第五章 弯曲应力

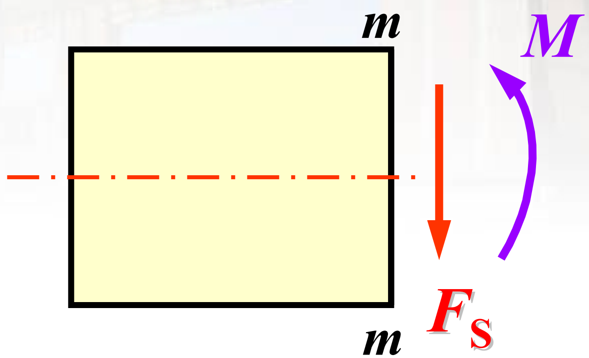
Chapter5 Stresses in beams

第五章 弯曲应力

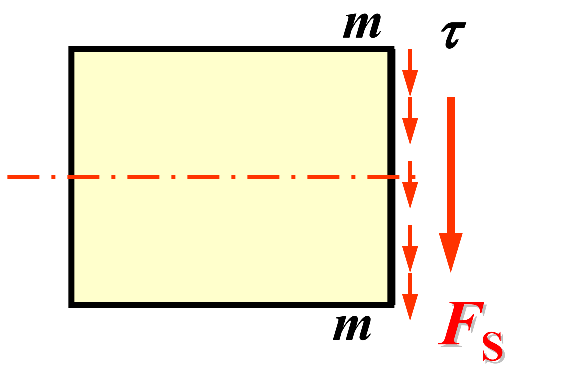
§5-1 概述

一、横力弯曲

□ 横力弯曲　当梁上有横向外力作用时，梁的横截面上既又弯矩M，又有剪力F_S。

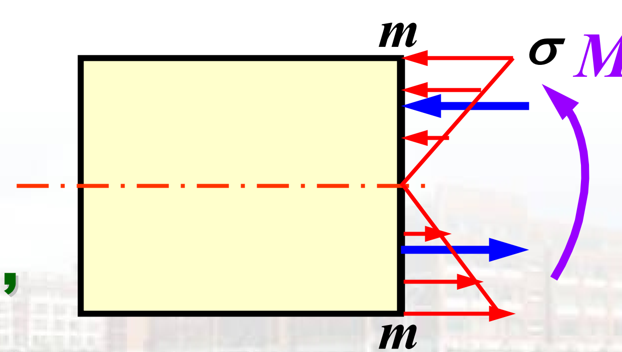


内力 $\begin{cases} \text{剪力}F_S \longrightarrow \text{切应力}\tau \\ \text{弯矩}M \longrightarrow \text{正应力}\sigma \end{cases}$



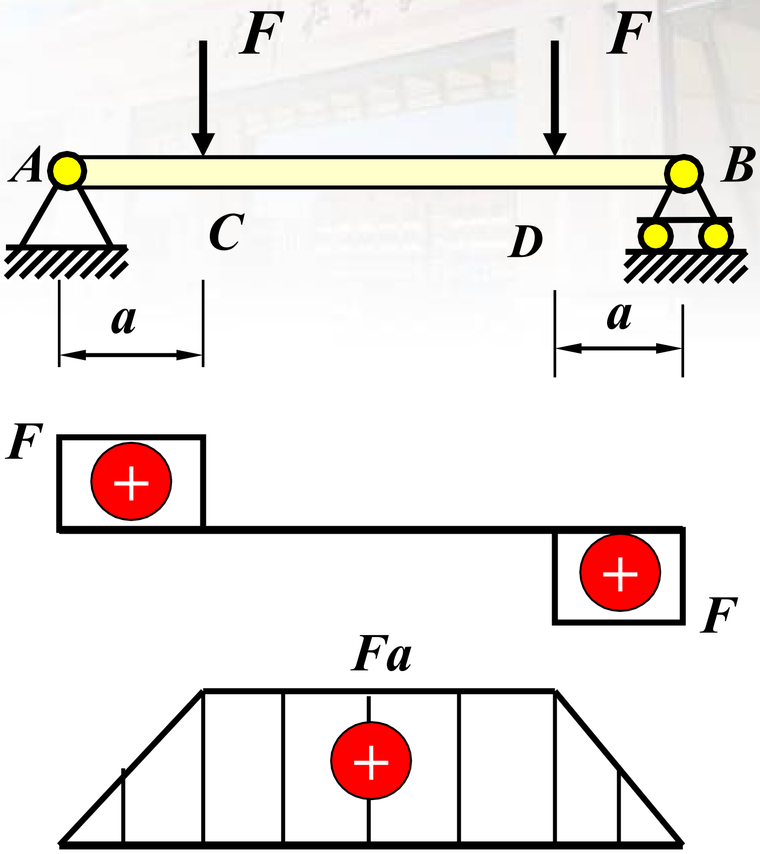
只有与切应力有关的切向内力元素 $dF_S = \tau dA$ 才能合成剪力；

只有与正应力有关的法向内力元素 $dF_N = \sigma dA$ 才能合成弯矩.



所以，在梁的横截面上一般既有正应力，又有切应力.

二、纯弯曲



□ **纯弯曲** 若梁在某段内各横截面的弯矩为常量，剪力为零，则该段梁的弯曲就称为纯弯曲.

简支梁*CD*段任一横截面上，剪力等于零，而弯矩为常量，所以该段梁的弯曲就是纯弯曲.

