

# 上海市普通中学 2024 年高三下学期高考模拟（一）数学试题

## 注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

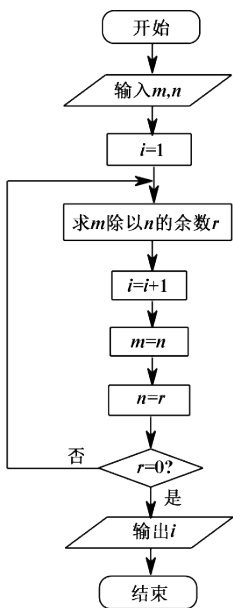
1. 以下关于  $f(x) = \sin 2x - \cos 2x$  的命题，正确的是

- A. 函数  $f(x)$  在区间  $\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$  上单调递增
- B. 直线  $x = \frac{\pi}{8}$  需是函数  $y = f(x)$  图象的一条对称轴
- C. 点  $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$  是函数  $y = f(x)$  图象的一个对称中心
- D. 将函数  $y = f(x)$  图象向左平移需  $\frac{\pi}{8}$  个单位，可得到  $y = \sqrt{2} \sin 2x$  的图象

2. 在直角  $\triangle ABC$  中， $\angle C = \frac{\pi}{2}$ ， $AB = 4$ ， $AC = 2$ ，若  $AD = \frac{3}{2}AB$ ，则  $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} = (\quad)$

- A.  $-18$                       B.  $-6\sqrt{3}$                       C.  $18$                       D.  $6\sqrt{3}$

3. 执行如图所示的程序框图，若输入  $m = 2020$ ， $n = 520$ ，则输出的  $i = (\quad)$



- A. 4                      B. 5                      C. 6                      D. 7

4. 学业水平测试成绩按照考生原始成绩从高到低分为  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$  五个等级。某班共有 36

名考生且全部选考物理、化学两科，这两科的学业水平测试成绩如图所示。该班考生中，这两科等级均为A的考生有5人，这两科中仅有一科等级为A的考生，其另外一科等级为B，则该班 ( )

等级 \ 科目	A	B	C	D	E
物理	10	16	9	1	0
化学	8	19	7	2	0

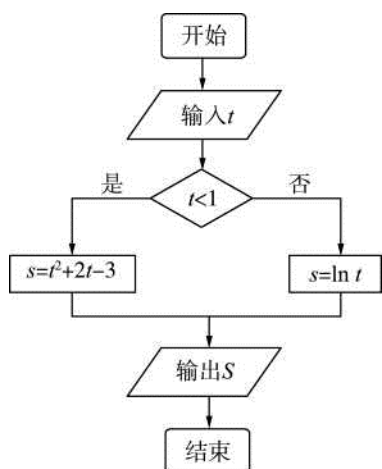
- A. 物理化学等级都是B的考生至多有12人  
B. 物理化学等级都是B的考生至少有5人  
C. 这两科只有一科等级为B且最高等级为B的考生至多有18人  
D. 这两科只有一科等级为B且最高等级为B的考生至少有1人
5. 若非零实数  $a$ 、 $b$  满足  $2^a = 3^b$ ，则下列式子一定正确的是 ( )

- A.  $b > a$                                       B.  $b < a$   
C.  $|b| < |a|$                                       D.  $|b| > |a|$

6. 函数  $f(x) = \sin(x + \theta)$  在  $[0, \pi]$  上为增函数，则  $\theta$  的值可以是 ( )

- A. 0                      B.  $\frac{\pi}{2}$                       C.  $\pi$                       D.  $\frac{3\pi}{2}$

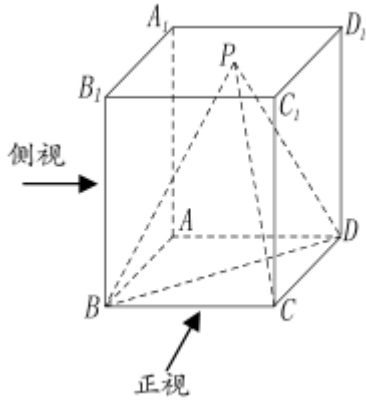
7. 执行如图所示的程序框图，如果输入  $t \in [-2, e^2]$ ，则输出  $S$  属于 ( )



