

湖北省武汉市部分学校 2023 年高三第二次调研考试数学试题试卷

请考生注意：

1. 请用 2B 铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用 0.5 毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。
2. 答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ ， F 为抛物线的焦点且 MN 为过焦点的弦，若 $|OF| = 1$ ， $|MN| = 8$ ，则 $\triangle OMN$ 的面积为（ ）

- A. $2\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $4\sqrt{2}$ D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

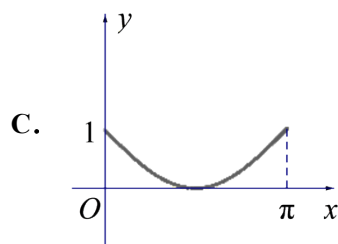
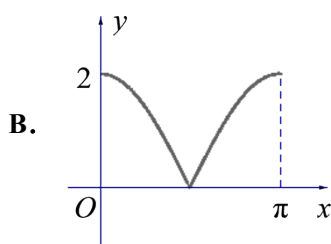
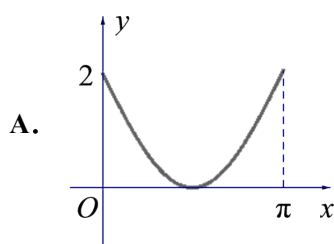
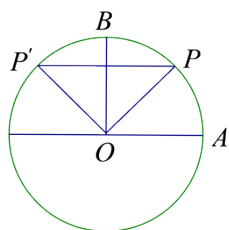
2. 2021 年部分省市将实行“3+1+2”的新高考模式，即语文、数学、英语三科必选，物理、历史二选一，化学、生物、政治、地理四选二，若甲同学选科没有偏好，且不受其他因素影响，则甲同学同时选择历史和化学的概率为

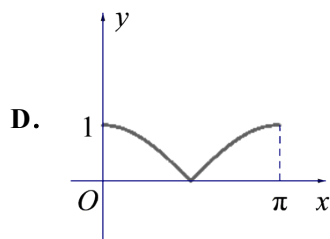
- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{4}$
C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{2}$

3. 某校 8 位学生的本次月考成绩恰好都比上一次的月考成绩高出 50 分，则以该 8 位学生这两次的月考成绩各自组成样本，则这两个样本不变的数字特征是（ ）

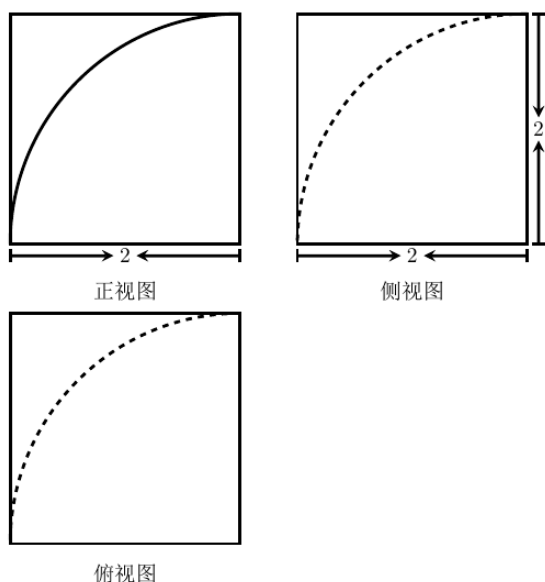
- A. 方差 B. 中位数 C. 众数 D. 平均数

4. 如图，圆 O 的半径为 1， A ， B 是圆上的定点， $OB \perp OA$ ， P 是圆上的动点，点 P 关于直线 OB 的对称点为 P' ，角 x 的始边为射线 OA ，终边为射线 OP ，将 $|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP'}|$ 表示为 x 的函数 $f(x)$ ，则 $y = f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的图像大致为（ ）





5. 一个几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积为（ ）



A. $24 + \pi$

B. $24 - \pi$

C. $24 - 2\pi$

D. $24 - 3\pi$

6. 已知函数 $f(x) = x \left(x - \ln \frac{x^2}{a} \right)$ ，关于 x 的方程 $f(x) = a$ 存在四个不同实数根，则实数 a 的取值范围是（ ）

A. $(0, 1) \cup (1, e)$

B. $\left(0, \frac{1}{e}\right)$

C. $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$

D. $(0, 1)$

7. 已知函数 $f(x) = \log_a(|x-2| - a)$ ($a > 0$ ，且 $a \neq 1$)，则“ $f(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 上是单调函数”是“ $0 < a < 1$ ”的（ ）

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

8. 已知集合 $A = \{x | x < 1\}$ ， $B = \{x | 3^x < 1\}$ ，则

A. $A \cap B = \{x | x < 0\}$

B. $A \cup B = \mathbb{R}$

C. $A \cup B = \{x | x > 1\}$

D. $A \cap B = \emptyset$

9.

