

# 2024 年高三年级期初调研检测

## 数学试题

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上, 并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需要改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号. 回答非选择题时, 将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合  $A = \{x | y = \ln(4-x)\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )

- A.  $\{5\}$                       B.  $\{1, 2, 3\}$                       C.  $\{1, 2, 3, 4\}$                       D.  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据对数中真数大于 0 解出集合 A, 再利用交集含义即可得到答案.

【详解】 $A = \{x | y = \ln(4-x)\} = \{x | x < 4\}$ , 则  $A \cap B = \{1, 2, 3\}$ .

故选: B.

2. 已知复数  $z$  满足  $(1+2i)\bar{z} = 4+3i$ , 则  $z$  的虚部为 ( )

- A. 1                              B. -1                              C. i                              D. -i

【答案】A

【解析】

【分析】根据复数的除法的计算公式得  $\bar{z} = 2-i$ , 再根据共轭复数和复数虚部的概念即可.

【详解】 $\bar{z} = \frac{4+3i}{1+2i} = \frac{(4+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{10-5i}{5} = 2-i$ ,

则  $z = 2+i$ , 则其虚部为 1.

故选: A.

3. 已知命题  $p: \forall \alpha \in \mathbf{R}, \sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ , 则  $\neg p$  为 ( )

- A.  $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) \neq \cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$       B.  $\exists \alpha \in \mathbf{R}, \sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) \neq \cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$   
C.  $\forall \alpha \notin \mathbf{R}, \sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$       D.  $\exists \alpha \notin \mathbf{R}, \sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$

【答案】B

【解析】

【分析】根据全称量词命题的否定, 否定结论, 全称变特称即可.

【详解】根据全称量词命题的否定, 否定结论, 全称变特称, 则  $\neg p$  为 “ $\exists \alpha \in \mathbf{R}$ ,

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) \neq \cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$$
”.

故选: B.

4. 等差数列  $\{a_n\}$  的首项为  $-1$ , 公差不为  $0$ , 若  $a_2, a_3, a_6$  成等比数列, 则  $\{a_n\}$  的前  $6$  项和为 ( )

- A.  $-1$                                       B.  $3$                                       C.  $-24$                                       D.  $24$

【答案】D

【解析】

【分析】根据等比中项得到方程, 解出  $d=2$ , 后根据等差数列求和公式计算即可.

【详解】 $a_2, a_3, a_6$  成等比数列, 则  $a_3^2 = a_2 \cdot a_6$ , 即  $(a_1 + 2d)^2 = (a_1 + d) \cdot (a_1 + 5d)$ ,

$a_1 = -1$  代入, 得到  $(-1 + 2d)^2 = (-1 + d) \cdot (-1 + 5d)$ ,  $d \neq 0$ , 解得  $d = 2$ .

则  $\{a_n\}$  的前  $6$  项和  $S_6 = 6 \times (-1) + \frac{6 \times 5}{2} \times 2 = 24$ .

故选: D.

5. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 角  $\alpha$  与角  $\beta$  均以  $x$  轴的非负半轴为始边, 它们的终边关于  $x$  轴对称. 若

$\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ , 则  $\cos(\alpha - \beta) =$  ( )

- A.  $\frac{1}{9}$                                       B.  $-\frac{7}{9}$                                       C.  $1$                                       D.  $\frac{7}{9}$

【答案】B

【解析】

【分析】运用角的终边对称性，得到正弦余弦值之间的关系，再用两角差的余弦值计算即可。

【详解】角  $\alpha$  与角  $\beta$  均以  $x$  轴的非负半轴为始边，它们的终边关于  $x$  轴对称。

$$\text{则 } \cos \alpha = \cos \beta = -\frac{1}{3}, \quad \sin \alpha = -\sin \beta, \quad \text{且 } \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{8}{9}, \quad \sin \alpha \cdot \sin \beta = -\sin^2 \alpha = -\frac{8}{9},$$

$$\text{故 } \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{9} - \frac{8}{9} = -\frac{7}{9}.$$

故选：B

6. 两个粒子  $A, B$  从同一发射源发射出来，在某一时刻，它们的位移分别为  $\vec{S}_A = (1, 2)$ ， $\vec{S}_B = (4, 3)$ 。粒子  $B$  相对粒子  $A$  的位移为  $\vec{S}$ ，则  $\vec{S}$  在  $\vec{S}_A$  上的投影向量为（ ）

- A.  $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$       B.  $(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$       C.  $(1, 2)$       D.  $(2, 1)$