- A.  $[-3, 2]$                       B.  $[-4, 2]$                       C.  $[0, 2]$                       D.  $[-3, e^2]$

8. 如图，在底面边长为1，高为2的正四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中，点  $P$  是平面  $A_1B_1C_1D_1$  内一点，则三棱锥  $P - BCD$

的正视图与侧视图的面积之和为 ( )



- A. 2                      B. 3                      C. 4                      D. 5

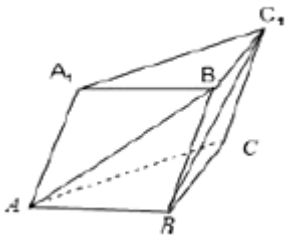
9. 已知函数  $f(x) = \sin 3x - \cos 3x$ , 给出下列四个结论: ①函数  $f(x)$  的值域是  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ ; ②函数  $f\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  为奇函数; ③函数  $f(x)$  在区间  $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$  单调递减; ④若对任意  $x \in \mathbf{R}$ , 都有  $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$  成立, 则  $|x_1 - x_2|$  的最小值为  $\frac{\pi}{3}$ ; 其中正确结论的个数是 ( )

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

10. 已知函数  $f(x) = A \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) - a$  ( $0 < a < A$ ) 在区间  $\left[0, \frac{7\pi}{3\omega}\right]$  有三个零点  $x_1, x_2, x_3$ , 且  $x_1 < x_2 < x_3$ , 若  $x_1 + 2x_2 + x_3 = \frac{5\pi}{3}$ , 则  $f(x)$  的最小正周期为 ( )

- A.  $\frac{\pi}{2}$                       B.  $\frac{2\pi}{3}$                       C.  $\pi$                       D.  $\frac{4\pi}{3}$

11. 三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中, 底面边长和侧棱长都相等,  $\angle BAA_1 = \angle CAA_1 = 60^\circ$ , 则异面直线  $AB_1$  与  $BC_1$  所成角的余弦值为 ( )



- A.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                       B.  $\frac{\sqrt{6}}{6}$                       C.  $\frac{\sqrt{3}}{4}$                       D.  $\frac{\sqrt{3}}{6}$

12. 已知  $\vec{a} = \left(2 \sin \frac{\omega x}{2}, \cos \frac{\omega x}{2}\right)$ ,  $\vec{b} = \left(\sqrt{3} \cos \frac{\omega x}{2}, 2 \cos \frac{\omega x}{2}\right)$ , 函数  $f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b}$  在区间  $\left[0, \frac{4\pi}{3}\right]$  上恰有 3 个极值点, 则正实数  $\omega$  的取值范围为 ( )

- A.  $[\frac{8}{5}, \frac{5}{2})$       B.  $[\frac{7}{4}, \frac{5}{2})$       C.  $[\frac{5}{3}, \frac{7}{4})$       D.  $(\frac{7}{4}, 2]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知  $\vec{a} = (1, 3)$ ,  $\vec{b} = (-2, 1)$ , 求  $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} =$  \_\_\_\_\_.

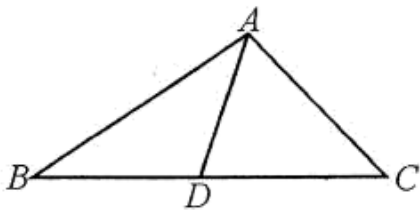
14. 若  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} y \leq 3 \\ x + y \geq 2 \\ x - 3y \leq 6 \end{cases}$ , 则  $z = x + 2y$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

15. 在数列  $\{a_n\}$  中, 已知  $a_1 = 1, a_n \cdot a_{n+1} = 2^n (n \in N^*)$ , 则数列  $\{a_n\}$  的前  $2n+1$  项和为  $S_{2n+1} =$  \_\_\_\_\_.

