

福建省建瓯市二中 2023-2024 学年高三第二次联考数学试卷

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 复数 $(a-i)(2-i)$ 的实部与虚部相等，其中 i 为虚部单位，则实数 $a=(\quad)$

- A. 3 B. $-\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. -1

2. 已知集合 $A=\{x|x^2-2x-3\leq 0\}$ $B=\{x|x<2\}$ ，则 $A\cap B=(\quad)$

- A. $(1,3)$ B. $(1,3]$ C. $[-1,2)$ D. $(-1,2)$

3. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 内有一条以点 $P\left(1,\frac{1}{3}\right)$ 为中点的弦 AB ，则直线 AB 的方程为 $(\quad)$

- A. $3x-3y-2=0$ B. $3x-3y+2=0$
C. $3x+3y-4=0$ D. $3x+3y+4=0$

4. 若实数 x,y 满足的约束条件 $\begin{cases} y\geq 0 \\ x+y-3\leq 0 \\ 2x-y\geq 0 \end{cases}$ ，则 $z=2x+y$ 的取值范围是 $(\quad)$

- A. $[4,+\infty)$ B. $[0,6]$ C. $[0,4]$ D. $[6,+\infty)$

5. 若变量 x,y ，满足 $\begin{cases} x+y\leq 2 \\ 2x-3y\leq 9 \\ x\geq 0 \end{cases}$ ，则 x^2+y^2 的最大值为 $(\quad)$

- A. 3 B. 2 C. $\frac{81}{13}$ D. 10

6. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0, b>0$) 的焦距为 8，一条渐近线方程为 $y=\sqrt{3}x$ ，则 C 为 $(\quad)$

- A. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ B. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$

- C. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{48}=1$ D. $\frac{x^2}{48}-\frac{y^2}{16}=1$

7. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F , O 为坐标原点, 以 OF 为直径的圆与双曲线 C 的一条渐近线交于点 O 及点 $A\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 则双曲线 C 的方程为 ()

- A. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ B. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1$ C. $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ D. $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1$

8. 已知 AB 是过抛物线 $y^2 = 4x$ 焦点 F 的弦, O 是原点, 则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} =$ ()

- A. -2 B. -4 C. 3 D. -3

9. 已知函数 $f(x) = m^x - m (m > 0, \text{且 } m \neq 1)$ 的图象经过第一、二、四象限, 则 $a = |f(\sqrt{2})|$, $b = \left| f\left(4^{\frac{3}{8}}\right) \right|$, $c = |f(0)|$ 的大小关系为 ()

- A. $c < b < a$ B. $c < a < b$
C. $a < b < c$ D. $b < a < c$

10. 已知集合 $M = \{x | -4 < x < 2\}$, $N = \{x | x^2 - x - 6 < 0\}$, 则 $M \cap N =$

- A. $\{x | -4 < x < 3\}$ B. $\{x | -4 < x < -2\}$ C. $\{x | -2 < x < 2\}$ D. $\{x | 2 < x < 3\}$

11. 若复数 z 满足 $(1+3i)z = (1+i)^2$, 则 $|z| =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

12. 设命题 $P: \forall a, b \in R, |a-b| < |a| + |b|$, 则 $\neg P$ 为

- A. $\forall a, b \in R, |a-b| \geq |a| + |b|$ B. $\exists a, b \in R, |a-b| < |a| + |b|$
C. $\exists a, b \in R, |a-b| > |a| + |b|$ D. $\exists a, b \in R, |a-b| \geq |a| + |b|$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2$, $B = \frac{\pi}{4}$, $C = \frac{\pi}{6}$, 点 P 是边 BC 的中点, 则 $AC =$ _____, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} =$ _____.

14. 若存在实数 k, b 使得不等式 $f(x) \leq kx + b \leq g(x)$ 在某区间上恒成立, 则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为该区间上的一对“分离函数”, 下列各组函数中是对应区间上的“分离函数”的有 _____ (填上所有正确答案的序号)

- ① $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \tan x$;

② $x \in [1, +\infty)$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$;

③ $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = e^x + e^{-x}$;

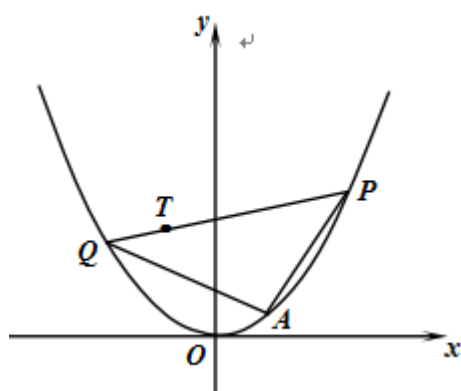
④ $x \in (0, +\infty)$, $f(x) = x - \frac{1}{x}$, $g(x) = 2x \ln x$.