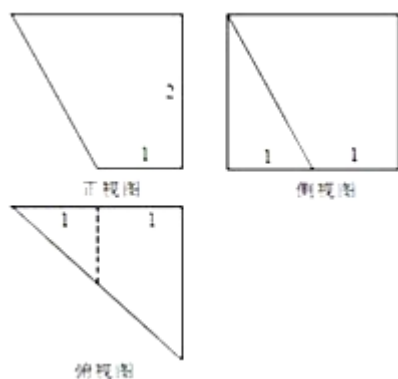
1777 年，法国科学家蒲丰在宴请客人时，在地上铺了一张白纸，上面画着一条条等距离的平行线，而他给每个客人发许多等质量的，长度等于相邻两平行线距离的一半的针，让他们随意投放.事后，蒲丰对针落地的位置进行统计，发现共投针 2212 枚，与直线相交的有 704 枚.根据这次统计数据，若客人随意向这张白纸上投放一根这样的针，则针落地后与直线相交的概率约为（ ）

- A. $\frac{1}{2\pi}$ B. $\frac{3}{\pi}$ C. $\frac{2}{\pi}$ D. $\frac{1}{\pi}$

10. 生活中人们常用“通五经贯六艺”形容一个人才识技艺过人，这里的“六艺”其实源于中国周朝的贵族教育体系，具体包括“礼、乐、射、御、书、数”.为弘扬中国传统文化，某校在周末学生业余兴趣活动中开展了“六艺”知识讲座，每艺安排一节，连排六节，则满足“数”必须排在前两节，“礼”和“乐”必须分开安排的概率为（ ）

- A. $\frac{7}{60}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{13}{60}$ D. $\frac{1}{4}$

11. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为（ ）



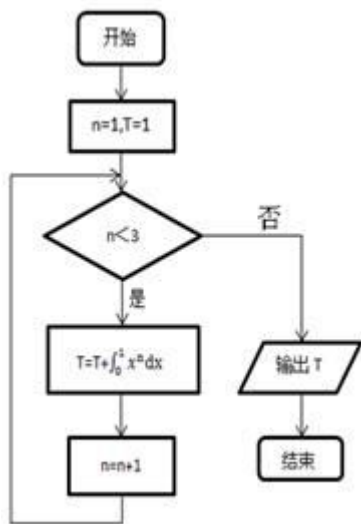
- A. $\frac{8}{3}$ B. 3 C. $\frac{11}{3}$ D. 4

12. 已知集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ， $B = \{x \mid x = n^2 - 1, n \in A\}$ ， $P = A \cap B$ ，则 P 的子集共有（ ）

- A. 2 个 B. 4 个 C. 6 个 D. 8 个

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 执行右边的程序框图，输出的 T 的值为_____.



14. 若函数 $f(x) = \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位得到函数 $g(x)$ 的图像. 则 $g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right]$

上的最小值为_____.

15. 已知盒中有 2 个红球, 2 个黄球, 且每种颜色的两个球均按 A, B 编号, 现从中摸出 2 个球 (除颜色与编号外球没有区别), 则恰好同时包含字母 A, B 的概率为_____.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\tan A + \tan B + \tan A \tan B = 1$, 则 $\cos^2 A + \cos^2 B$ 的范围为_____.

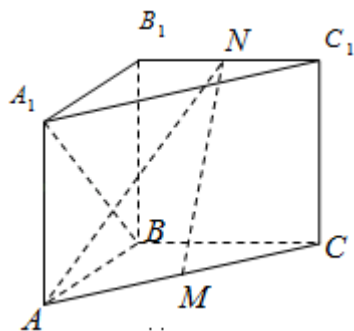
三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $2\sin^2 \frac{A-B}{2} + 2\cos^2 \frac{A+B}{2} + 2\cos A \cos B = 1$

(1) 求角 C 的大小

(2) 若 $c = 4, |\vec{CA} + \vec{CB}| = \sqrt{38}$, 求的周长

18. (12 分) 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = AA_1$, M, N 分别是 AC, B_1C_1 的中点. 求证:



(1) $MN \parallel$ 平面 ABB_1A_1 ;

(2) $AN \perp A_1B$.

19. (12 分) 在直角坐标系中, 已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \cos \varphi \\ y = 1 + \sqrt{2} \sin \varphi \end{cases}$ (φ 为参数), 以原点为极点, x 轴的非负

半轴为极轴建立极坐标系, 射线 l_1 的极坐标方程为 $\theta = \alpha \left(-\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{6} \right)$, 射线 l_2 的极坐标方程为 $\theta = \alpha + \frac{\pi}{2}$.