三、弯曲时的正应力与切应力

平面弯曲时横截面 $\xrightarrow{\sigma}$ 纯弯曲梁(横截面上只有M而无F_S的情况)

平面弯曲时横截面 $\xrightarrow[\tau]{\sigma}$ 横力弯曲(横截面上既有F_S又有M的情况)

四、纵向对称面、中性层、中性轴

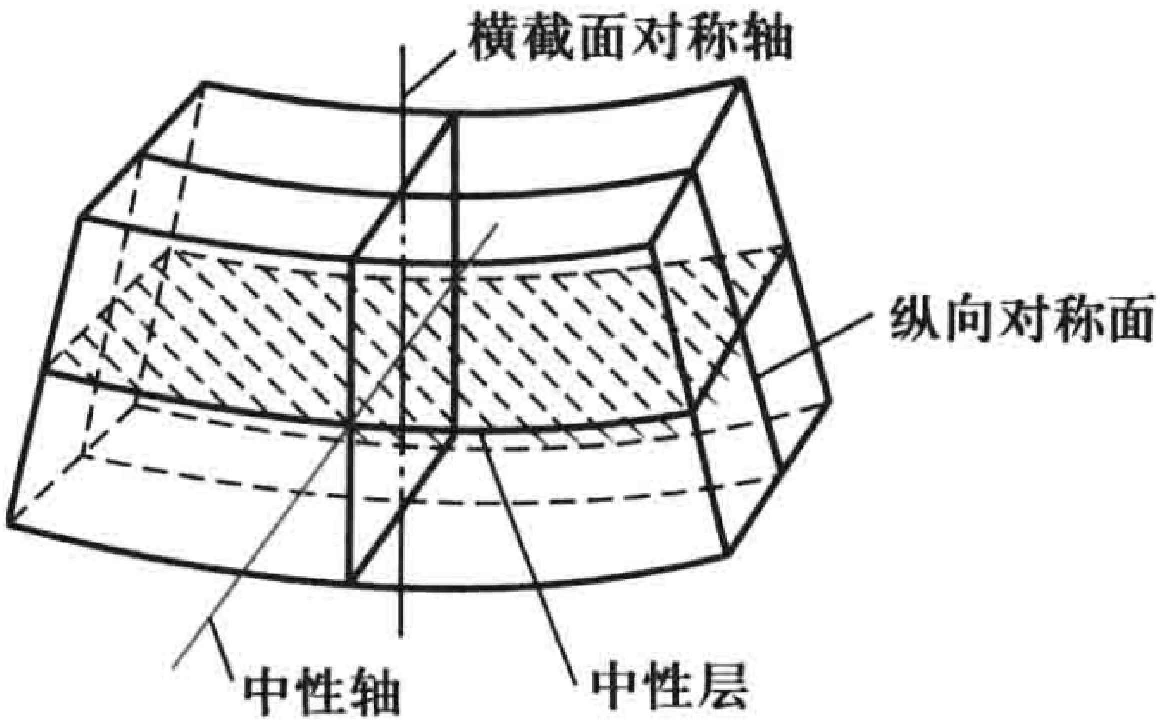
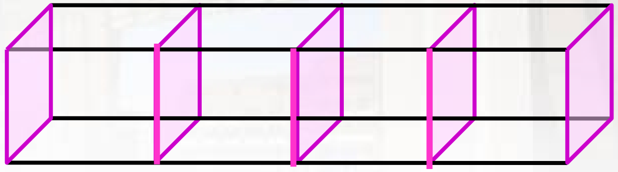


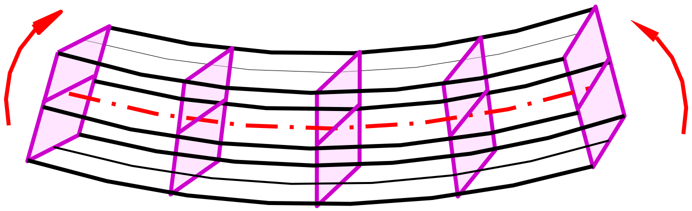
图 5.3

五、提出假设

（a）平面假设：变形前为平面的横截面变形后仍保持为平面且垂直于变形后的梁轴线；

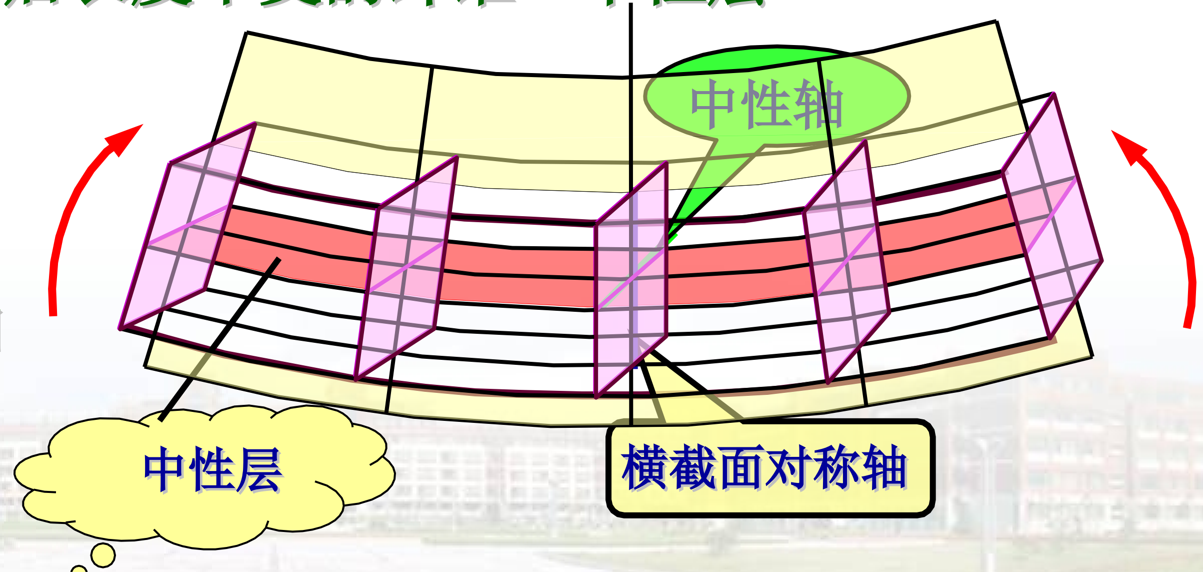


（b）单向受力假设：纵向纤维不相互挤压，只受单向拉压.



