

扬州市重点中学 2024 届高三数学第一学期期末教学质量检测试题

注意事项

1. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。
4. 作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。作答非选择题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

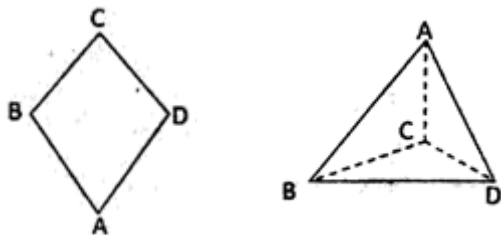
1. 过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点作直线交抛物线于 A, B 两点，若线段 AB 中点的横坐标为 3，且 $|AB| = 8$ ，则抛物线的方程是()

- A. $y^2 = 2x$ B. $y^2 = 4x$ C. $y^2 = 8x$ D. $y^2 = 10x$

2. 已知正四面体 $ABCD$ 的棱长为 1， O 是该正四面体外接球球心，且 $\vec{AO} = x\vec{AB} + y\vec{AC} + z\vec{AD}$ ， $x, y, z \in \mathbf{R}$ ，则 $x + y + z =$ ()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{1}{3}$
C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

3. 等腰直角三角形 BCD 与等边三角形 ABD 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BD = 6$ ，现将 $\triangle ABD$ 沿 BD 折起，则当直线 AD 与平面 BCD 所成角为 45° 时，直线 AC 与平面 ABD 所成角的正弦值为 ()



- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

4. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ ，直线 $y = k\left(x - \frac{p}{2}\right) (k > 0)$ 与 C 分别相交于点 A, M 与 C 的准线相交于点 N ，若 $|AM| = |MN|$ ，则 $k =$ ()

- A. 3 B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $\frac{1}{3}$

5. 关于函数 $f(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 的单调性, 下列叙述正确的是 ()

- A. 单调递增 B. 单调递减 C. 先递减后递增 D. 先递增后递减

6. 已知定义在 R 上的函数 $f(x) = 2^{|x-m|} - 1$ (m 为实数) 为偶函数, 记 $a = f(\log_{0.5} 3)$, $b = f(\log_2 5)$, $c = f(2+m)$ 则 a, b, c 的大小关系为 ()

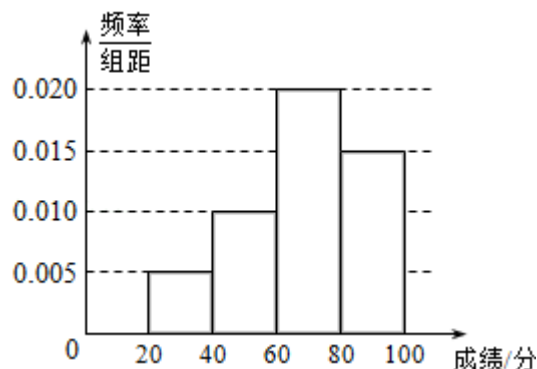
- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $c < a < b$ D. $c < b < a$

7. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 1 的等边三角形, 点 D, E 分别是边 AB, BC 的中点, 连接 DE 并延长到点 F , 使得 $DE = 2EF$, 则 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的值为 ()

- A. $\frac{11}{8}$ B. $\frac{5}{4}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{8}$

8. 某学校组织学生参加英语测试, 成绩的频率分布直方图如图, 数据的分组依次为

$[20, 40), [40, 60), [60, 80), [80, 100]$, 若低于 60 分的人数是 18 人, 则该班的学生人数是 ()



- A. 45 B. 50 C. 55 D. 60

9. 二项式 $\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{x}\right)^7$ 展开式中, $\frac{1}{x}$ 项的系数为 ()

- A. $-\frac{945}{16}$ B. $-\frac{189}{32}$ C. $-\frac{21}{64}$ D. $\frac{2835}{8}$

10. 已知 m, n 为两条不重合直线, α, β 为两个不重合平面, 下列条件中, $\alpha \perp \beta$ 的充分条件是 ()