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意，求得  $\vec{S} = \vec{S}_B - \vec{S}_A = (3, 1)$ ，结合向量的数量积的公式和投影向量的公式，准确计算，即可求解。

【详解】由向量  $\vec{S}_A = (1, 2)$ ， $\vec{S}_B = (4, 3)$ ，可得粒子  $B$  相对粒子  $A$  的位移为  $\vec{S} = \vec{S}_B - \vec{S}_A = (3, 1)$ ，

$$\text{可得 } \vec{S}_A \cdot \vec{S} = 1 \times 3 + 2 \times 1 = 5 \text{ 且 } |\vec{S}_A| = \sqrt{5},$$

$$\text{所以 } \vec{S} \text{ 在 } \vec{S}_A \text{ 上的投影向量为 } \frac{\vec{S}_A \cdot \vec{S}}{|\vec{S}_A|} \cdot \frac{\vec{S}_A}{|\vec{S}_A|} = \frac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} \cdot (1, 2) = (1, 2).$$

故选：C.

7. 设  $f(x) = \begin{cases} (x+a)^2, & x \leq 0 \\ x + \frac{1}{x} + a, & x > 0 \end{cases}$ ，若  $f(0)$  是  $f(x)$  的最小值，则  $a$  的取值范围为（ ）

- A.  $[-1, 0]$       B.  $[-1, 2]$       C.  $[-2, -1]$       D.  $[-2, 0]$

【答案】A

【解析】

【分析】根据分段函数的最值，结合二次函数和基本不等式，二次不等式求解。

$$\text{【详解】由于 } f(x) = \begin{cases} (x+a)^2, & x \leq 0 \\ x + \frac{1}{x} + a, & x > 0 \end{cases}, \text{ 则当 } x=0, f(0) = a^2. \text{ 由于 } f(0) \text{ 是 } f(x) \text{ 的最小值,}$$

则  $(-\infty, 0]$  为减区间, 即有  $a \leq 0$ . 则  $a^2 \leq x + \frac{1}{x} + a, x > 0$  恒成立.

由  $x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \times \frac{1}{x}} = 2$ , 当且仅当  $x = 1$  取最值. 则  $a^2 \leq 2 + a$ , 解得  $-1 \leq a \leq 2$ .

则  $a$  的取值范围为  $[-1, 0]$ .

故选: A.

8. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ . 以  $F_1F_2$  为直径的圆和  $C$  的渐近线

在第一象限交于  $A$  点, 直线  $AF_1$  交  $C$  的另一条渐近线于点  $B$ ,  $\overline{F_1B} = \overline{BA}$ , 则  $C$  的离心率为 ( )

- A.  $\sqrt{2}$                       B.  $\sqrt{3}$                       C. 2                      D. 3

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意, 利用双曲线的对称性, 得到  $\angle AOF_2 = \angle F_1OB = \angle AOB = \frac{\pi}{3}$ , 结合双曲线的几何性

质, 求得  $\frac{b}{a} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ , 进而求得双曲线的离心率, 得到答案.

【详解】如图所示, 因为  $\overline{F_1B} = \overline{BA}$ , 可得点  $B$  为线段  $F_1A$  的中点, 则  $OB \perp F_1A$ ,

可得  $\angle F_1OB = \angle AOB$ ,

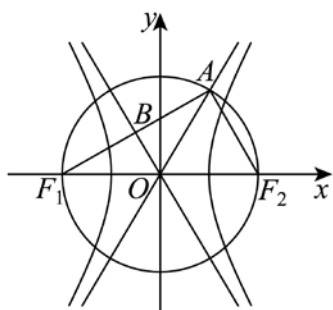
因为直线  $OA, OB$  是双曲线的渐近线, 由双曲线的对称性可知  $\angle AOF_2 = \angle F_1OB$ ,

所以  $\angle AOF_2 = \angle F_1OB = \angle AOB = \frac{\pi}{3}$ ,

可得直线  $OA$  的斜率为  $\frac{b}{a} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ , 则  $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$ ,

所以双曲线  $C$  的离心率为 2.

故选: C.