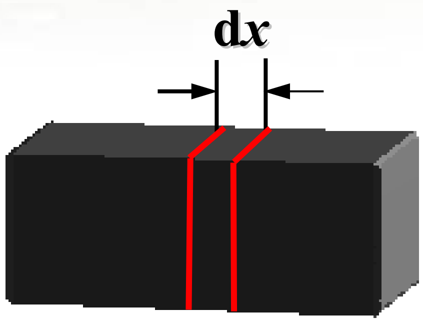
推论：必有一层变形前后长度不变的纤维—中性层

中性轴 ⊥ 横截面对称轴

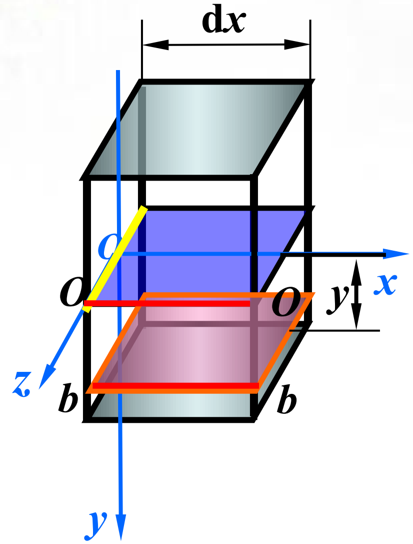


§5-2 纯弯曲时的正应力

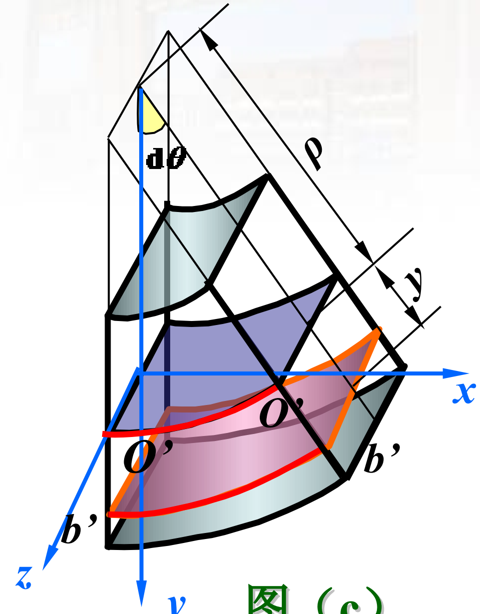
一、变形几何关系



图（a）



图（b）



图（c）

$$\widehat{b'b'} = (\rho + y)\mathrm{d}\theta \qquad \varepsilon = \frac{(\rho + y)\mathrm{d}\theta - \rho\mathrm{d}\theta}{\rho\mathrm{d}\theta} = \frac{y}{\rho}$$

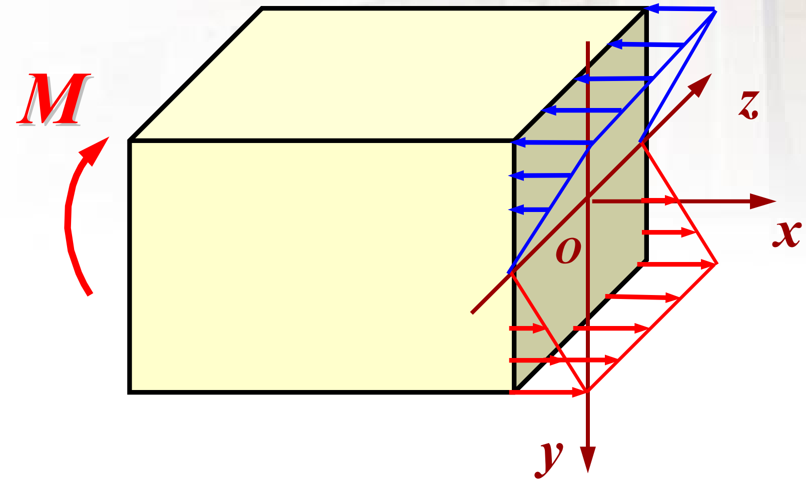
$$\overline{bb} = \mathrm{d}x = \overline{OO} = \widehat{O'O'} = \rho\mathrm{d}\theta$$

应变分布规律:

直梁纯弯曲时纵向纤维的应变与它到中性层的距离成正比.

二、物理关系(Physical relationship)

Hooke's Law $\sigma = E\varepsilon$



所以 $\sigma = E\dfrac{y}{\rho}$? ?

应力分布规律:

直梁纯弯曲时横截面上任意一点的正应力，与它到中性轴的距离成正比.