- A. $m \parallel n, m \subset \alpha, n \subset \beta$ B. $m \parallel n, m \perp \alpha, n \perp \beta$
 C. $m \perp n, m \parallel \alpha, n \parallel \beta$ D. $m \perp n, m \perp \alpha, n \perp \beta$

11. 已知复数 z 满足 $z(1+i) = 1-i$ (i 为虚数单位), 则 z 的虚部为 ()

- A. $-i$ B. i C. 1 D. -1

12. 设椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右顶点为 A , 右焦点为 F , B 、 C 为椭圆上关于原点对称的两点, 直线 BF

交直线 AC 于 M , 且 M 为 AC 的中点, 则椭圆 E 的离心率是 ()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{4}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = -6$, 且 $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2$, 则 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle =$ _____.

14. 已知点 F 是抛物线 $y = 2x^2$ 的焦点, M, N 是该抛物线上的两点, 若 $|MF| + |NF| = \frac{17}{4}$, 则线段 MN 中点的纵坐标为_____.

15. 角 α 的顶点在坐标原点, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 终边经过点 $P(1, 2)$, 则 $\sin(\pi - \alpha)$ 的值是_____.

16. 函数 $f(x) = x^2 - x \ln x$ 的图象在 $x=1$ 处的切线方程为_____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 2018 年反映社会现实的电影《我不是药神》引起了很大的轰动, 治疗特种病的创新药研发成了当务之急。为此, 某药企加大了研发投入, 市场上治疗一类慢性病的特效药品 A 的研发费用 x (百万元) 和销量 y (万盒) 的统计数据如下:

研发费用 x (百万元)	2	3	6	10	13	15	18	21
销量 y (万盒)	1	1	2	2.5	3.5	3.5	4.5	6

(1) 求 y 与 x 的相关系数 r 精确到 0.01, 并判断 y 与 x 的关系是否可用线性回归方程模型拟合? (规定: $|r| \geq 0.75$ 时, 可用线性回归方程模型拟合);

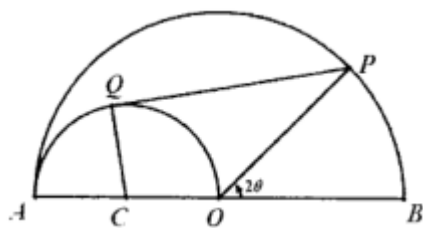
(2) 该药企准备生产药品 A 的三类不同的剂型 A_1, A_2, A_3 , 并对其进行两次检测, 当第一次检测合格后, 才能进行第二次检测。第一次检测时, 三类剂型 A_1, A_2, A_3 合格的概率分别为 $\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}$, 第二次检测时, 三类剂型 A_1, A_2, A_3 合格的概率分别为 $\frac{4}{5}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ 。两次检测过程相互独立, 设经过两次检测后 A_1, A_2, A_3 三类剂型合格的种类数为 X , 求 X 的数学期望。

附: (1) 相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2 \right)}}$

(2) $\sum_{i=1}^8 x_i y_i = 347, \sum_{i=1}^8 x_i^2 = 1308, \sum_{i=1}^8 y_i^2 = 93, \sqrt{1785} \approx 42.25$.

18. (12 分) 某广告商租用了一块如图所示的半圆形封闭区域用于产品展示, 该封闭区域由以 O 为圆心的半圆及直径

AB 围成. 在此区域内原有一个以 OA 为直径、 C 为圆心的半圆形展示区, 该广告商欲在此基础上, 将其改建成一个凸四边形的展示区 $COPQ$, 其中 P 、 Q 分别在大半圆 O 与小半圆 C 的圆弧上, 且 PQ 与小半圆 C 相切于点 Q . 已知 AB 长为 40 米, 设 $\angle BOP$ 为 2θ . (上述图形均视作在同一平面内)



- (1) 记四边形 $COPQ$ 的周长为 $f(\theta)$, 求 $f(\theta)$ 的表达式;
- (2) 要使改建成的展示区 $COPQ$ 的面积最大, 求 $\sin \theta$ 的值.