(I) 写出曲线 C 的极坐标方程, 并指出是何种曲线;

(II) 若射线 l_1 与曲线 C 交于 O, A 两点, 射线 l_2 与曲线 C 交于 O, B 两点, 求 $\triangle ABO$ 面积的取值范围.

20. (12 分) 已知点 A, B 分别在 x 轴、 y 轴上运动, $|AB| = 3$, $\vec{BM} = 2\vec{MA}$.

(1) 求点 M 的轨迹 C 的方程;

(2) 过点 $N \left(0, -\frac{3}{5} \right)$ 且斜率存在的直线 l 与曲线 C 交于 P, Q 两点, $E(0, 1)$, 求 $|EP|^2 + |EQ|^2$ 的取值范围.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = x|x + a|, a \in R$.

(1) 若 $f(1) + f(-1) > 1$, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $a < 0$, 对 $\forall x, y \in (-\infty, -a]$, 不等式 $f(x) \leq \left| y + \frac{3}{4} \right| + \left| y + \frac{a}{2} \right|$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

22. (10 分) 一种游戏的规则为抛掷一枚硬币, 每次正面向上得 2 分, 反面向上得 1 分.

(1) 设抛掷 4 次的得分为 X , 求变量 X 的分布列和数学期望.

(2) 当游戏得分为 $n(n \in \mathbb{N}^*)$ 时, 游戏停止, 记得 n 分的概率和为 $Q_n, Q_1 = \frac{1}{2}$.

①求 Q_2 ;

②当 $n \in \mathbb{N}^*$ 时, 记 $A_n = Q_{n+1} + \frac{1}{2}Q_n, B_n = Q_{n+1} - Q_n$, 证明: 数列 $\{A_n\}$ 为常数列, 数列 $\{B_n\}$ 为等比数列.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. A

【解析】

根据 $|OF| = 1$ 可知 $y^2 = 4x$, 再利用抛物线的焦半径公式以及三角形面积公式求解即可.

【详解】

由题意可知抛物线方程为 $y^2 = 4x$, 设点 $M(x_1, y_1)$ 点 $N(x_2, y_2)$, 则由抛物线定义知, $|MN| = |MF| + |NF| = x_1 + x_2 + 2$,

$|MN| = 8$ 则 $x_1 + x_2 = 6$.

由 $y^2 = 4x$ 得 $y_1^2 = 4x_1, y_2^2 = 4x_2$ 则 $y_1^2 + y_2^2 = 24$.

又 MN 为过焦点的弦, 所以 $y_1 y_2 = -4$, 则 $|y_2 - y_1| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 - 2y_1 y_2} = 4\sqrt{2}$, 所以 $S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2}|OF| \cdot |y_2 - y_1| = 2\sqrt{2}$.

故选: A

【点睛】

本题考查抛物线的方程应用, 同时也考查了焦半径公式等. 属于中档题.

2. B

【解析】

甲同学所有的选择方案共有 $C_2^1 C_4^2 = 12$

种, 甲同学同时选择历史和化学后, 只需在生物、政治、地理三科中再选择一科即可, 共有 $C_3^1 = 3$ 种选择方案, 根据古典概型的概率计算公式, 可得甲同学同时选择历史和化学的概率 $P = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, 故选 B.

3. A

【解析】

通过方差公式分析可知方差没有改变, 中位数、众数和平均数都发生了改变.

【详解】

由题可知, 中位数和众数、平均数都有变化.

本次和上次的月考成绩相比, 成绩和平均数都增加了 50, 所以 $(x_n - \bar{x})^2$ 没有改变,

根据方差公式 $S^2 = \frac{1}{8}[(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_8 - \bar{x})^2]$ 可知方差不变.

故选: A

【点睛】

本题主要考查样本的数字特征, 意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

4. B

【解析】

根据图象分析变化过程中在关键位置及部分区域, 即可排除错误选项, 得到函数图象, 即可求解.

【详解】

由题意, 当 $x = 0$ 时, P 与 A 重合, 则 P' 与 B 重合,

所以 $|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP'}| = |\overrightarrow{BA}| = 2$, 故排除 C, D 选项;

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP'}| = |P'P| = 2\sin(\frac{\pi}{2} - x) = 2\cos x$, 由图象可知选 B.

故选: B

【点睛】

本题主要考查三角函数的图像与性质, 正确表示函数的表达式是解题的关键, 属于中档题.