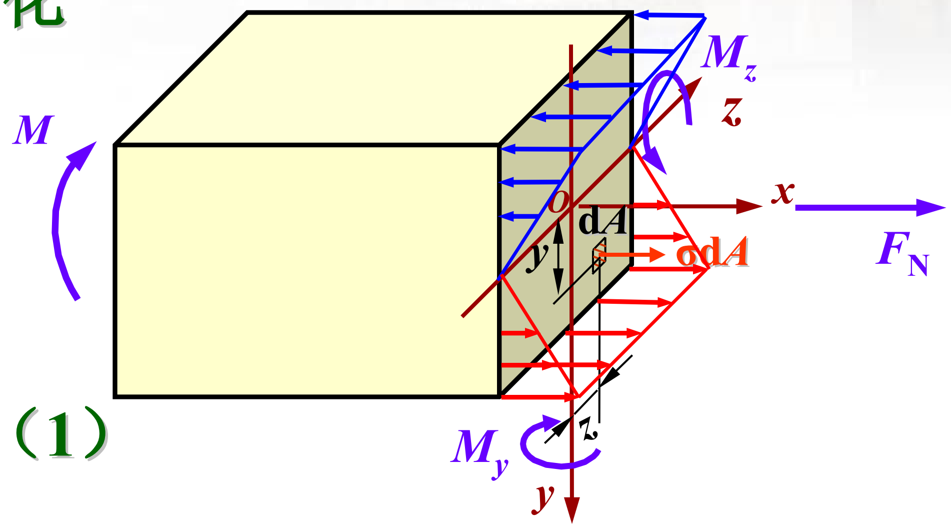
待解决问题

- 中性轴的位置
- 中性层的曲率半径ρ

?

三、静力关系 (Static relationship）

横截面上内力系为垂直于横截面的空间平行力系，这一力系简化得到三个内力分量.



内力与外力相平衡可得

$$F_N = \int_A dF_N = \int_A \sigma dA = 0 \quad (1)$$

$$M_{iy} = \int_A dM_y = \int_A z\sigma dA = 0 \quad (2)$$

$$M_{iz} = \int_A dM_z = \int_A y\sigma dA = M \quad (3)$$

$$dF_N = \sigma dA$$

$$dM_y = z \quad \sigma dA$$

$$dM_z = y \quad \sigma dA$$

将应力表达式代入（1）式，得

$$F_{\mathrm{N}} = \int_A E\frac{y}{\rho}\mathrm{d}A = 0 \Rightarrow \frac{E}{\rho}\int_A y\mathrm{d}A = 0 \Rightarrow S_z = \int_A y\mathrm{d}A = 0$$

⇒ 中性轴通过横截面形心

将应力表达式代入（2）式，得

$$M_{iy} = \int_A zE\frac{y}{\rho}\mathrm{d}A = 0 \Rightarrow \frac{E}{\rho}\int_A yz\mathrm{d}A = 0 \Rightarrow I_{yz} = \int_A yz\mathrm{d}A = 0$$

⇒ 自然满足

将应力表达式代入(3)式，得

$$M_{iz} = \int_A yE\frac{y}{\rho}\mathrm{d}A = M \Rightarrow \frac{E}{\rho}\int_A y^2\mathrm{d}A = M \Rightarrow \frac{E}{\rho}I_z = M$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$$

将 $\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{M}{EI_z}$ 代入 $\sigma=E\dfrac{y}{\rho}$

得到纯弯曲时横截面上正应力的计算公式:

$$\sigma=\frac{My}{I_z}$$

M为梁横截面上的弯矩;

y为梁横截面上任意一点到中性轴的距离;

I_z为梁横截面对中性轴的惯性矩.

讨论

（1）应用公式时，一般将 My 以绝对值代入. 根据梁变形的情况直接判断 σ 的正负号. 以中性轴为界，梁变形后凸出边的应力为拉应力(σ 为正号).凹入边的应力为压应力（σ 为负号）；

（2）最大正应力发生在横截面上离中性轴最远的点处.

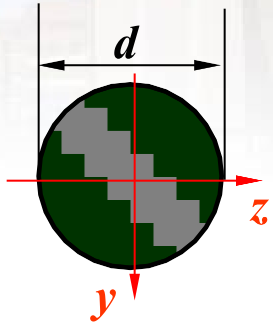
$$\sigma_{\max} = \frac{M\,y_{\max}}{I_z}$$

引用记号 $W = \dfrac{I_z}{y_{\max}}$ —抗弯截面系数

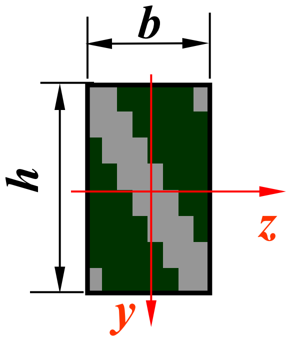
则公式改写为 $\sigma_{\max} = \dfrac{M}{W}$

（1）当中性轴为对称轴时

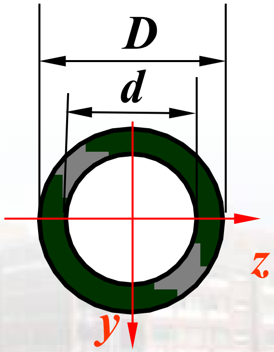
实心圆截面 $$W=\frac{I_z}{d/2}=\frac{\pi d^4/64}{d/2}=\frac{\pi d^3}{32}$$