二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 一组数据： $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  是公差为  $-2$  的等差数列，去掉首末两项  $x_1, x_{10}$  后得到一组新数据，则 ( )

- A. 两组数据的极差相同  
 B. 两组数据的中位数相同  
 C. 两组数据的平均数相同  
 D. 两组数据的标准差相同

【答案】BC

【解析】

【分析】根据平均数的概念结合等差数列的性质判断 C，由中位数的概念可判断 B，由方差及等差数列的通项公式计算即可判断 D，根据极差及等差数列的通项公式可判断 A。

【详解】对于 C，原数据的平均数为  $\bar{x} = \frac{1}{10}(x_1 + x_2 + \dots + x_{10}) = \frac{1}{10} \times 5(x_5 + x_6) = \frac{1}{2}(x_5 + x_6)$ ，

去掉  $x_1, x_{10}$  后的平均数为  $\bar{x}' = \frac{1}{8}(x_2 + x_3 + \dots + x_9) = \frac{1}{8} \times 4(x_5 + x_6) = \frac{1}{2}(x_5 + x_6) = \bar{x}$ ，则 C 正确；

对于 B，原数据的中位数为  $\frac{1}{2}(x_5 + x_6)$ ，

去掉  $x_1, x_{10}$  后的中位数仍为  $\frac{1}{2}(x_5 + x_6)$ ，即中位数没变，则 B 正确；

对于 A，原数据的极差为  $x_1 - x_{10} = -9d = 18$ ，

去掉  $x_1, x_{10}$  后的极差为  $x_2 - x_9 = -7d = 14$ ，即极差变小，则 A 错误；

对于 D，设公差为  $d$ ，则原数据的方差为

$$s^2 = \frac{1}{10} \left\{ \left[ x_1 - \frac{1}{2}(x_5 + x_6) \right]^2 + \left[ x_2 - \frac{1}{2}(x_5 + x_6) \right]^2 + \dots + \left[ x_{10} - \frac{1}{2}(x_5 + x_6) \right]^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{10} \left[ \left(-\frac{9}{2}d\right)^2 + \left(-\frac{7}{2}d\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}d\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}d\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}d\right)^2 + \left(\frac{1}{2}d\right)^2 + \right.$$

$$\left. \left(\frac{3}{2}d\right)^2 + \left(\frac{5}{2}d\right)^2 + \left(\frac{7}{2}d\right)^2 + \left(\frac{9}{2}d\right)^2 \right] = 33,$$

$$\text{去掉 } x_1, x_{10} \text{ 后的方差为 } s'^2 = \frac{1}{8} \left\{ \left[ x_2 - \frac{1}{2}(x_5 + x_6) \right]^2 + \left[ x_3 - \frac{1}{2}(x_5 + x_6) \right]^2 + \dots + \left[ x_9 - \frac{1}{2}(x_5 + x_6) \right]^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{8} \left[ \left(-\frac{7}{2}d\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}d\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}d\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}d\right)^2 + \left(\frac{1}{2}d\right)^2 + \left(\frac{3}{2}d\right)^2 + \left(\frac{5}{2}d\right)^2 + \left(\frac{7}{2}d\right)^2 \right] = 21,$$

即方差变小，标准差也变小，则 D 错误。

故选：BC

10. 平面  $\alpha$  过正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的顶点 A，平面  $\alpha //$  平面  $CB_1D_1$ ，平面  $\alpha \cap$  平面  $ABCD = m$ ，平

面  $\alpha \cap$  平面  $ABB_1A_1 = n$ ，则 ( )

- A.  $B_1D_1 // m$                       B.  $A_1B //$  平面  $\alpha$                       C.  $n \perp$  平面  $ADC_1B_1$                       D.  $m, n$  所成的角为  $\frac{\pi}{3}$

【答案】ABC

【解析】

【分析】设平面  $\alpha \cap$  平面  $A_1B_1C_1D_1 = m'$  证得  $m // m'$  和  $m' // B_1D_1$ ，可判定 A 正确；过  $D_1C$  作平面  $\gamma$ ，设平面  $\gamma \cap$  平面  $\alpha = a$ ，证得  $A_1B // a$ ，可判定 B 正确；设平面  $\alpha \cap$  平面  $DCC_1D_1 = n'$ ，证得  $n' \perp$  平面  $ADC_1B_1$ ，可判定 C 正确；把  $m, n$  所成的角转化为  $B_1D_1$  与  $D_1C$  所成的角，结合  $\square CB_1D_1$  为等边三角形，可判定 D 不正确.