16. 《九章算术》中记载了“今有共买豕，人出一百，盈一百；人出九十，适足。问人数、豕价各几何？”其意思是“若干个人合买一头猪，若每人出 100，则会剩下 100；若每人出 90，则不多也不少。问人数、猪价各多少？”设  $x, y$  分别为人数、猪价，则  $x =$  \_\_\_\_\_,  $y =$  \_\_\_\_\_.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 如图, 在  $\triangle ABC$  中, 点  $D$  在  $BC$  上,  $\angle CAD = \frac{\pi}{4}$ ,  $AC = \frac{7}{2}$ ,  $\cos \angle ADB = -\frac{\sqrt{2}}{10}$ .



(1) 求  $\sin C$  的值;

(2) 若  $BD = 5$ , 求  $AB$  的长.

18. (12 分) 已知数列  $\{a_n\}$  为公差不为零的等差数列,  $S_n$  是数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 且  $a_1, a_2, a_5$  成等比数列,

$S_7 = 49$ . 设数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 且满足  $\log_2(T_n + 2) = \sqrt{S_{n+1}}$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$  的通项公式;

(2) 令  $c_n = \frac{a_n}{b_n} (n \in N^*)$ , 证明:  $c_1 + c_2 + \dots + c_n < 3$ .

19. (12 分) 已知函数  $f(x) = \ln x - a(x-1)$ ,  $a$  为实数, 且  $a > 0$ .

(I) 当  $a = 1$  时, 求  $f(x)$  的单调区间和极值;

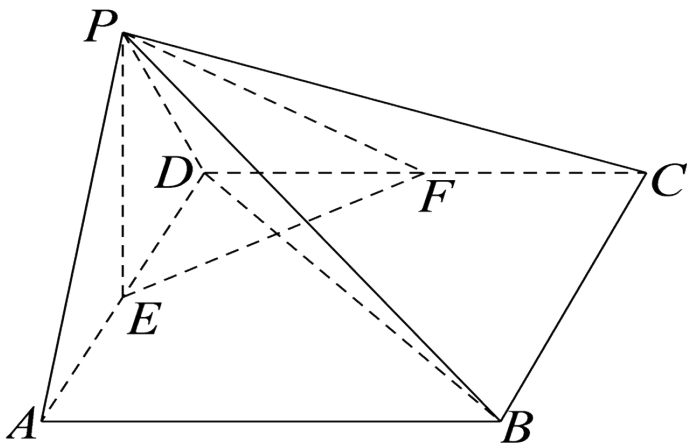
(II) 求函数  $f(x)$  在区间  $[1, e]$  上的值域 (其中  $e$  为自然对数的底数).

20. (12分) 在极坐标系中, 曲线  $C$  的极坐标方程为  $\rho = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)}, & 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi. \end{cases}$

(1) 求曲线  $C$  与极轴所在直线围成图形的面积;

(2) 设曲线  $C$  与曲线  $\rho \sin \theta = \frac{1}{2}$  交于  $A, B$  两点, 求  $|AB|$ .

21. (12分) 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  为菱形,  $\triangle PAD$  为正三角形, 平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$ ,  $E, F$  分别是  $AD, CD$  的中点.



(1) 证明:  $BD \perp$  平面  $PEF$

(2) 若  $\angle BAD = 60^\circ$ , 求二面角  $B-PD-A$  的余弦值.

22. (10分) 在  $\triangle ABC$ , 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 已知  $\cos B + (\cos A - 2\sin A)\cos C = 0$ .