矩形截面 $$W=\frac{I_z}{h/2}=\frac{bh^3/12}{h/2}=\frac{bh^2}{6}$$



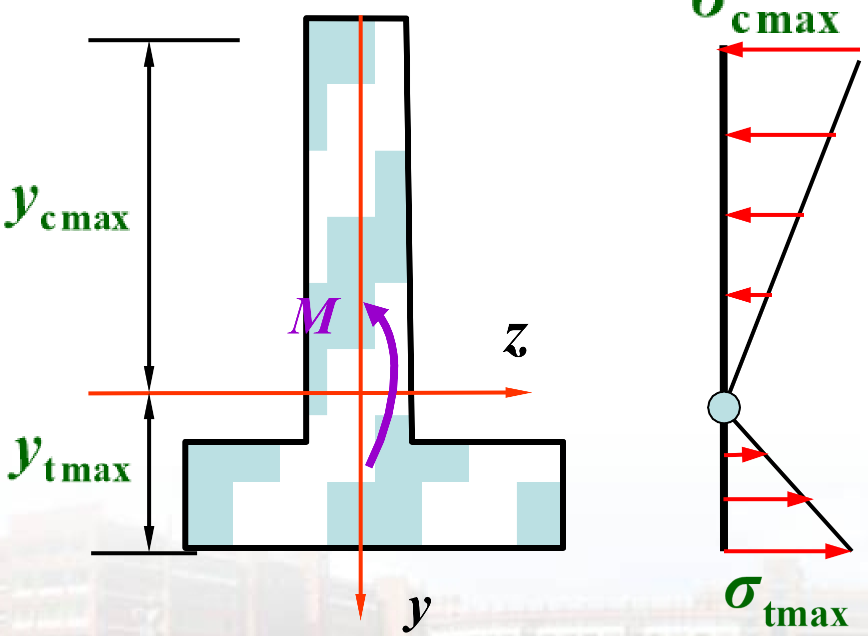
空心圆截面 $$W=\frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4)\qquad \alpha=\frac{d}{D}$$



（2）对于中性轴不是对称轴的横截面

应分别以横截面上受拉和受压部分距中性轴最远的距离 y_{cmax} 和 y_{tmax} 直接代入公式

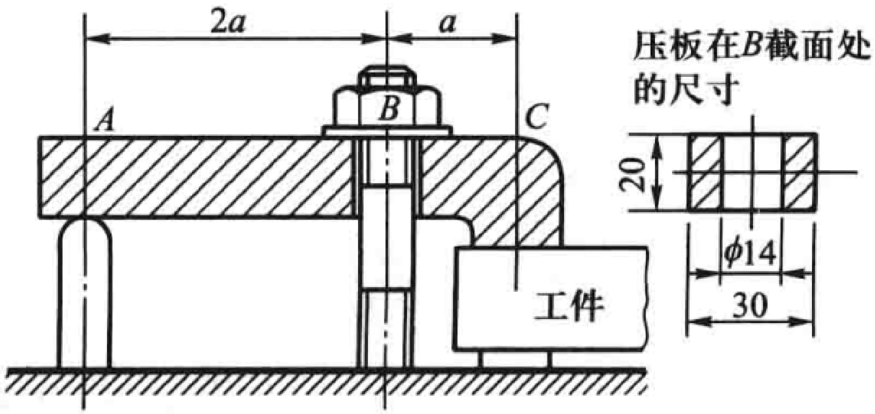
$$\sigma = \frac{My}{I_z}$$

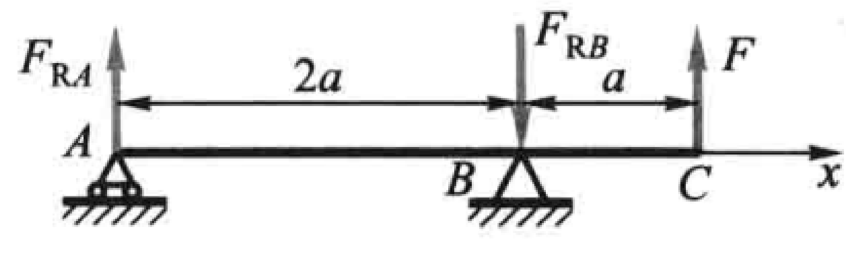


$$\sigma_{tmax} = \frac{My_{tmax}}{I_z}$$

$$\sigma_{cmax} = \frac{My_{cmax}}{I_z}$$

例5.1 螺栓压板夹紧装置如图所示。已知板长3a=150mm，压板材料的弯曲许用应力[σ]=140MPa。试计算压板传给工件的最大允许压紧力F。

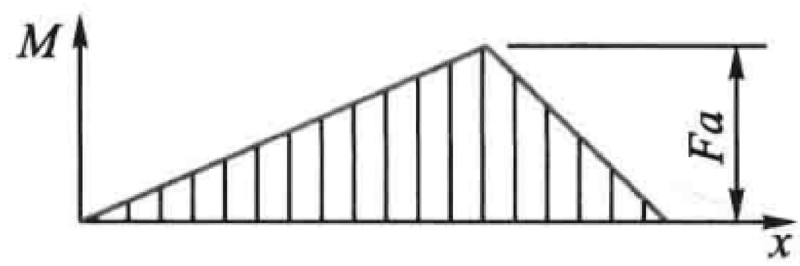




(b)