【详解】对于 A 中，设平面  $\alpha \cap$  平面  $A_1B_1C_1D_1 = m'$

在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中，可得平面  $ABCD //$  平面  $A_1B_1C_1D_1$ ，

因为平面  $\alpha \cap$  平面  $ABCD = m$ ，所以  $m // m'$ ，

又因为平面  $\alpha //$  平面  $CB_1D_1$ ，且平面  $\alpha \cap$  平面  $A_1B_1C_1D_1 = m'$ ，

平面  $CB_1D_1 \cap$  平面  $A_1B_1C_1D_1 = B_1D_1$ ，所以  $m' // B_1D_1$ ，所以  $m // B_1D_1$ ，所以 A 正确；

对于 B 中，在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中，可得  $A_1B // D_1C$ ，

因为平面  $\alpha //$  平面  $CB_1D_1$ ，且平面  $D_1C \subset$  平面  $CB_1D_1$ ，所以  $D_1C //$  平面  $\alpha$ ，

过  $D_1C$  作平面  $\gamma$ ，设平面  $\gamma \cap$  平面  $\alpha = a$ ，可得  $D_1C // a$ ，

可得  $A_1B // a$ ，且  $A_1B \not\subset \alpha$ ，所以  $A_1B //$  平面  $\alpha$ ，所以 B 正确；

对于 C 中，设平面  $\alpha \cap$  平面  $DCC_1D_1 = n'$ ，

因为平面  $\alpha //$  平面  $CB_1D_1$  且平面  $CB_1D_1 \cap$  平面  $DCC_1D_1 = D_1C$ ，所以  $n' // D_1C$ ，

在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中，可得  $AD \perp$  平面  $DCC_1D_1$ ，

因为  $D_1C \subset$  平面  $DCC_1D_1$ ，所以  $AD \perp D_1C$ ，

又因为  $DC_1 \perp D_1C$ ，且  $AD \cap DC_1 = D$ ， $AD, DC_1 \subset$  平面  $ADC_1B_1$ ，

所以  $D_1C \perp$  平面  $ADC_1B_1$ ，所以  $n' \perp$  平面  $ADC_1B_1$ ，

在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中，可得平面  $ABB_1A_1 //$  平面  $DCC_1D_1$ ，

因为平面  $\alpha \cap$  平面  $DCC_1D_1 = n'$ ，平面  $\alpha \cap$  平面  $ABB_1A_1 = n$ ，所以  $n // n'$ ，

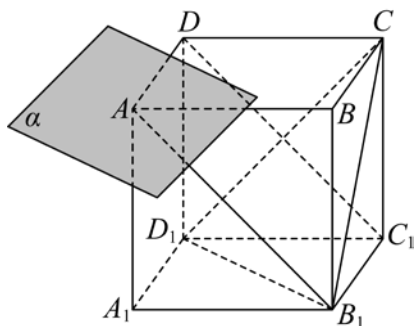
所以  $n \perp$  平面  $ADC_1B_1$ ，所以 C 正确；

对于 D 中，因为  $m // B_1D_1$  且  $n // D_1C$ ，所以  $m, n$  所成的角，即为  $B_1D_1$  与  $D_1C$  所成的角，

因为  $\square CB_1D_1$  为等边三角形，可得  $\angle CD_1B_1 = \frac{\pi}{3}$ ，

所以异面直线  $m, n$  所成的角为  $\frac{\pi}{3}$ ，所以 D 不正确。

故选：ABC.



11. 设数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的项数均为  $m$ ，称  $\sum_{i=1}^m |a_i - b_i|$  为数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的距离. 记满足  $a_{n+1} = \frac{1+a_n}{1-a_n}$  的所有数

列  $\{a_n\}$  构成的集合为  $C$ . 已知数列  $\{A_n\}$  和  $\{B_n\}$  为  $C$  中的两个元素，项数均为  $m$ ，下列正确的有 ( )

A. 数列 1,3,5,7 和数列 2,4,6,8 的距离为 4

B. 若  $m = 4p (p \in \mathbb{N}^*)$ ，则  $A_1A_2 \cdots A_m = B_1B_2 \cdots B_m$

C. 若  $m = 4p (p \in \mathbb{N}^*)$ ，则  $\sum_{i=1}^m |A_i| \leq m$

D. 若  $A_1 = 2$ ， $B_1 = 3$ ，数列  $\{A_n\}$  和  $\{B_n\}$  的距离小于 2017，则  $m$  的最大值为 3456

【答案】ABD

【解析】

【分析】根据数列距离的定义求两数列的距离判断 A，结合数列  $\{A_n\}$ ， $\{B_n\}$  的递推关系证明两数列具有

周期性，判断 B，利用基本不等式求  $|A_{4k+1}| + |A_{4k+2}| + |A_{4k+3}| + |A_{4k+4}|$ ，由此求  $\sum_{i=1}^m |A_i|$ ，判断 C，由条件求

$\sum_{i=1}^4 |A_i - B_i| = \frac{7}{3}$ ，结合周期性可求  $\sum_{i=1}^{3456} |A_i - B_i|$ ， $\sum_{i=1}^{3457} |A_i - B_i|$ ，由此判断 D.