(1) 求  $\cos C$  的值;

(2) 若  $a = \sqrt{5}$ ,  $AC$  边上的中线  $BM = \frac{\sqrt{17}}{2}$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

**参考答案**

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

利用辅助角公式化简函数得到  $f(x) = \sqrt{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4})$ ，再逐项判断正误得到答案。

【详解】

$$f(x) = \sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4})$$

A 选项， $x \in (0, \frac{2\pi}{3}) \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{4} \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{13\pi}{12})$  函数先增后减，错误

B 选项， $x = \frac{\pi}{8} \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = 0$  不是函数对称轴，错误

C 选项， $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ ，不是对称中心，错误

D 选项，图象向左平移需  $\frac{\pi}{8}$  个单位得到  $y = \sqrt{2} \sin(2(x + \frac{\pi}{8}) - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \sin 2x$ ，正确

故答案选 D

【点睛】

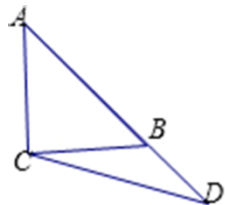
本题考查了三角函数的单调性，对称轴，对称中心，平移，意在考查学生对于三角函数性质的综合应用，其中化简三角函数是解题的关键。

2、C

【解析】

在直角三角形 ABC 中，求得  $\cos \angle CAB = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$ ，再由向量的加减运算，运用平面向量基本定理，结合向量数量积的定义和性质：向量的平方即为模的平方，化简计算即可得到所求值。

【详解】



在直角  $\triangle ABC$  中， $\angle C = \frac{\pi}{2}$ ， $AB = 4$ ， $AC = 2$ ，，

$$\cos \angle CAB = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$$

若  $\vec{AD} = \frac{3}{2} \vec{AB}$ ，则  $\vec{CD} \cdot \vec{CB} = (\vec{AD} - \vec{AC}) \cdot (\vec{AB} - \vec{AC}) = \vec{AD} \cdot \vec{AB} - \vec{AD} \cdot \vec{AC} - \vec{AC} \cdot \vec{AB} + \vec{AC}^2$

$$= \frac{3}{2} \vec{AB}^2 - \frac{3}{2} \vec{AB} \cdot \vec{AC} - \vec{AC} \cdot \vec{AB} + \vec{AC}^2 = \frac{3}{2} \times 16 - \frac{5}{2} \times 4 \times 2 \times \frac{1}{2} + 4 = 18.$$

故选 C.

【点睛】

本题考查向量的加减运算和数量积的定义和性质，主要是向量的平方即为模的平方，考查运算能力，属于中档题.

3、C

【解析】

根据程序框图程序运算即可得.

【详解】

依程序运算可得：

$r = 460, i = 2, m = 520, n = 460; r = 60, i = 3, m = 460, n = 60; r = 40, i = 4, m = 60, n = 40;$

$r = 20, i = 5, m = 40, n = 20; r = 0, i = 6,$

故选：C

【点睛】

本题主要考查了程序框图的计算，解题的关键是理解程序框图运行的过程.

4、D

【解析】

根据题意分别计算出物理等级为  $A$ ，化学等级为  $B$  的学生人数以及物理等级为  $B$ ，化学等级为  $A$  的学生人数，结合表格中的数据分析，可得出合适的选项.

【详解】

根据题意可知，36 名学生减去 5 名全  $A$  和一科为  $A$  另一科为  $B$  的学生  $10 - 5 + 8 - 5 = 8$  人（其中物理  $A$  化学  $B$  的有 5 人，物理  $B$  化学  $A$  的有 3 人），

表格变为：

	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$
物理	$10 - 5 - 5 = 0$	$16 - 3 = 13$	9	1	0
化学	$8 - 5 - 3 = 0$	$19 - 5 = 14$	7	2	0

对于 A 选项，物理化学等级都是  $B$  的学生至多有 13 人，A 选项错误；

对于 B 选项，当物理  $C$  和  $D$ ，化学都是  $B$  时，或化学  $C$  和  $D$ ，物理都是  $B$  时，物理、化学都是  $B$  的人数最少，至少为  $13 - 7 - 2 = 4$ （人），B 选项错误；

对于 C 选项，在表格中，除去物理化学都是  $B$  的学生，剩下的都是一科为  $B$  且最高等级为  $B$  的学生，

因为都是  $B$  的学生最少 4 人，所以一科为  $B$  且最高等级为  $B$  的学生最多为  $13 + 9 + 1 - 4 = 19$ （人），

C 选项错误；

对于 D 选项, 物理化学都是 B 的最多 13 人, 所以两科只有一科等级为 B 且最高等级为 B 的学生最少  $14 - 13 = 1$  (人),

D 选项正确.