15. 已知关于 x 的方程 $a|\sin x| + \frac{1}{2} = \sin x$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上恰有两个解, 则实数 a 的取值范围是_____

16. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, S_n 是它的前 n 项和. 若 $a_2 a_3 = 2a_1$, 且 a_4 与 $2a_7$ 的等差中项为 $\frac{3}{4}$, 则 $S_5 =$ _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

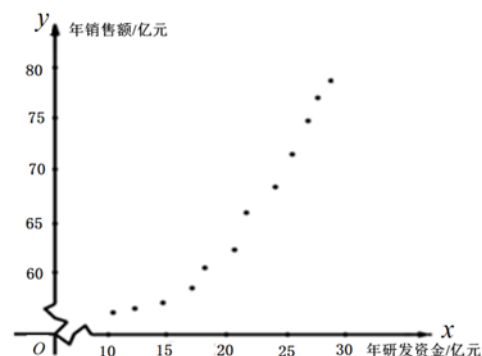
17. (12 分) 已知三点 P, Q, A 在抛物线 $\Gamma: x^2 = 4y$ 上.



(I) 当点 A 的坐标为 $(2, 1)$ 时, 若直线 PQ 过点 $T(-2, 4)$, 求此时直线 AP 与直线 AQ 的斜率之积;

(II) 当 $AP \perp AQ$, 且 $|AP| = |AQ|$ 时, 求 $\triangle APQ$ 面积的最小值.

18. (12 分) 某芯片公司为制定下一年的研发投入计划, 需了解年研发资金投入量 x (单位: 亿元) 对年销售额 y (单位: 亿元) 的影响. 该公司对历史数据进行对比分析, 建立了两个函数模型: ① $y = a + bx^2$, ② $y = e^{ax+b}$, 其中 a, b, c, d 均为常数, e 为自然对数的底数.



现该公司收集了近 12 年的年研发资金投入量 x_i 和年销售额 y_i 的数据, $i = 1, 2, \dots, 12$, 并对这些数据作了初步处理,

得到了右侧的散点图及一些统计量的值. 令 $z_i = x_i^2$, $w_i = \ln x_i$ ($i = 1, 2, \dots, 12$), 经计算得如下数据:

$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\sum_{i=1}^{12} (x_i - \bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^{12} (y_i - \bar{y})^2$	$\bar{x}$	$\bar{y}$
20	66	770	200	460	4.20
$\sum_{i=1}^{12} (x_i - \bar{x})^2$		$\sum_{i=1}^{12} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$		$\sum_{i=1}^{12} (y_i - \bar{y})^2$	
3125000		21500		0.308	

（1）设 $\{x_i\}$ 和 $\{y_i\}$ 的相关系数为 r_1 ， $\{x_i\}$ 和 $\{z_i\}$ 的相关系数为 r_2 ，请从相关系数的角度，选择一个拟合程度更好的模型；

（2）（i）根据（1）的选择及表中数据，建立 z 关于 x 的回归方程（系数精确到 0.01）；

（ii）若下一年销售额 z 需达到 90 亿元，预测下一年的研发资金投入量 x 是多少亿元？

附：①相关系数

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad a = \bar{y} - b\bar{x};$$

② 参考数据： $308 = 4 \times 77$ ， $\sqrt{90} \approx 9.4868$ ， $e^{4.4998} \approx 90$.

19.（12 分）在世界读书日期间，某地区调查组对居民阅读情况进行了调查，获得了一个容量为 200 的样本，其中城镇居民 140 人，农村居民 60 人.在这些居民中，经常阅读的城镇居民有 100 人，农村居民有 30 人.

（1）填写下面列联表，并判断能否有 99%的把握认为经常阅读与居民居住地有关？

	城镇居民	农村居民	合计
经常阅读	100	30	
不经常阅读			
合计			200

（2）从该地区城镇居民中，随机抽取 5 位居民参加一次阅读交流活动，记这 5 位居民中经常阅读的人数为 X ，若用样本的频率作为概率，求随机变量 X 的期望.

附： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a+b+c+d$ 。

$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

20. (12分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F_1 ，过点 F_1 且与 x 轴垂直的直线被椭圆截得的线段长为 $\sqrt{2}$ ，且 F_1 与短轴两端点的连线相互垂直。

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 若圆 $O: x^2 + y^2 = a^2$ 上存在两点 M, N ，椭圆 C 上存在两个点 P, Q 满足： M, N, F_1 三点共线， P, Q, F_1 三点共线，且 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$ ，求四边形 $PMQN$ 面积的取值范围。

21. (12分) 已知直线 $l_1: y = x + b$ 与抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 切于点 P ，直线 $l_2: 2x - 2my - m + 1 = 0$ 过定点 Q ，且抛物线 C 上的点到点 Q 的距离与其到准线距离之和的最小值为 $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 。

(1) 求抛物线 C 的方程及点 P 的坐标；

(2) 设直线 l_2 与抛物线 C 交于(异于点 P)两个不同的点 A, B ，直线 PA, PB 的斜率分别为 k_1, k_2 ，那么是否存在实数 λ ，使得 $k_1 + k_2 = \lambda$ ？若存在，求出 λ 的值；若不存在，请说明理由。

22. (10分) 已知函数 $f(x) = |2x - 1| + |x + 1|$

(1) 解不等式 $f(x) \geq 3$ ；

(2) 若 a, b, c 均为正实数，且满足 $a + b + c = m$ ， m 为 $f(x)$ 的最小值，求证： $\frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} + \frac{a^2}{c} \geq \frac{3}{2}$ 。

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

利用乘法运算化简复数 $(a-i)(2-i)$ 即可得到答案.

【详解】

由已知， $(a-i)(2-i)=2a-1-(a+2)i$ ，所以 $2a-1=-a-2$ ，解得 $a=-\frac{1}{3}$.

故选：B

【点睛】

本题考查复数的概念及复数的乘法运算，考查学生的基本计算能力，是一道容易题.

2、C

【解析】

解不等式得出集合 A ，根据交集的定义写出 $A \cap B$.

【详解】

集合 $A=\{x|x^2-2x-3 \leq 0\}=\{x|-1 \leq x \leq 3\}$,

$B=\{x|x < 2\}$ ， $\therefore A \cap B=\{x|-1 \leq x < 2\}$

故选 C.

【点睛】

本题考查了解不等式与交集的运算问题，是基础题.

3、C

【解析】

设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，则 $\frac{x_1^2}{3} + y_1^2 = 1$ ， $\frac{x_2^2}{3} + y_2^2 = 1$ ，相减得到 $\frac{2}{3} + \frac{2}{3}k = 0$ ，解得答案.

【详解】

设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，设直线斜率为 k ，则 $\frac{x_1^2}{3} + y_1^2 = 1$ ， $\frac{x_2^2}{3} + y_2^2 = 1$ ，

相减得到： $\frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{3} + (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0$ ， AB 的中点为 $P\left(1, \frac{1}{3}\right)$ ，

即 $\frac{2}{3} + \frac{2}{3}k = 0$ ，故 $k = -1$ ，直线 AB 的方程为： $y = -x + \frac{4}{3}$.

故选：C.

【点睛】

本题考查了椭圆内点差法求直线方程，意在考查学生的计算能力和应用能力.

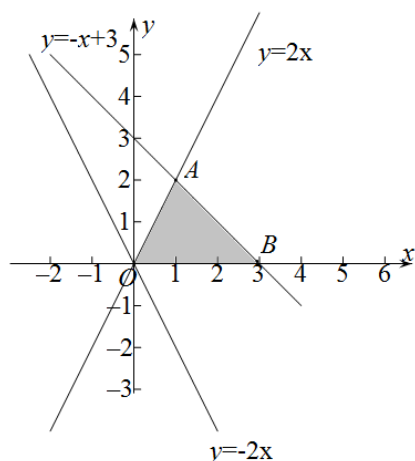
4、B

【解析】

根据所给不等式组，画出不等式表示的可行域，将目标函数化为直线方程，平移后即可确定取值范围.

【详解】

实数 x, y 满足的约束条件 $\begin{cases} y \geq 0 \\ x + y - 3 \leq 0 \\ 2x - y \geq 0 \end{cases}$ ，画出可行域如下图所示：



将线性目标函数 $z = 2x + y$ 化为 $y = -2x + z$ ，

则将 $y = -2x$ 平移，平移后结合图像可知，当经过原点 $O(0,0)$ 时截距最小， $z_{\min} = 0$ ；

当经过 $B(3,0)$ 时，截距最大值， $z_{\max} = 2 \times 3 + 0 = 6$ ，

所以线性目标函数 $z = 2x + y$ 的取值范围为 $[0, 6]$ ，

故选：B.

【点睛】

本题考查了线性规划的简单应用，线性目标函数取值范围的求法，属于基础题.

5、D

【解析】

画出约束条件的可行域，利用目标函数的几何意义求解最大值即可.