【详解】对于 A，根据数列距离的定义可得：

数列1,3,5,7和数列2,4,6,8的距离为 $|1-2|+|3-4|+|5-6|+|7-8|=4$ ，A正确；

对于B，设 $A_1=t$ ，其中 $t \neq 0$ ，且 $t \neq \pm 1$ ，由 $A_{n+1} = \frac{1+A_n}{1-A_n}$ ，

$$\text{所以 } A_2 = \frac{1+t}{1-t}, A_3 = -\frac{1}{t}, A_4 = \frac{t-1}{t+1}, A_5 = t,$$

则 $A_1 = A_5$ ，

因此数列 $\{A_n\}$ 中的项周期性重复，且间隔4项重复一次，

$$\text{所以 } A_{4k+1}A_{4k+2}A_{4k+3}A_{4k+4} = 1, 1 \leq k \leq p-1, p \in \mathbf{N}^*,$$

设 $B_1=s$ ，其中 $s \neq 0$ ，且 $s \neq \pm 1$ ，由 $B_{n+1} = \frac{1+B_n}{1-B_n}$ ，

$$\text{所以 } B_2 = \frac{1+s}{1-s}, B_3 = -\frac{1}{s}, B_4 = \frac{s-1}{s+1}, B_5 = s,$$

则 $B_1 = B_5$ ，

因此数列 $\{B_n\}$ 中的项周期性重复，且间隔4项重复一次，

$$\text{所以 } B_{4k+1}B_{4k+2}B_{4k+3}B_{4k+4} = 1, 1 \leq k \leq p-1, p \in \mathbf{N}^*,$$

所以若 $m = 4p$  ( $p \in \mathbf{N}^*$ )，则 $A_1A_2 \cdots A_m = B_1B_2 \cdots B_m$ ，B正确；

$$\text{因为 } |A_{4k+1}| + |A_{4k+2}| + |A_{4k+3}| + |A_{4k+4}| = |t| + \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + \left| -\frac{1}{t} \right| + \left| \frac{t-1}{t+1} \right|, \text{ 其中 } t \neq 0, \text{ 且 } t \neq \pm 1,$$

$$\text{所以 } |t| \neq \frac{1}{|t|}, \left| \frac{t+1}{t-1} \right| \neq \left| \frac{t-1}{t+1} \right|,$$

$$\text{所以 } |A_{4k+1}| + |A_{4k+2}| + |A_{4k+3}| + |A_{4k+4}| = |t| + \frac{1}{|t|} + \left| \frac{t+1}{t-1} \right| + \left| \frac{t-1}{t+1} \right| > 2 + 2 = 4,$$

所以若 $m = 4p$  ( $p \in \mathbf{N}^*$ )， $\sum_{i=1}^m |A_i| > 4p = m$ ，C错误；

所以数列 $\{A_n\}$ 中， $A_{4k-3} = 2$ ， $A_{4k-2} = -3$ ， $A_{4k-1} = -\frac{1}{2}$ ， $A_{4k} = \frac{1}{3}$ ， $k \in \mathbf{N}^*$ ，

故 $\{B_n\}$ 中， $B_{4k-3} = 3$ ， $B_{4k-2} = -2$ ， $B_{4k-1} = -\frac{1}{3}$ ， $B_{4k} = \frac{1}{2}$ ， $k \in \mathbf{N}^*$ ，

$$\sum_{i=1}^{k+1} |b_i - c_i| \geq \sum_{i=1}^k |b_i - c_i|,$$

所以项数  $m$  越大, 数列  $\{A_n\}$  和  $\{B_n\}$  的距离越大,

$$\text{由 } \sum_{i=1}^4 |A_i - B_i| = \frac{7}{3}, \text{ 可得 } \sum_{i=1}^{3456} |b_i - c_i| = \frac{7}{3} \times 864 = 2016,$$

$$\sum_{i=1}^{3457} |b_i - c_i| = 2016 + 1 = 2017,$$

$$\text{所以 } m \leq 3456 \text{ 时, } \sum_{i=1}^m |b_i - c_i| < 2017,$$

故  $m$  的最大值为 3456;

所以数列  $\{A_n\}$  和  $\{B_n\}$  的距离小于 2017, 则  $m$  的最大值为 3456, D 正确.