故选: D.

【点睛】

本题考查合情推理, 考查推理能力, 属于中等题.

5、C

【解析】

令  $2^a = 3^b = t$ , 则  $t > 0$ ,  $t \neq 1$ , 将指数式化成对数式得  $a$ 、 $b$  后, 然后取绝对值作差比较可得.

【详解】

$$\text{令 } 2^a = 3^b = t, \text{ 则 } t > 0, t \neq 1, \therefore a = \log_2 t = \frac{\lg t}{\lg 2}, b = \log_3 t = \frac{\lg t}{\lg 3},$$

$$\therefore |a| - |b| = \frac{|\lg t|}{\lg 2} - \frac{|\lg t|}{\lg 3} = \frac{|\lg t|(\lg 3 - \lg 2)}{\lg 2 \cdot \lg 3} > 0, \text{ 因此, } |a| > |b|.$$

故选: C.

【点睛】

本题考查了利用作差法比较大小, 同时也考查了指数式与对数式的转化, 考查推理能力, 属于中等题.

6、D

【解析】

依次将选项中的  $\theta$  代入, 结合正弦、余弦函数的图象即可得到答案.

【详解】

当  $\theta = 0$  时,  $f(x) = \sin x$  在  $[0, \pi]$  上不单调, 故 A 不正确;

当  $\theta = \frac{\pi}{2}$  时,  $f(x) = \cos x$  在  $[0, \pi]$  上单调递减, 故 B 不正确;

当  $\theta = \pi$  时,  $f(x) = -\sin x$  在  $[0, \pi]$  上不单调, 故 C 不正确;

当  $\theta = \frac{3\pi}{2}$  时,  $f(x) = -\cos x$  在  $[0, \pi]$  上单调递增, 故 D 正确.

故选: D

【点睛】

本题考查正弦、余弦函数的单调性, 涉及到诱导公式的应用, 是一道容易题.

7、B



**【解析】**

由题意，框图的作用是求分段函数  $S(t) = \begin{cases} t^2 + 2t - 3, & t \in [-2, 1] \\ \ln t, & t \in [1, e^2] \end{cases}$  的值域，求解即得解.

**【详解】**

由题意可知，

框图的作用是求分段函数  $S(t) = \begin{cases} t^2 + 2t - 3, & t \in [-2, 1] \\ \ln t, & t \in [1, e^2] \end{cases}$  的值域，

当  $t \in [-2, 1)$ ,  $S \in [-4, 0)$ ;

当  $t \in [1, e^2]$ ,  $S \in [0, 2]$

综上:  $S \in [-4, 2]$ .

故选: B

**【点睛】**

本题考查了条件分支的程序框图，考查了学生逻辑推理，分类讨论，数学运算的能力，属于基础题.

8、A

**【解析】**

根据几何体分析正视图和侧视图的形状，结合题干中的数据可计算出结果.

**【详解】**

由三视图的性质和定义知，三棱锥  $P-BCD$  的正视图与侧视图都是底边长为2高为1的三角形，其面积都是  $\frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$ ，正视图与侧视图的面积之和为  $1+1=2$ ，

故选: A.

**【点睛】**

本题考查几何体正视图和侧视图的面积和，解答的关键就是分析出正视图和侧视图的形状，考查空间想象能力与计算能力，属于基础题.

9、C

**【解析】**

化  $f(x)$  的解析式为  $\sqrt{2} \sin(3x - \frac{\pi}{4})$  可判断①，求出  $f(x + \frac{\pi}{4})$  的解析式可判断②，由  $x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$  得

$3x - \frac{\pi}{4} \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ ，结合正弦函数得图象即可判断③，由

$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$  得  $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{T}{2}$  可判断④.

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/737052064152010002>