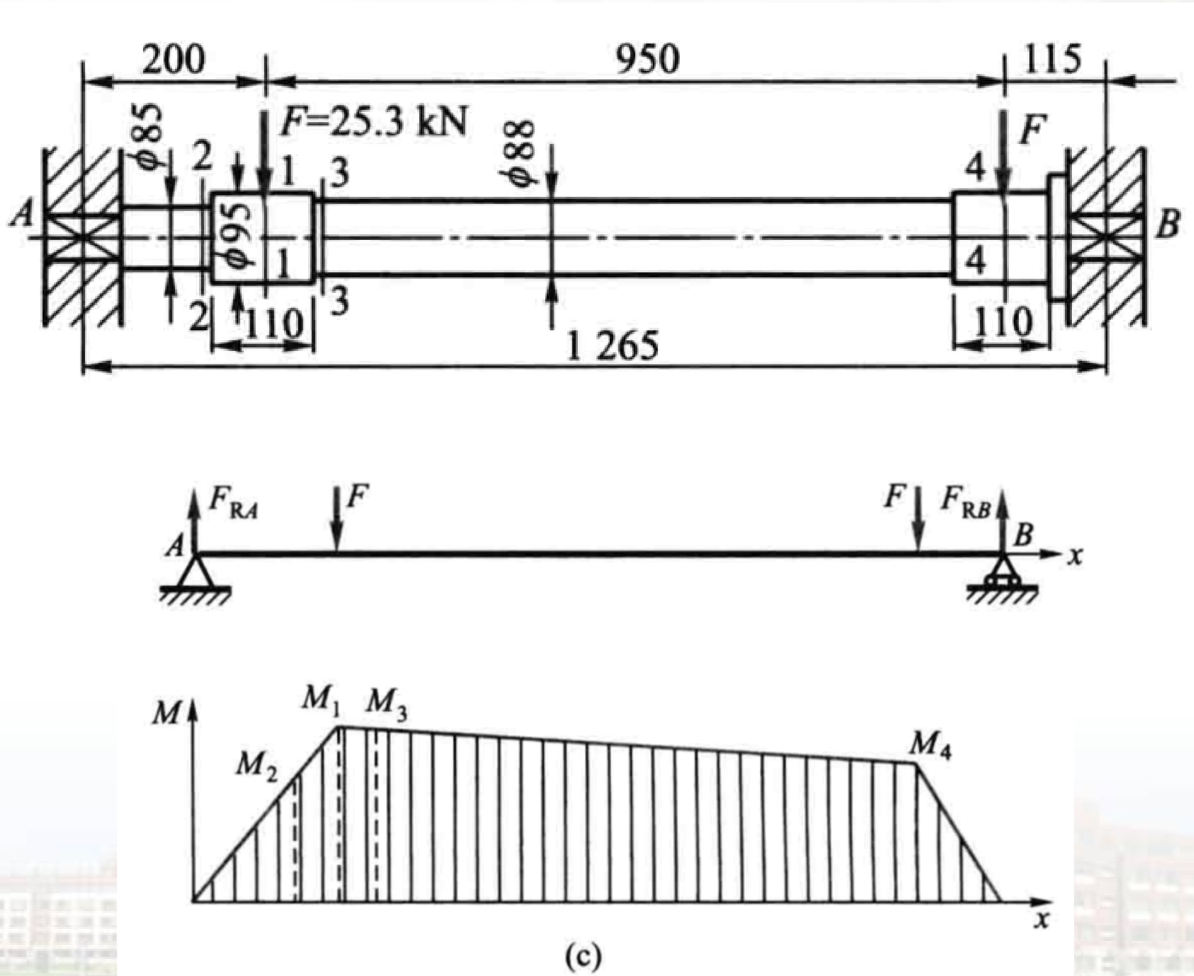
$$I_z = \frac{(3\ \text{cm})\times(2\ \text{cm})^3}{12} - \frac{(1.4\ \text{cm})\times(2\ \text{cm})^3}{12} = 1.07\ \text{cm}^4$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{1.07\ \text{cm}^4}{1\ \text{cm}} = 1.07\ \text{cm}^3$$

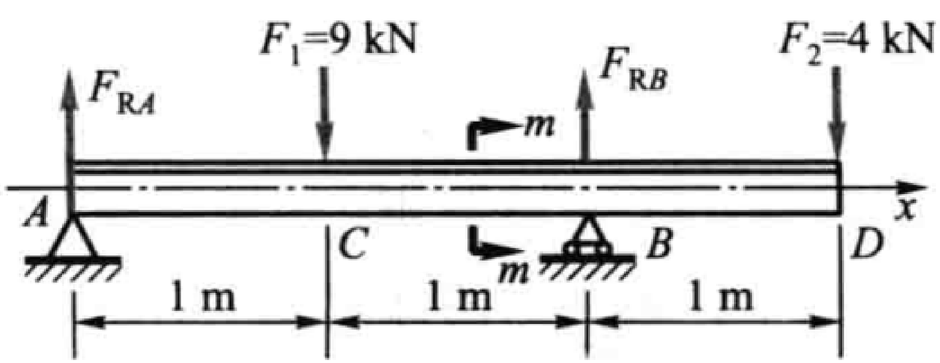


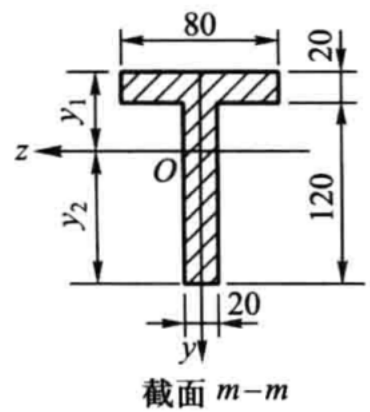
(c)

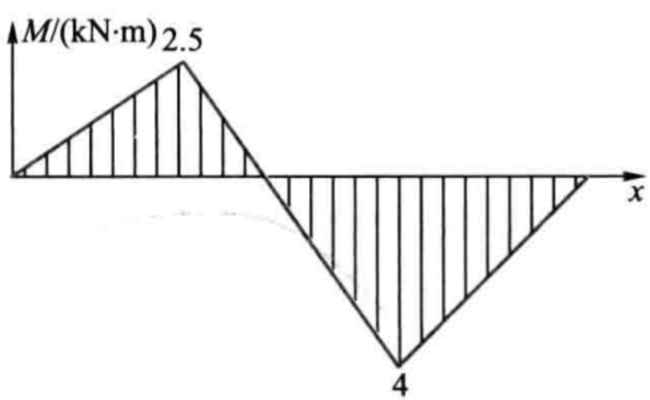
例5.2 卷扬机卷筒心轴的材料为45钢，弯曲许用应力[σ]=100MPa，心轴的结构和受力情况如图所示。F=25.3kN。试校核心轴的强度。