故选: ABD.

**【点睛】**“新定义”主要是指即时定义新概念、新公式、新定理、新法则、新运算五种, 然后根据此新定义去解决问题, 有时还需要用类比的方法去理解新的定义, 这样有助于对新定义的透彻理解. 但是, 透过现象看本质, 它们考查的还是基础数学知识, 所以说“新题”不一定是“难题”, 掌握好三基, 以不变应万变才是制胜法宝.

### 三、填空题: 本题共 3 个小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 若曲线  $y = ax \cos x$  在点  $(0, 0)$  处的切线斜率为  $-1$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

**【答案】**  $-1$

**【解析】**

**【分析】**先求导, 再代入  $0$ , 运用导数几何意义可解.

**【详解】**求导得到  $y' = a(\cos x - x \sin x)$ , 将  $0$  代入导数, 运用导数几何意义, 得

$$a(\cos 0 - \sin 0) = a = -1.$$

故答案为:  $-1$ .

13. 若  $x_1 = \frac{\pi}{3}$ ,  $x_2 = \pi$  是函数  $f(x) = \sin \omega x (\omega > 0)$  的两个相邻极值点, 则  $\omega =$  \_\_\_\_\_.

**【答案】**  $\frac{3}{2}$

**【解析】**

**【分析】**根据题意得到借助最小正周期公式, 再用两个相邻极值点相差半个周期可解.

**【详解】** $x_1 = \frac{\pi}{3}$ ,  $x_2 = \pi$  是函数  $f(x) = \sin \omega x (\omega > 0)$  的两个相邻极值点, 则  $\frac{1}{2}T = (\pi - \frac{\pi}{3})$ ,

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{\omega} = (\pi - \frac{\pi}{3}), \text{ 解得 } \omega = \frac{3}{2}.$$

故答案为:  $\frac{3}{2}$

14. 正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 3,  $P$  是侧面  $ADD_1A_1$  (包括边界) 上一动点,  $E$  是棱  $CD$  上一点, 若  $\angle APB = \angle DPE$ , 且  $\triangle APB$  的面积是  $\square DPE$  面积的 9 倍, 则三棱锥  $P-ABE$  体积的最大值是\_\_\_\_\_.

**【答案】**  $\frac{9\sqrt{2}}{8}$

**【解析】**

**【分析】** 由条件先证明  $\square APB \sim \square EPD$ , 结合面积关系可得  $AP = 3PD$ , 在平面  $ADD_1A_1$  上建立平面直角坐标系, 确定点  $P$  的轨迹方程, 结合体积公式求三棱锥  $P-ABE$  体积的最大值.

**【详解】** 由已知  $AB \perp$  平面  $ADD_1A_1$ ,  $AP \subset$  平面  $ADD_1A_1$ ,

所以  $AB \perp AP$ ,

因为  $DE \perp$  平面  $ADD_1A_1$ ,  $DP \subset$  平面  $ADD_1A_1$ ,

所以  $DE \perp DP$ ,

所以  $\angle BAP = \angle EDP = 90^\circ$ , 又  $\angle APB = \angle DPE$ ,

所以  $\square APB \sim \square DPE$ , 又  $\triangle APB$  的面积是  $\square DPE$  面积的 9 倍,

$$\text{所以 } \frac{|AP|}{|DP|} = \frac{1}{3},$$

以点  $D$  为原点,  $\overline{DA}, \overline{DC}, \overline{DD_1}$  为  $x, y, z$  轴建立空间直角坐标系,

则  $A(3, 0, 0)$ ,  $D(0, 0, 0)$ ,

设点  $P$  的坐标为  $(x, 0, z)$ , 则  $0 \leq x \leq 3$ ,  $0 \leq z \leq 3$ ,

由已知  $|AP| = 3|PD|$ ,

$$\text{所以 } \sqrt{(x-3)^2 + z^2} = 3\sqrt{x^2 + z^2},$$

$$\text{所以 } x^2 + z^2 + \frac{3}{4}x - \frac{9}{8} = 0, \text{ 其中 } 0 \leq x \leq 3, 0 \leq z \leq 3,$$

所以点  $P$  的轨迹为以点  $(-\frac{3}{8}, 0, 0)$  为圆心,  $\frac{9}{8}$  为半径的圆在侧面  $ADD_1A_1$  内的一段圆弧,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/738007007042006127>