绝密★本科目考试启用前

2024年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

数学

本试卷共12页，150分.考试时长120分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第一部分（选择题　共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合$M=\{x\mid -3<x<1\}$，$N=\{x\mid -1\le x<4\}$，则$M\cup N=$（　　）

A. $\{x\mid -1\le x<1\}$　　B. $\{x\mid x>-3\}$

C. $\{x\mid -3<x<4\}$　　D. $\{x\mid x<4\}$

2. 已知$\dfrac{z}{\mathrm{i}}=-1-\mathrm{i}$，则$z=$（　　）.

A. $-1-\mathrm{i}$　　B. $-1+\mathrm{i}$　　C. $1-\mathrm{i}$　　D. $1+\mathrm{i}$

3. 圆$x^2+y^2-2x+6y=0$的圆心到直线$x-y+2=0$的距离为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. 3　　D. $3\sqrt{2}$

4. 在$\left(x-\sqrt{x}\right)^4$的展开式中，$x^3$的系数为（　　）

A. 6　　B. -6　　C. 12　　D. -12

5. 设$\vec{a}$，$\vec{b}$是向量，则“$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$”是“$\vec{a}=-\vec{b}$或$\vec{a}=\vec{b}$”的（　　）.

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 设函数$f\left(x\right)=\sin\omega x\left(\omega>0\right)$. 已知$f\left(x_1\right)=-1$，$f\left(x_2\right)=1$，且$\left|x_1-x_2\right|$的最小值为$\dfrac{\pi}{2}$，则$\omega=$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

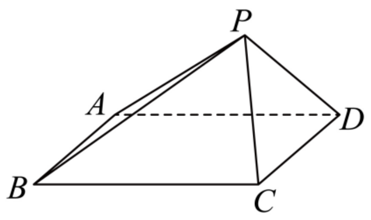
7. 生物丰富度指数 $d=\dfrac{S-1}{\ln N}$是河流水质的一个评价指标，其中S,N分别表示河流中的生物种类数与生物个体总数.生物丰富度指数d越大，水质越好．如果某河流治理前后的生物种类数S

没有变化，生物个体总数由 N_1 变为 N_2，生物丰富度指数由 2.1 提高到 3.15，则（　　）

A. $3N_2=2N_1$　　　　B. $2N_2=3N_1$

C. $N_2^2=N_1^3$　　　　D. $N_2^3=N_1^2$

8. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，$PA=PB=4$，$PC=PD=2\sqrt{2}$，该棱锥的高为（　　）.



A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{3}$

9. 已知 $\left(x_1,y_1\right)$，$\left(x_2,y_2\right)$ 是函数 $y=2^x$ 的图象上两个不同的点，则（　　）

A. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}<\frac{x_1+x_2}{2}$　　　　B. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}>\frac{x_1+x_2}{2}$

C. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}<x_1+x_2$　　　　D. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}>x_1+x_2$

10. 已知 $M=\left\{\left(x,y\right)|\,y=x+t\left(x^2-x\right),1\le x\le 2,0\le t\le 1\right\}$ 是平面直角坐标系中的点集.设 d 是 M 中两点间距离的最大值，S 是 M 表示的图形的面积，则（　　）

A. $d=3$，$S<1$　　　　B. $d=3$，$S>1$

C. $d=\sqrt{10}$，$S<1$　　　　D. $d=\sqrt{10}$，$S>1$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 抛物线 $y^2=16x$ 的焦点坐标为________.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 与角 β 均以 Ox 为始边，它们的终边关于原点对称. 若 $\alpha\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，则 $\cos\beta$ 的最大值为________.

13. 若直线 $y=k\left(x-3\right)$ 与双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 只有一个公共点，则 k 的一个取值为 ________.

14. 汉代刘歆设计的“铜嘉量”

是龠、合、升、斗、斛五量合一的标准量器，其中升量器、斗量器、斛量器的形状均可视为圆柱.若升、斗、斛量器的容积成公比为10的等比数列，底面直径依次为 $65\text{mm},325\text{mm},325\text{mm}$，且斛量器的高为 230mm，则斗量器的高为______mm，升量器的高为________mm.

15. 设$\{a_n\}$与$\{b_n\}$是两个不同的无穷数列，且都不是常数列.记集合$M=\left\{k \mid a_k=b_k,k\in\mathbf{N}^*\right\}$，给出下列4个结论：

①若$\{a_n\}$与$\{b_n\}$均为等差数列，则M中最多有1个元素；

②若$\{a_n\}$与$\{b_n\}$均为等比数列，则M中最多有2个元素；

③若$\{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$为等比数列，则M中最多有3个元素；

④若$\{a_n\}$为递增数列，$\{b_n\}$为递减数列，则M中最多有1个元素.