19. (12 分) 已知函数 $y = f(x)$. 若在定义域内存在 x_0 , 使得 $f(-x_0) = -f(x_0)$ 成立, 则称 x_0 为函数 $y = f(x)$ 的局部对称点.

- (1) 若 $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $a \neq 0$, 证明: 函数 $f(x) = ax^2 + bx - a$ 有局部对称点;
- (2) 若函数 $g(x) = 2^x + c$ 在定义域 $[-1, 1]$ 内有局部对称点, 求实数 c 的取值范围;
- (3) 若函数 $h(x) = 4^x - m \cdot 2^{x+1} + m^2 - 3$ 在 $\mathbb{R}$ 上有局部对称点, 求实数 m 的取值范围.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x$.

- (1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;
- (2) 若对任意的 $m \in \mathbb{R}$, 当 $x > 0$ 时, 都有 $m^2 \left(2f(x) + \frac{1}{x} \right) > 2\sqrt{2km} - 1$ 恒成立, 求最大的整数 k .

(参考数据: $e^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \approx 1.78$)

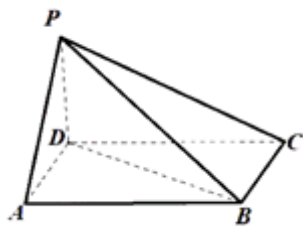
21. (12 分) 已知 F_1, F_2 为椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 离心率为 $\frac{1}{2}$, 点 $P(2, 3)$ 在椭圆上.

- (1) 求椭圆 E 的方程;
- (2) 过 F_1 的直线 l_1, l_2 分别交椭圆于 A, C 和 B, D , 且 $l_1 \perp l_2$, 问是否存在常数 λ , 使得 $\frac{1}{|AC|}, \lambda, \frac{1}{|BD|}$ 成等差数列?

若存在, 求出 λ 的值; 若不存在, 请说明理由.

22. (10 分) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是平行四边形, $PD \perp$ 底面

$$ABCD, \quad PD = AD = 1, \quad AB = \sqrt{5}, \quad \sin \angle ABD = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$



- (1) 证明: $PA \perp BD$;
- (2) 求二面角 $A-PB-C$ 的正弦值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、B

【解析】

利用抛物线的定义可得, $|AB| = |AF| + |BF| = x_1 + \frac{p}{2} + x_2 + \frac{p}{2}$, 把线段 AB 中点的横坐标为 3, $|AB| = 8$ 代入可得 p 值, 然后可得出抛物线的方程.

【详解】

设抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 设点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

由抛物线的定义可知 $|AB| = |AF| + |BF| = x_1 + \frac{p}{2} + x_2 + \frac{p}{2} = (x_1 + x_2) + p$,

线段 AB 中点的横坐标为 3, 又 $|AB| = 8$, $\therefore 8 = 6 + p$, 可得 $p = 2$,

所以抛物线方程为 $y^2 = 4x$.

故选: B.

【点睛】

本题考查抛物线的定义、标准方程, 以及简单性质的应用, 利用抛物线的定义是解题的关键.

2、A

【解析】

如图设 $AF \perp$ 平面 BCD , 球心 O 在 AF 上, 根据正四面体的性质可得 $AO = \frac{3}{4} AF$

，根据平面向量的加法的几何意义，重心的性质，结合已知求出 $x+y+z$ 的值.