5. B

【解析】

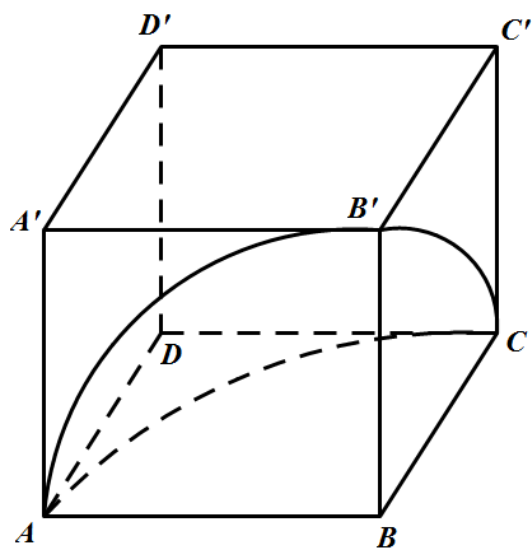
由题意首先确定几何体的空间结构特征, 然后结合空间结构特征即可求得其表面积.

【详解】

由三视图可知, 该几何体为边长为 2 正方体 $ABCD - A'B'C'D'$ 挖去一个以 B 为球心以 2 为半径球体的 $\frac{1}{8}$,

如图, 故其表面积为 $24 - 3\pi + \frac{1}{8} \times 4 \times \pi \times 2^2 = 24 - \pi$,

故选：B.



【点睛】

(1)以三视图为载体考查几何体的表面积，关键是能够对给出的三视图进行恰当的分析，从三视图中发现几何体中各元素间的位置关系及数量关系.

(2)多面体的表面积是各个面的面积之和；组合体的表面积应注意重合部分的处理.

(3)圆柱、圆锥、圆台的侧面是曲面，计算侧面积时需要将这个曲面展为平面图形计算，而表面积是侧面积与底面圆的面积之和.

6. D

【解析】

原问题转化为 $\frac{x^2}{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{x}{\sqrt{a}} \ln \frac{x^2}{a} = 1$ 有四个不同的实根，换元处理令 $t = \frac{x}{\sqrt{a}}$ ，对 $g(t) = \ln t^2 - \sqrt{a} \left(t - \frac{1}{t} \right)$ 进行零点个数讨论.

【详解】

由题意， $a > 2$ ，令 $t = \frac{x}{\sqrt{a}}$ ，

$$\text{则 } f(x) = a \Leftrightarrow x \left(x - \ln \frac{x^2}{a} \right) = a \Leftrightarrow \frac{x^2}{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{x}{\sqrt{a}} \ln \frac{x^2}{a} = 1$$

$$\Leftrightarrow t^2 - \frac{1}{\sqrt{a}} t \ln t^2 = 1 \Leftrightarrow \ln t^2 - \sqrt{a} \left(t - \frac{1}{t} \right) = 0.$$

$$\text{记 } g(t) = \ln t^2 - \sqrt{a} \left(t - \frac{1}{t} \right).$$

当 $t < 2$ 时, $g(t) = 2\ln(-t) - \sqrt{a}\left(t - \frac{1}{t}\right)$ 单调递减, 且 $g(-2) = 2$,

又 $g(2) = 2$, $\therefore$ 只需 $g(t) = 2$ 在 $(2, +\infty)$ 上有两个不等于 2 的不等根.

$$\text{则 } \ln t^2 - \sqrt{a}\left(t - \frac{1}{t}\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} = \frac{2t \ln t}{t^2 - 1},$$

$$\text{记 } h(t) = \frac{2t \ln t}{t^2 - 1} \quad (t > 2 \text{ 且 } t \neq 2),$$

$$\text{则 } h'(t) = \frac{(2 \ln t + 2)(t^2 - 1) - 4t^2 \ln t}{(t^2 - 1)^2} = \frac{2(t^2 + 1)\left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} - \ln t\right)}{(t^2 - 1)^2}.$$

$$\text{令 } \varphi(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} - \ln t, \text{ 则 } \varphi'(t) = \frac{2t(t^2 + 1) - 2t(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2} - \frac{1}{t} = -\frac{(t^2 - 1)^2}{t(t^2 + 1)^2} < 2.$$

$$\because \varphi(2) = 2, \therefore \varphi(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} - \ln t \text{ 在 } (2, 2) \text{ 大于 } 2, \text{ 在 } (2, +\infty) \text{ 上小于 } 2.$$

$\therefore h'(t)$ 在 $(2, 2)$ 上大于 2, 在 $(2, +\infty)$ 上小于 2,

则 $h(t)$ 在 $(2, 2)$ 上单调递增, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减.

$$\text{由 } \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2t \ln t}{t^2 - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2 \ln t + 2}{2} = 1, \text{ 可得 } \sqrt{a} < 1, \text{ 即 } a < 2.$$

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $(2, 2)$.