其中正确结论的序号是______.

三、解答题共6小题，共85分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 在$\triangle ABC$中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c，$\angle A$为钝角，$a=7$，$\sin 2B=\dfrac{\sqrt{3}}{7}b\cos B$.

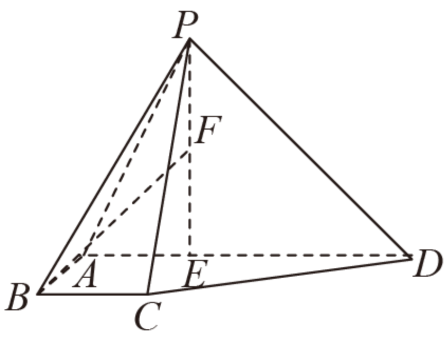
（1）求$\angle A$；

（2）从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使得$\triangle ABC$存在，求$\triangle ABC$的面积.

条件①：$b=7$；条件②：$\cos B=\dfrac{13}{14}$；条件③：$c\sin A=\dfrac{5}{2}\sqrt{3}$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（2）问得0分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

17. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$BC//AD$，$AB=BC=1$，$AD=3$，点E在AD上，且$PE\perp AD$，$PE=DE=2$.



（1）若F为线段PE中点，求证：$BF//$平面PCD.

（2）若$AB\perp$平面PAD，求平面PAB与平面PCD夹角的余弦值.

18. 某保险公司为了了解该公司某种保险产品的索赔情况，从合同险期限届满的保单中随机抽取 1000 份，记录并整理这些保单的索赔情况，获得数据如下表：

赔偿次数	0	1	2	3	4
单数	800	100	60	30	10

假设：一份保单的保费为 0.4 万元；前 3 次索赔时，保险公司每次赔偿 0.8 万元；第四次索赔时，保险公司赔偿 0.6 万元.假设不同保单的索赔次数相互独立.用频率估计概率.

（1）估计一份保单索赔次数不少于 2 的概率；

（2）一份保单的毛利润定义为这份保单的保费与赔偿总金额之差.

（i）记 X 为一份保单的毛利润，估计 X 的数学期望 $E\left(X\right)$；

（ⅱ）如果无索赔的保单的保费减少 4%，有索赔的保单的保费增加 20%，试比较这种情况下一份保单毛利润的数学期望估计值与（i）中 $E\left(X\right)$ 估计值的大小.（结论不要求证明）

19. 已知椭圆 E：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$，以椭圆 E 的焦点和短轴端点为顶点的四边形是边长为 2 的正方形.过点 $\left(0,t\right)\left(t>\sqrt{2}\right)$ 且斜率存在的直线与椭圆 E 交于不同的两点 A,B，过点 A 和 $C\left(0,1\right)$ 的直线 AC 与椭圆 E 的另一个交点为 D.

（1）求椭圆 E 的方程及离心率；

（2）若直线 BD 的斜率为 0，求 t 的值.

20. 设函数 $f\left(x\right)=x+k\ln\left(1+x\right)\left(k\neq 0\right)$，直线 l 是曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(t,f\left(t\right)\right)\left(t>0\right)$ 处的切线.

（1）当 $k=-1$ 时，求 $f\left(x\right)$ 的单调区间.

（2）求证：l 不经过点 $\left(0,0\right)$.

（3）当 $k=1$ 时，设点 $A\left(t,f\left(t\right)\right)\left(t>0\right)$，$C\left(0,f\left(t\right)\right)$，$O\left(0,0\right)$，$B$ 为 l 与 y 轴的交点，$S_{\triangle ACO}$ 与 $S_{\triangle ABO}$ 分别表示 $\triangle ACO$ 与 $\triangle ABO$ 的面积．是否存在点 A 使得 $2S_{\triangle ACO}=15S_{\triangle ABO}$ 成立？若存在，这样的点 A 有几个？

（参考数据：$1.09<\ln 3<1.10$，$1.60<\ln 5<1.61$，$1.94<\ln 7<1.95$）

21. 已知集合 $M=\left\{\left(i,j,k,w\right)\middle|\, i\in\left\{1,2\right\},j\in\left\{3,4\right\},k\in\left\{5,6\right\},w\in\left\{7,8\right\},\text{且}i+j+k+w\text{为偶数}\right\}$．给定数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_8$，和序列 $\Omega:T_1,T_2,\cdots T_s$，其中 $T_t=\left(i_t,j_t,k_t,w_t\right)\in M\left(t=1,2,\cdots,s\right)$，对数列 A