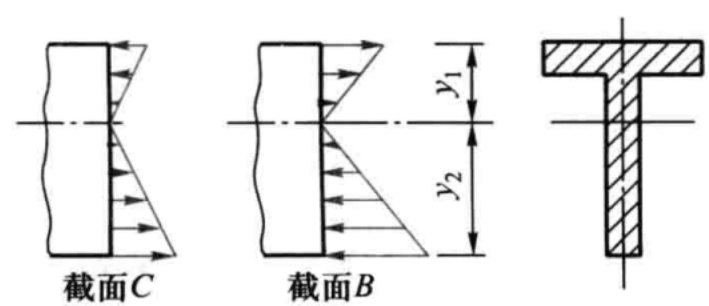


例5.3 T形截面铸铁梁的载荷和截面尺寸如图所示。铸铁的抗拉许用应力为$[\sigma_c]$=160MPa。已知截面对形心轴z的惯性矩为$I_z = 763cm^4$，且$|y_1| = 52$mm。试校核此梁的强度。









(c)

§5-4 弯曲切应力

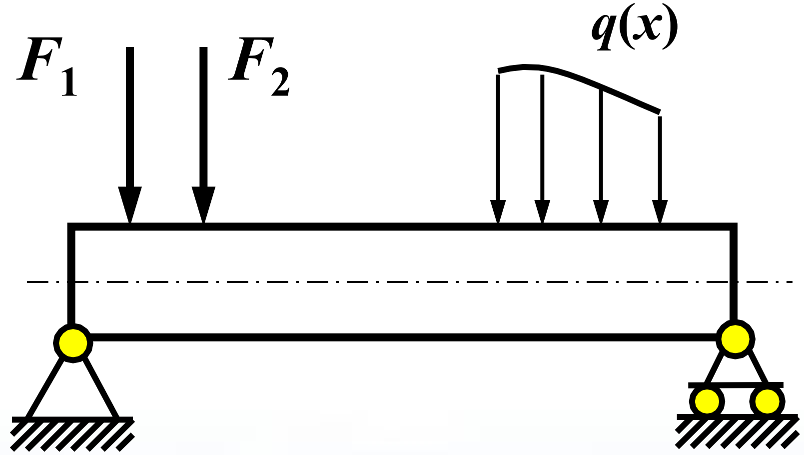
一、梁横截面上的切应力（Shear stresses in beams）

1. 矩形截面梁(Beam of rectangular cross section)

（1）两个假设(Two assumptions)

（a）切应力与剪力平行;

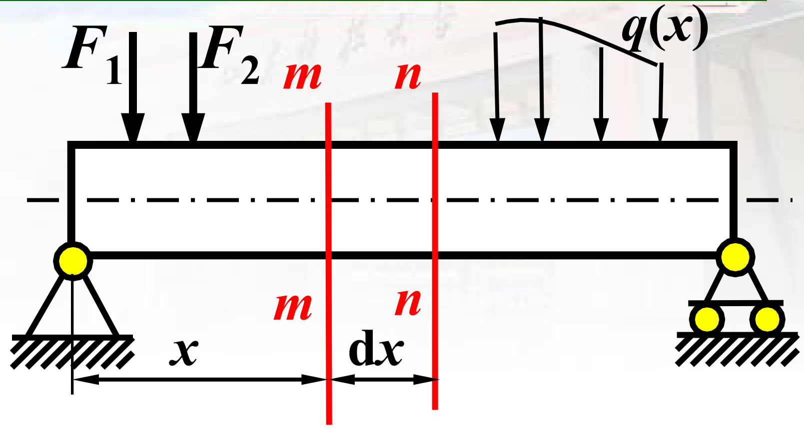
（b）切应力沿截面宽度均匀分布（距中性轴等距离处切应力相等）.



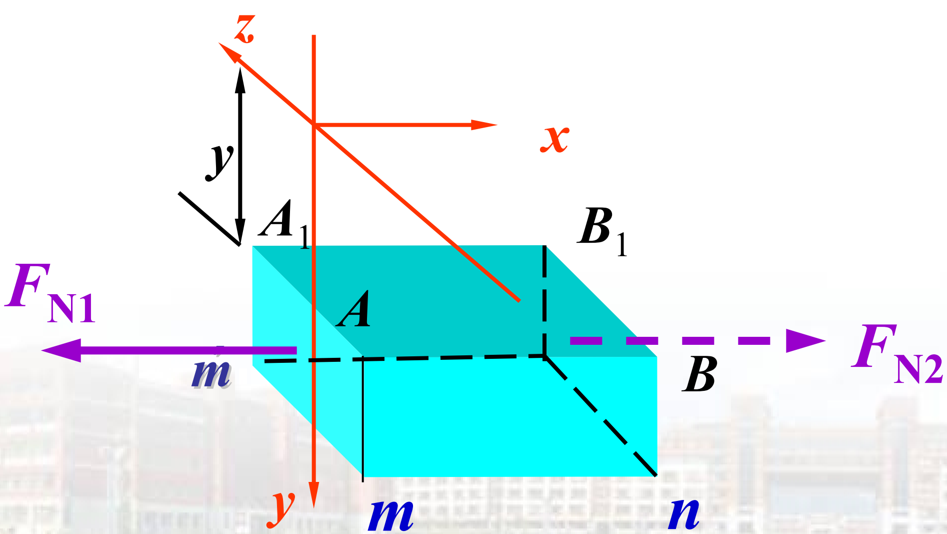
弯曲应力(Stresses in Beams)