【详解】

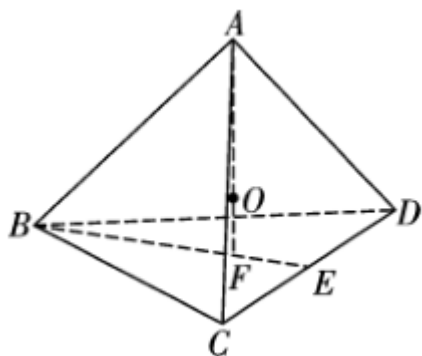
如图设 $AF \perp$ 平面 BCD ，球心 O 在 AF 上，由正四面体的性质可得：三角形 BCD 是正三角形，

$$BF = \frac{2}{3} \times \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad AF = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad \text{在直角三角形 } FOB \text{ 中,}$$

$$OB^2 = OF^2 + BF^2 \Rightarrow OA^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3} - AO\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow AO = \frac{\sqrt{6}}{4},$$

$$AO = \frac{3}{4}AF, \quad \vec{AF} = \vec{AB} + \vec{BF}, \quad \vec{AF} = \vec{AD} + \vec{DF}, \quad \vec{AF} = \vec{AC} + \vec{CF}, \quad \text{因为 } F \text{ 为重心, 因此 } \vec{FB} + \vec{FC} + \vec{FD} = \vec{0}, \quad \text{则}$$

$$3\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}, \quad \text{因此 } \vec{AO} = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}), \quad \text{因此 } x = y = z = \frac{1}{4}, \quad \text{则 } x + y + z = \frac{3}{4}, \quad \text{故选 A.}$$



【点睛】

本题考查了正四面体的性质，考查了平面向量加法的几何意义，考查了重心的性质，属于中档题.

3、A

【解析】

设 E 为 BD 中点，连接 AE 、 CE ，过 A 作 $AO \perp CE$ 于点 O ，连接 DO ，得到 $\angle ADO$ 即为直线 AD 与平面 BCD 所成角的平面角，根据题中条件求得相应的量，分析得到 $\angle CAE$ 即为直线 AC 与平面 ABD 所成角，进而求得其正弦值，得到结果.

【详解】

设 E 为 BD 中点，连接 AE 、 CE ，

由题可知 $AE \perp BD$ ， $CE \perp BD$ ，所以 $BD \perp$ 平面 AEC ，

过 A 作 $AO \perp CE$ 于点 O ，连接 DO ，则 $AO \perp$ 平面 BDC ，

所以 $\angle ADO$ 即为直线 AD 与平面 BCD 所成角的平面角，

$$\text{所以 } \sin \angle ADO = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AO}{AD}, \quad \text{可得 } AO = 3\sqrt{2},$$

在 $\triangle AOE$ 中可得 $OE = 3$,

又 $OC = \frac{1}{2}BD = 3$, 即点 O 与点 C 重合, 此时有 $AC \perp$ 平面 BCD ,

过 C 作 $CF \perp AE$ 与点 F ,

又 $BD \perp$ 平面 AEC , 所以 $BD \perp CF$, 所以 $CF \perp$ 平面 ABD ,

从而角 $\angle CAE$ 即为直线 AC 与平面 ABD 所成角, $\sin \angle CAE = \frac{CE}{AE} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

故选: A.

【点睛】

该题考查的是有关平面图形翻折问题, 涉及到的知识点有线面角的正弦值的求解, 在解题的过程中, 注意空间角的平面角的定义, 属于中档题目.

4、C

【解析】

根据抛物线的定义以及三角形的中位线, 斜率的定义表示即可求得答案.

【详解】

显然直线 $y = k\left(x - \frac{p}{2}\right)$ ($k > 0$) 过抛物线的焦点 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

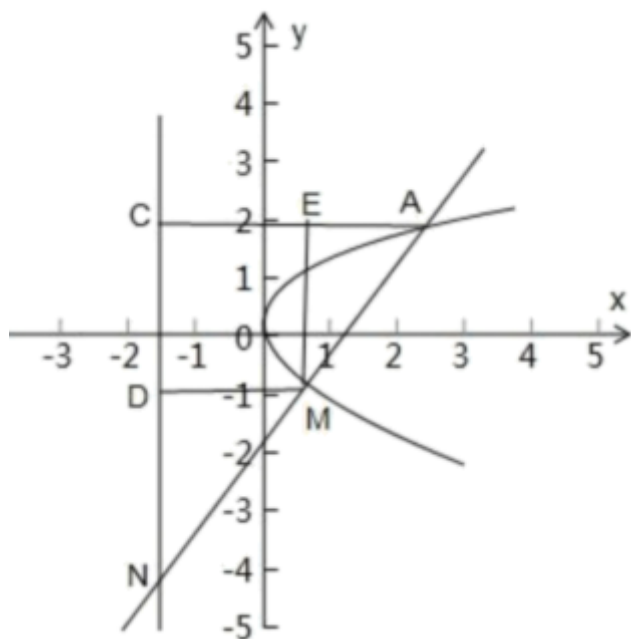
如图, 过 A, M 作准线的垂直, 垂足分别为 C, D , 过 M 作 AC 的垂线, 垂足为 E