进行如下变换：将 A 的第 i_1, j_1, k_1, w_1 项均加 1，其余项不变，得到的数列记作 $T_1(A)$；将 $T_1(A)$ 的第 i_2, j_2, k_2, w_2 项均加 1，其余项不变，得到数列记作 $T_2T_1(A)$；……；以此类推，得到 $T_s \cdots T_2T_1(A)$，简记为 $\Omega(A)$.

（1）给定数列 $A: 1,3,2,4,6,3,1,9$ 和序列 $\Omega: (1,3,5,7),(2,4,6,8),(1,3,5,7)$，写出 $\Omega(A)$；

（2）是否存在序列 Ω，使得 $\Omega(A)$ 为 $a_1+2, a_2+6, a_3+4, a_4+2, a_5+8, a_6+2, a_7+4, a_8+4$，若存在，写出一个符合条件的 Ω；若不存在，请说明理由；

（3）若数列 A 的各项均为正整数，且 $a_1+a_3+a_5+a_7$ 为偶数，求证：“存在序列 Ω，使得 $\Omega(A)$ 的各项都相等”的充要条件为“$a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6=a_7+a_8$”.

绝密★本科目考试启用前

2024年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

数学

本试卷共12页，150分.考试时长120分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第一部分（选择题　共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合$M=\{x|-3<x<1\}$，$N=\{x|-1\le x<4\}$，则$M\cup N=$（　　）

A. $\{x|-1\le x<1\}$　　B. $\{x|x>-3\}$

C. $\{x|-3<x<4\}$　　D. $\{x|x<4\}$

【答案】C

【解析】

【分析】直接根据并集含义即可得到答案.

【详解】由题意得$M\cup N=\{x|-3<x<4\}$.

故选：C.

2. 已知$\frac{z}{\mathrm{i}}=-1-\mathrm{i}$，则$z=$（　　）.

A. $-1-\mathrm{i}$　　B. $-1+\mathrm{i}$　　C. $1-\mathrm{i}$　　D. $1+\mathrm{i}$

【答案】C

【解析】

【分析】直接根据复数乘法即可得到答案.

【详解】由题意得$z=\mathrm{i}(-1-\mathrm{i})=1-\mathrm{i}$.

故选：C

3. 圆$x^2+y^2-2x+6y=0$的圆心到直线$x-y+2=0$的距离为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. 3　　D. $3\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】求出圆心坐标，再利用点到直线距离公式即可.

【详解】由题意得 $x^2+y^2-2x+6y=0$，即 $(x-1)^2+(y+3)^2=10$，

则其圆心坐标为 $(1,-3)$，则圆心到直线 $x-y+2=0$ 的距离为 $\dfrac{|1-(-3)+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}$.

故选：D.

4. 在 $\left(x-\sqrt{x}\right)^4$ 的展开式中，x^3 的系数为（　　）

A. 6　　B. -6　　C. 12　　D. -12

【答案】A

【解析】

【分析】写出二项展开式，令 $4-\dfrac{r}{2}=3$，解出 r 然后回代入二项展开式系数即可得解.

【详解】$\left(x-\sqrt{x}\right)^4$ 的二项展开式为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_4^r x^{4-r}\left(-\sqrt{x}\right)^r=\mathrm{C}_4^r(-1)^r x^{4-\frac{r}{2}},(r=0,1,2,3,4)$，

令 $4-\dfrac{r}{2}=3$，解得 $r=2$，

故所求即为 $\mathrm{C}_4^2(-1)^2=6$.

故选：A.

5. 设 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 是向量，则“$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$”是“$\vec{a}=-\vec{b}$ 或 $\vec{a}=\vec{b}$”的（　　）.

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】根据向量数量积分析可知 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$ 等价于 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，结合充分、必要条件分析判断.

【详解】因为 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2=0$，可得 $\vec{a}^2=\vec{b}^2$，即 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，

可知 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$ 等价于 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，

若 $\vec{a}=\vec{b}$ 或 $\vec{a}=-\vec{b}$，可得 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，即 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$，可知必要性成立；

若 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$，即 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，无法得出 $\vec{a}=\vec{b}$ 或 $\vec{a}=-\vec{b}$，

例如$\vec{a}=(1,0),\vec{b}=(0,1)$，满足$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，但$\vec{a}\neq\vec{b}$且$\vec{a}\neq-\vec{b}$，可知充分性不成立；

综上所述，“$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$”是“$\vec{a}\neq\vec{b}$且$\vec{a}\neq-\vec{b}$”的必要不充分条件.