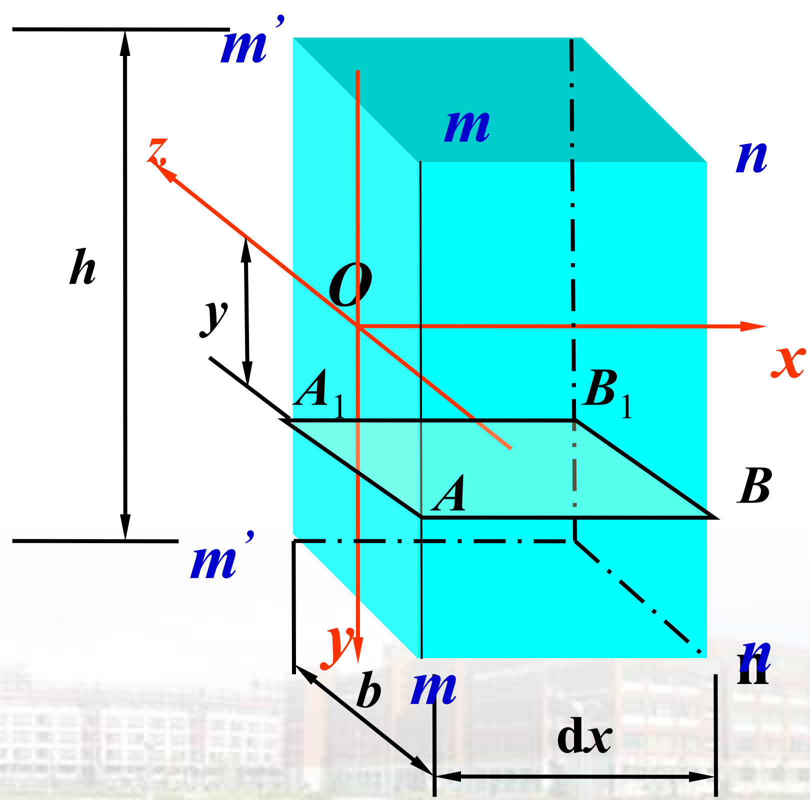
（2）分析方法(Analysis method)

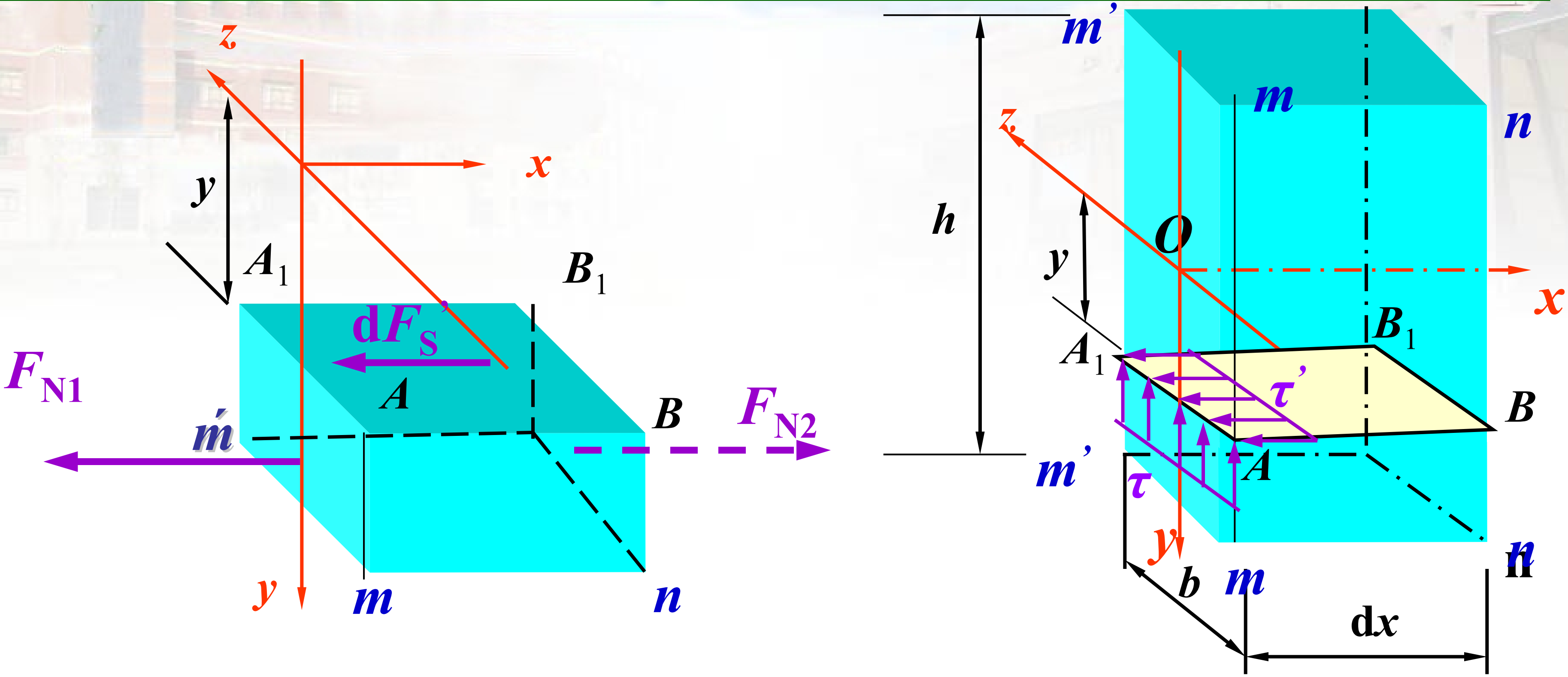
（a）用横截面m-m , n-n从梁中截取dx一段.两横截面上的弯矩不等. 所以两截面同一y处的正应力也不等;



（b）假想地从梁段上截出体积元素mB_1, 在两端面mA_1，nB_1上两个法向内力不等.







（c）在纵截面上必有沿 *x* 方向的切向内力dF_S'.故在此面上就有切应力τ.

根据假设，横截面上距中性轴等远的各点处切应力大小相等. 各点的切应力方向均与截面侧边平行.取分离体的平衡即可求出.