故选: D.

【点睛】

此题考查方程的根与函数零点问题, 关键在于等价转化, 将问题转化为通过导函数讨论函数单调性解决问题.

7. C

【解析】

先求出复合函数 $f(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 上是单调函数的充要条件, 再看其和 $0 < a < 1$ 的包含关系, 利用集合间包含关系与充要条件之间的关系, 判断正确答案.

【详解】

$$f(x) = \log_a(|x - 2| - a) \quad (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1),$$

$$\text{由 } |x - 2| - a > 0 \text{ 得 } x < 2 - a \text{ 或 } x > 2 + a,$$

$$\text{即 } f(x) \text{ 的定义域为 } \{x \mid x < 2 - a \text{ 或 } x > 2 + a\}, \quad (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1)$$

$$\text{令 } t = |x - 2| - a, \text{ 其在 } (-\infty, 2 - a) \text{ 单调递减, } (2 + a, +\infty) \text{ 单调递增,}$$

$f(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 上是单调函数，其充要条件为 $\begin{cases} 2+a \leq 3 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$

即 $0 < a < 1$.

故选：C.

【点睛】

本题考查了复合函数的单调性的判断问题，充要条件的判断，属于基础题.

8. A

【解析】

$\because$ 集合 $B = \{x \mid 3^x < 1\}$

$\therefore B = \{x \mid x < 0\}$

$\because$ 集合 $A = \{x \mid x < 1\}$

$\therefore A \cap B = \{x \mid x < 0\}$, $A \cup B = \{x \mid x < 1\}$

故选 A

9. D

【解析】

根据统计数据，求出频率，用以估计概率.

【详解】

$$\frac{704}{2212} \approx \frac{1}{\pi}.$$

故选:D.

【点睛】

本题以数学文化为背景，考查利用频率估计概率，属于基础题.

10. C

【解析】

分情况讨论，由间接法得到“数”必须排在前两节，“礼”和“乐”必须分开的事件个数，不考虑限制因素，总数有 A_6^6 种，进而得到结果.

【详解】

当“数”位于第一位时，礼和乐相邻有 4 种情况，礼和乐顺序有 2 种，其它剩下的有 A_3^3 种情况，由间接法得到满足条件的情况有 $A_5^5 - C_4^1 A_2^2 A_3^3$

当“数”在第二位时，礼和乐相邻有 3 种情况，礼和乐顺序有 2 种，其它剩下的有 A_3^3 种，

由间接法得到满足条件的情况有 $A_5^5 - C_3^1 A_2^2 A_3^3$

共有： $A_5^5 - C_3^1 A_2^2 A_3^3 + A_5^5 - C_4^1 A_2^2 A_3^3$ 种情况，不考虑限制因素，总数有 A_6^6 种，

故满足条件的事件的概率为： $\frac{A_5^5 - C_3^1 A_2^2 A_3^3 + A_5^5 - C_4^1 A_2^2 A_3^3}{A_6^6} = \frac{13}{60}$

故答案为：C.

【点睛】

解排列组合问题要遵循两个原则：①按元素(或位置)的性质进行分类；②按事情发生的过程进行分步．具体地说，解排列组合问题常以元素(或位置)为主体，即先满足特殊元素(或位置)，再考虑其他元素(或位置)．

11. C

【解析】

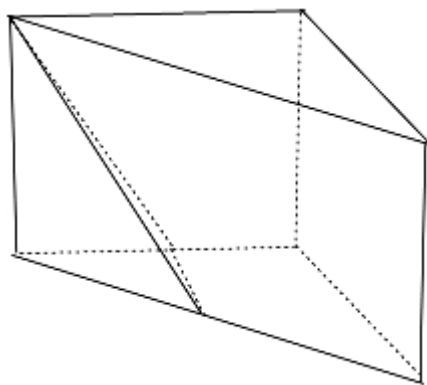
首先把三视图转换为几何体，该几何体为由一个三棱柱体，切去一个三棱锥体，由柱体、椎体的体积公式进一步求出几何体的体积.

【详解】

解：根据几何体的三视图转换为几何体为：

该几何体为由一个三棱柱体，切去一个三棱锥体，

如图所示：



$$\text{故： } V = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 2 = \frac{11}{3}.$$

故选：C.

【点睛】

本题考查了由三视图求几何体的体积、需熟记柱体、椎体的体积公式，考查了空间想象能力，属于基础题.

12. B

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/736213050105010235>