故选：B.

6. 设函数$f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$. 已知$f(x_1)=-1$，$f(x_2)=1$，且$|x_1-x_2|$的最小值为$\frac{\pi}{2}$，则$\omega=$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】根据三角函数最值分析周期性，结合三角函数最小正周期公式运算求解.

【详解】由题意可知：x_1为$f(x)$的最小值点，x_2为$f(x)$的最大值点，

则$|x_1-x_2|_{\min}=\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$，即$T=\pi$，

且$\omega>0$，所以$\omega=\frac{2\pi}{T}=2$.

故选：B.

7. 生物丰富度指数 $d=\frac{S-1}{\ln N}$是河流水质的一个评价指标，其中S,N分别表示河流中的生物种类数与生物个体总数.生物丰富度指数d越大，水质越好．如果某河流治理前后的生物种类数S没有变化，生物个体总数由N_1变为N_2，生物丰富度指数由2.1提高到3.15，则（　　）

A. $3N_2=2N_1$

B. $2N_2=3N_1$

C. $N_2^2=N_1^3$

D. $N_2^3=N_1^2$

【答案】D

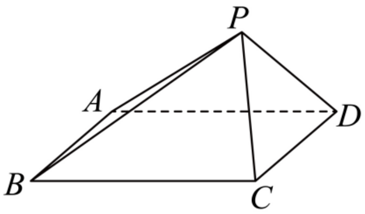
【解析】

【分析】根据题意分析可得$\frac{S-1}{\ln N_1}=2.1,\frac{S-1}{\ln N_2}=3.15$，消去S即可求解.

【详解】由题意得$\frac{S-1}{\ln N_1}=2.1,\frac{S-1}{\ln N_2}=3.15$，则$2.1\ln N_1=3.15\ln N_2$，即$2\ln N_1=3\ln N_2$，所以$N_2^3=N_1^2$.

故选：D

8. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形， $PA=PB=4$，$PC=PD=2\sqrt{2}$，该棱锥的高为（　　）.



A. 1　　　　B. 2　　　　C. $\sqrt{2}$　　　　D. $\sqrt{3}$

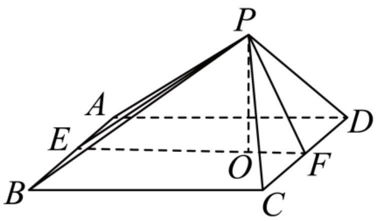
【答案】D

【解析】

【分析】取点作辅助线，根据题意分析可知平面 $PEF\perp$ 平面 $ABCD$，可知 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，利用等体积法求点到面的距离.

【详解】如图，底面 $ABCD$ 为正方形，

当相邻的棱长相等时，不妨设 $PA=PB=AB=4, PC=PD=2\sqrt{2}$，



分别取 AB,CD 的中点 E,F，连接 PE,PF,EF，

则 $PE\perp AB, EF\perp AB$，且 $PE\cap EF=E$， $PE,EF\subset$ 平面 PEF，

可知 $AB\perp$ 平面 PEF，且 $AB\subset$ 平面 $ABCD$，

所以平面 $PEF\perp$ 平面 $ABCD$，

过 P 作 EF 的垂线，垂足为 O，即 $PO\perp EF$，

由平面 $PEF\cap$ 平面 $ABCD=EF$， $PO\subset$ 平面 PEF，

所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，

由题意可得： $PE=2\sqrt{3}, PF=2, EF=4$，则 $PE^2+PF^2=EF^2$，即 $PE\perp PF$，

则 $\frac{1}{2}PE\cdot PF=\frac{1}{2}PO\cdot EF$，可得 $PO=\frac{PE\cdot PF}{EF}=\sqrt{3}$，

所以四棱锥的高为 $\sqrt{3}$.

当相对的棱长相等时，不妨设 $PA=PC=4$， $PB=PD=2\sqrt{2}$，

因为 $BD=4\sqrt{2}=PB+PD$，此时不能形成三角形 PBD，与题意不符，这样情况不存在.

故选：D.