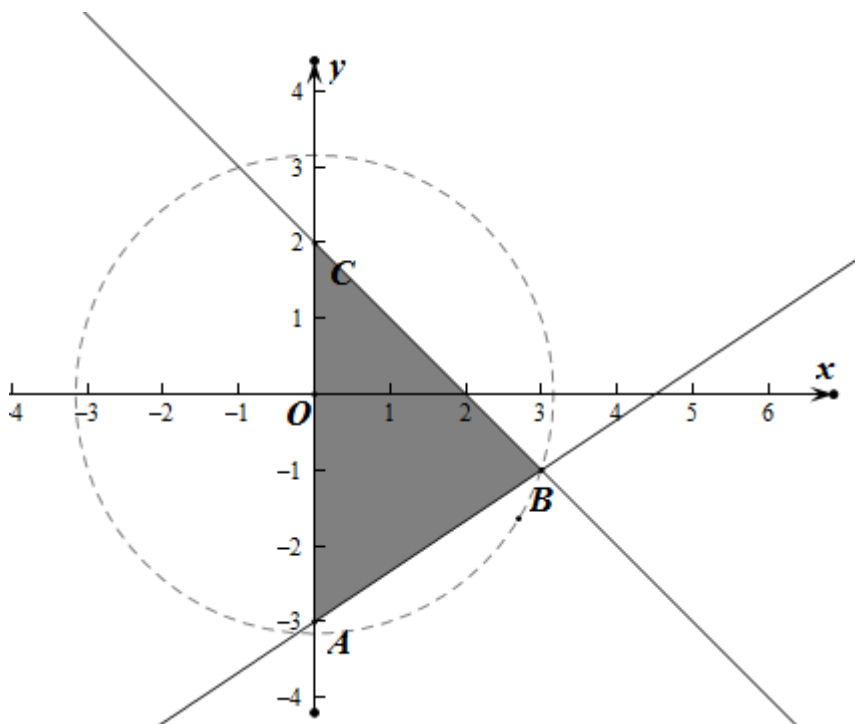
【详解】

解：画出满足条件 $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ 2x - 3y \leq 9 \\ x \geq 0 \end{cases}$ 的平面区域，如图示：

如图点坐标分别为 $A(0, -3), B(3, -1), C(0, 2)$,

目标函数 $x^2 + y^2$ 的几何意义为, 可行域内点 (x, y) 与坐标原点 $(0, 0)$ 的距离的平方, 由图可知 $B(3, -1)$ 到原点的距离最大, 故 $(x^2 + y^2)_{\max} = 3^2 + (-1)^2 = 10$.

故选: D



【点睛】

本题考查了简单的线性规划问题, 考查数形结合思想, 属于中档题.

6、A

【解析】

由题意求得 c 与 $\frac{b}{a}$ 的值, 结合隐含条件列式求得 a^2, b^2 , 则答案可求.

【详解】

由题意, $2c=8$, 则 $c=4$,

又 $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$, 且 $a^2 + b^2 = c^2$,

解得 $a^2=4, b^2=12$.

$\therefore$ 双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

故选: A.

【点睛】

本题考查双曲线的简单性质，属于基础题.

7、C

【解析】

根据双曲线方程求出渐近线方程： $y = \frac{b}{a}x$ ，再将点 $A\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 代入可得 $b = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ ，连接 FA ，根据圆的性质可得

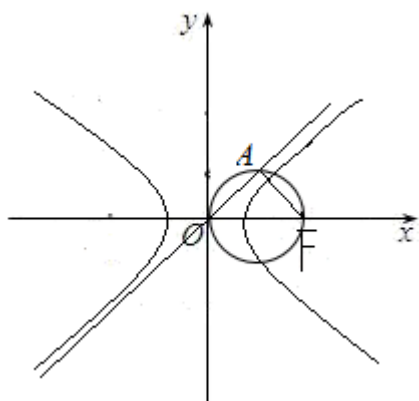
$\frac{\sqrt{c^2-3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，从而可求出 c ，再由 $c^2 = a^2 + b^2$ 即可求解.

【详解】

由双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ，

则渐近线方程： $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，

$$\therefore b = \frac{\sqrt{3}}{3}a,$$



连接 FA ，则 $\frac{|FA|}{|AO|} = \frac{\sqrt{c^2-3}}{\sqrt{3}} = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，解得 $c = 2$ ，

所以 $c^2 = a^2 + b^2 = 4$ ，解得 $a^2 = 3, b^2 = 1$.

故双曲线方程为 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$.

故选：C

【点睛】

本题考查了双曲线的几何性质，需掌握双曲线的渐近线求法，属于中档题.

8、D

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/728116074036006065>