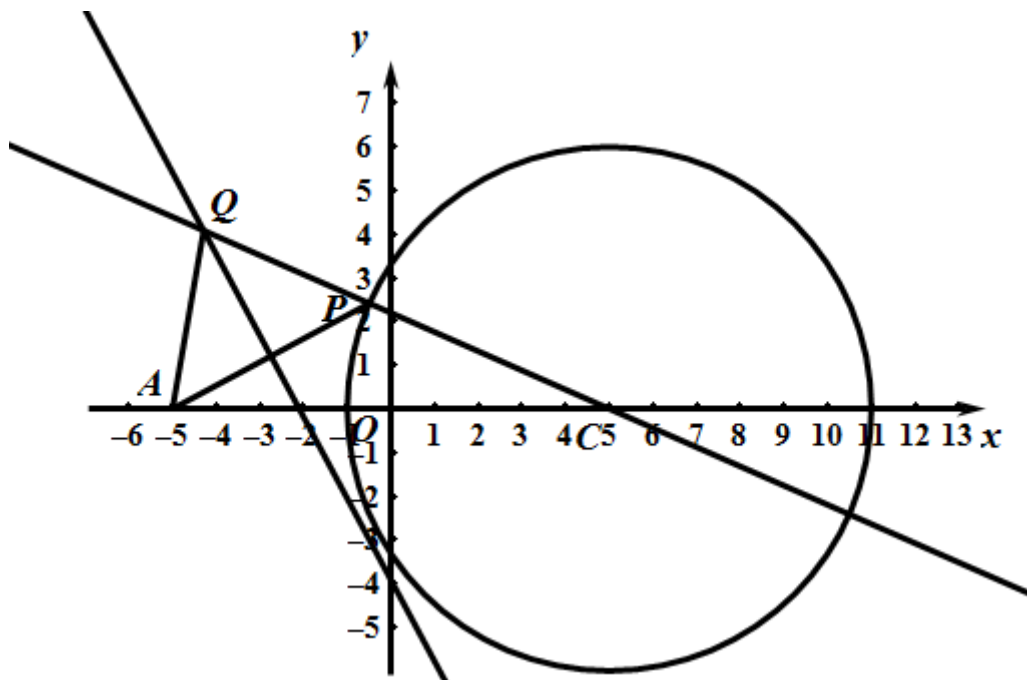
【详解】

如图所示：连接 QA ，根据垂直平分线知 $QA = QP$ ，

故 $||QC| - |QA|| = ||QC| - |QP|| = |PC| = 6 < 10$ ，故轨迹为双曲线，

$2a = 6$ ， $a = 3$ ， $c = 5$ ，故 $b = 4$ ，故轨迹方程为 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 。

故选：B。



【点睛】

本题考查了轨迹方程，确定轨迹方程为双曲线是解题的关键。

7、B

【解析】

由题意 $\xi = 2$ 或 4 ，则 $D\xi = \frac{1}{2}[(2-3)^2 + (4-3)^2] = 1$ ，故选 B。

8、A

【解析】

根据函数定义域得集合 A ，解对数不等式得到集合 B ，然后直接利用交集运算求解。

【详解】

解：由函数 $y = \sqrt{4-x^2}$ 得 $4-x^2 \geq 0$ ，解得 $-2 \leq x \leq 2$ ，即 $A = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$ ；

又 $\log_2(x+1) > 1 = \log_2 2$ ，解得 $x > 1$ ，即 $B = \{x | x > 1\}$ ，

则 $A \cap B = \{x | 1 < x \leq 2\}$ 。

故选：A。

【点睛】

本题考查了交集及其运算，考查了函数定义域的求法，是基础题.

9、A

【解析】

解出集合 A 和 B 即可求得两个集合的并集.

【详解】

$$\because \text{集合 } A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{3-x}{x+2} \geq 0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x \leq 3\} = \{-1, 0, 1, 2, 3\},$$

$$B = \{y \in \mathbb{N} \mid y = x - 1, x \in A\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\},$$

$$\therefore A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}.$$

故选：A.

【点睛】

此题考查求集合的并集，关键在于准确求解不等式，根据描述法表示的集合，准确写出集合中的元素.

10、A

【解析】

根据幂函数定义，求得 b 的值，结合充分条件与必要条件的概念即可判断.

【详解】

$$\because \text{当函数 } f(x) = (2b^2 - 3b - 1)x^a \text{ 为幂函数时, } 2b^2 - 3b - 1 = 1,$$

$$\text{解得 } b = 2 \text{ 或 } -\frac{1}{2},$$

$$\therefore "b = 2" \text{ 是 "函数 } f(x) = (2b^2 - 3b - 1)x^a \text{ 为幂函数" 的充分不必要条件.}$$

故选：A.

【点睛】

本题考查了充分必要条件的概念和判断，幂函数定义的应用，属于基础题.

11、C

【解析】

根据双曲线方程求出渐近线方程： $y = \frac{b}{a}x$ ，再将点 $A\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 代入可得 $b = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ ，连接 FA ，根据圆的性质可得

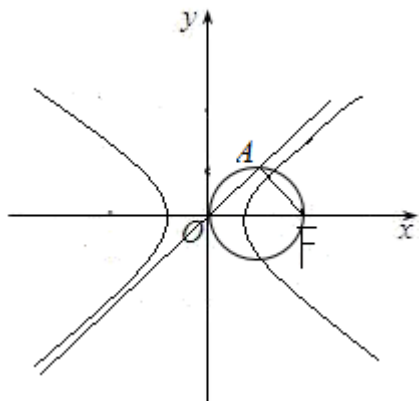
$$\frac{\sqrt{c^2 - 3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 从而可求出 } c, \text{ 再由 } c^2 = a^2 + b^2 \text{ 即可求解.}$$

【详解】

由双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$,

则渐近线方程: $y = \pm \frac{b}{a}x$,

$$\therefore b = \frac{\sqrt{3}}{3}a,$$



连接 FA , 则 $\frac{|FA|}{|AO|} = \frac{\sqrt{c^2 - 3}}{\sqrt{3}} = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 解得 $c = 2$,

所以 $c^2 = a^2 + b^2 = 4$, 解得 $a^2 = 3, b^2 = 1$.

故双曲线方程为 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$.

故选: C

【点睛】

本题考查了双曲线的几何性质, 需掌握双曲线的渐近线求法, 属于中档题.

12、D

【解析】

以 BC 的中点为坐标原点, 建立直角坐标系, 可得 $B(-1, 0), C(1, 0)$, 设 $P(a, 0), A(x, y)$, 运用向量的坐标表示, 求得点 A 的轨迹, 进而得到关于 a 的二次函数, 可得最小值.

【详解】

以 BC 的中点为坐标原点, 建立如图的直角坐标系,

可得 $B(-1, 0), C(1, 0)$, 设 $P(a, 0), A(x, y)$,

由 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -2$,

可得 $(x+1, y) \cdot (2, 0) = 2x+2 = -2$, 即 $x = -2, y \neq 0$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/728072053007006051>