9. 已知 $\left(x_1,y_1\right)$，$\left(x_2,y_2\right)$ 是函数 $y=2^x$ 的图象上两个不同的点，则（　　）

A. $\log_2\dfrac{y_1+y_2}{2}<\dfrac{x_1+x_2}{2}$　　B. $\log_2\dfrac{y_1+y_2}{2}>\dfrac{x_1+x_2}{2}$

C. $\log_2\dfrac{y_1+y_2}{2}<x_1+x_2$　　D. $\log_2\dfrac{y_1+y_2}{2}>x_1+x_2$

【答案】B

【解析】

【分析】根据指数函数和对数函数的单调性结合基本不等式分析判断 AB；举例判断 CD 即可.

【详解】由题意不妨设 $x_1<x_2$，因为函数 $y=2^x$ 是增函数，所以 $0<2^{x_1}<2^{x_2}$，即 $0<y_1<y_2$，

对于选项 AB：可得 $\dfrac{2^{x_1}+2^{x_2}}{2}>\sqrt{2^{x_1}\cdot 2^{x_2}}=2^{\frac{x_1+x_2}{2}}$，即 $\dfrac{y_1+y_2}{2}>2^{\frac{x_1+x_2}{2}}>0$，

根据函数 $y=\log_2 x$ 是增函数，所以 $\log_2\dfrac{y_1+y_2}{2}>\log_2 2^{\frac{x_1+x_2}{2}}=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，故 B 正确，A 错误；

对于选项 D：例如 $x_1=0,x_2=1$，则 $y_1=1,y_2=2$，

可得 $\log_2\dfrac{y_1+y_2}{2}=\log_2\dfrac{3}{2}\in\left(0,1\right)$，即 $\log_2\dfrac{y_1+y_2}{2}<1=x_1+x_2$，故 D 错误；

对于选项 C：例如 $x_1=-1,x_2=-2$，则 $y_1=\dfrac{1}{2},y_2=\dfrac{1}{4}$，

可得 $\log_2\dfrac{y_1+y_2}{2}=\log_2\dfrac{3}{8}=\log_2 3-3\in\left(-2,-1\right)$，即 $\log_2\dfrac{y_1+y_2}{2}>-3=x_1+x_2$，故 C 错误，

故选：B.

10. 已知 $M=\left\{\left(x,y\right)\mid y=x+t\left(x^2-x\right),1\le x\le 2,0\le t\le 1\right\}$ 是平面直角坐标系中的点集.设 d 是 M 中两点间距离的最大值，S 是 M 表示的图形的面积，则（　　）

A. $d=3$，$S<1$　　B. $d=3$，$S>1$

C. $d=\sqrt{10}$，$S<1$　　D. $d=\sqrt{10}$，$S>1$

【答案】C

【解析】

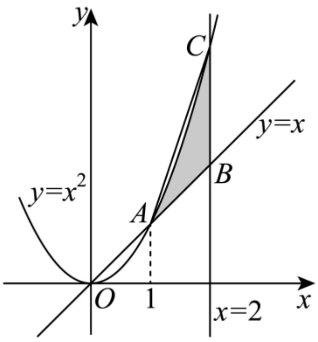
【分析】先以 t 为变量，分析可知所求集合表示的图形即为平面区域$\begin{cases} y \le x^2 \\ y \ge x \\ 1 \le x \le 2 \end{cases}$，结合图形分析求解即可.

【详解】对任意给定 $x \in [1,2]$，则 $x^2 - x = x(x-1) \ge 0$，且 $t \in [0,1]$，

可知 $x \le x + t(x^2 - x) \le x + x^2 - x = x^2$，即 $x \le y \le x^2$，

再结合 x 的任意性，所以所求集合表示的图形即为平面区域$\begin{cases} y \le x^2 \\ y \ge x \\ 1 \le x \le 2 \end{cases}$，

如图阴影部分所示，其中 $A(1,1), B(2,2), C(2,4)$，



可知任意两点间距离最大值 $d = |AC| = \sqrt{10}$；

阴影部分面积 $S < S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$.

故选：C.

【点睛】方法点睛：数形结合的重点是“以形助数”，在解题时要注意培养这种思想意识，做到心中有图，见数想图，以开拓自己的思维．使用数形结合法的前提是题目中的条件有明确的几何意义，解题时要准确把握条件、结论与几何图形的对应关系，准确利用几何图形中的相关结论求解.

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 抛物线 $y^2 = 16x$ 的焦点坐标为________.

【答案】$(4,0)$

【解析】

【分析】形如 $y^2 = 2px, (p \ne 0)$ 的抛物线的焦点坐标为 $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$，由此即可得解.