根据抛物线的定义可知 $MD = MF$, $AC = AF$, 又 $AM = MN$, 所以 M 为 AN 的中点, 所以 MD 为三角形 NAC 的中位线,

故 $MD = CE = EA = \frac{1}{2}AC$

设 $MF = t$, 则 $MD = t$, $AF = AC = 2t$, 所以 $AM = 3t$, 在直角三角形 AEM 中, $ME = \sqrt{AM^2 - AE^2} = \sqrt{9t^2 - t^2} = 2\sqrt{2}t$

所以 $k = \tan \angle MAE = \frac{ME}{AE} = \frac{2\sqrt{2}t}{t} = 2\sqrt{2}$



故选：C

【点睛】

本题考查求抛物线的焦点弦的斜率，常见于利用抛物线的定义构建关系，属于中档题.

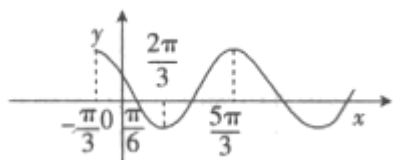
5、C

【解析】

先用诱导公式得 $f(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, 再根据函数图像平移的方法求解即可.

【详解】

函数 $f(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象可由 $y = \cos x$ 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到, 如图所示, $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上先递减后递增.



故选：C

【点睛】

本题考查三角函数的平移与单调性的求解.属于基础题.

6、B

【解析】

根据 $f(x)$ 为偶函数便可求出 $m=0$, 从而 $f(x) = 2^{|x|} - 1$, 根据此函数的奇偶性与单调性即可作出判断.

【详解】

解：∵ $f(x)$ 为偶函数；

$$\therefore f(-x) = f(x);$$

$$\therefore 2^{|-x-m|-1} = 2^{|x-m|-1};$$

$$\therefore |-x-m| = |x-m|;$$

$$(-x-m)^2 = (x-m)^2;$$

$$\therefore mx = 0;$$

$$\therefore m = 0;$$

$$\therefore f(x) = 2^{|x|-1};$$

$f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增，并且 $a = f(|\log_{0.5} 3|) = f(\log_2 3)$,

$$b = f(\log_2 5), c = f(2);$$

$$\therefore 0 < \log_2 3 < 2 < \log_2 5;$$

$$\therefore a < c < b.$$

故选 B.

【点睛】

本题考查偶函数的定义，指数函数的单调性，对于偶函数比较函数值大小的方法就是将自变量的值变到区间 $[0, +\infty)$ 上，根据单调性去比较函数值大小.

7、D

【解析】

设 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 作为一个基底, 表示向量 $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$, $\overrightarrow{DF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DE} = \frac{3}{4}(\vec{b} - \vec{a})$,

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}(\vec{b} - \vec{a}) = -\frac{5}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$, 然后再用数量积公式求解.

【详解】

设 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$,

所以 $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$, $\overrightarrow{DF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DE} = \frac{3}{4}(\vec{b} - \vec{a})$, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}(\vec{b} - \vec{a}) = -\frac{5}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$,

所以 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{5}{4}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{3}{4}\vec{b} \cdot \vec{b} = \frac{1}{8}$.

故选: D

【点睛】

本题主要考查平面向量的基本运算, 还考查了运算求解的能力, 属于基础题.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/736140002011010105>