【详解】由题意抛物线的标准方程为$y^2=16x$，所以其焦点坐标为$\left(4,0\right)$.

故答案为：$\left(4,0\right)$.

12. 在平面直角坐标系xOy中，角α与角β均以Ox为始边，它们的终边关于原点对称. 若$\alpha\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，则$\cos\beta$的最大值为________.

【答案】$-\frac{1}{2}$##-0.5

【解析】

【分析】首先得出$\beta=\alpha+\pi+2k\pi,k\in Z$，结合三角函数单调性即可求解最值.

【详解】由题意$\beta=\alpha+\pi+2k\pi,k\in Z$，从而$\cos\beta=\cos\left(\alpha+\pi+2k\pi\right)=-\cos\alpha$，

因为$\alpha\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，所以$\cos\alpha$的取值范围是$\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$，$\cos\beta$的取值范围是$\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right]$，

当且仅当$\alpha=\frac{\pi}{3}$，即$\beta=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,k\in Z$时，$\cos\beta$取得最大值，且最大值为$-\frac{1}{2}$.

故答案为：$-\frac{1}{2}$.

13. 若直线$y=k\left(x-3\right)$与双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=1$只有一个公共点，则k的一个取值为 ________.

【答案】$\frac{1}{2}$（或$-\frac{1}{2}$，答案不唯一）

【解析】

【分析】联立直线方程与双曲线方程，根据交点个数与方程根的情况列式即可求解.

【详解】联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}-y^2=1\\ y=k\left(x-3\right)\end{cases}$，化简并整理得：$\left(1-4k^2\right)x^2+24k^2x-36k^2-4=0$，

由题意得$1-4k^2=0$或$\Delta=\left(24k^2\right)^2+4\left(36k^2+4\right)\left(1-4k^2\right)=0$，

解得$k=\pm\frac{1}{2}$或无解，即$k=\pm\frac{1}{2}$，经检验，符合题意.

故答案为：$\frac{1}{2}$（或$-\frac{1}{2}$，答案不唯一）.

14. 汉代刘歆设计的“铜嘉量”

是龠、合、升、斗、斛五量合一的标准量器，其中升量器、斗量器、斛量器的形状均可视为圆柱.若升、斗、斛量器的容积成公比为10的等比数列，底面直径依次为 $65\text{mm},325\text{mm},325\text{mm}$，且斛量器的高为 230mm，则斗量器的高为______mm，升量器的高为________mm.

【答案】 ①. 23 ②. 57.5## $\frac{115}{2}$

【解析】

【分析】根据体积为公比为10的等比数列可得关于高度的方程组，求出其解后可得前两个圆柱的高度.

【详解】设升量器的高为 h_1，斗量器的高为 h_2（单位都是mm），则

$$\frac{\pi\left(\frac{325}{2}\right)^2 h_2}{\pi\left(\frac{65}{2}\right)^2 h_1}=\frac{\pi\left(\frac{325}{2}\right)^2\times 230}{\pi\left(\frac{325}{2}\right)^2 h_2}=10,$$

故 $h_2=23\text{mm}$，$h_1=\frac{115}{2}\text{mm}$.

故答案为：$23\text{mm},\frac{115}{2}\text{mm}$.

15. 设$\{a_n\}$与$\{b_n\}$是两个不同的无穷数列，且都不是常数列.记集合 $M=\left\{k\mid a_k=b_k,k\in\mathrm{N}^*\right\}$，给出下列4个结论：

①若$\{a_n\}$与$\{b_n\}$均为等差数列，则 M 中最多有1个元素；

②若$\{a_n\}$与$\{b_n\}$均为等比数列，则 M 中最多有2个元素；

③若$\{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$为等比数列，则 M 中最多有3个元素；

④若$\{a_n\}$为递增数列，$\{b_n\}$为递减数列，则 M 中最多有1个元素.

其中正确结论的序号是______.

【答案】①③④

【解析】

【分析】利用两类数列的散点图的特征可判断①④的正误，利用反例可判断②的正误，结合通项公式的特征及反证法可判断③的正误.

【详解】对于①，因为$\left\{a_n\right\},\left\{b_n\right\}$均为等差数列，故它们的散点图分布在直线上，

而两条直线至多有一个公共点，故 M 中至多一个元素，故①正确.

对于②，取 $a_n=2^{n-1},b_n=-(-2)^{n-1}$，则$\left\{a_n\right\},\left\{b_n\right\}$均为等比数列，