2023年天津市高考数学试卷

一、选择题（在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的）

1. 已知集合 $U=\{1,2,3,4,5\}, A=\{1,3\}, B=\{1,2,4\}$, 则 $C_U B\cup A=$（　　）

A. $\{1,3,5\}$　　B. $\{1,3\}$　　C. $\{1,2,4\}$　　D. $\{1,2,4,5\}$

2. "$a^2=b^2$"是"$a^2+b^2=2ab$"的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

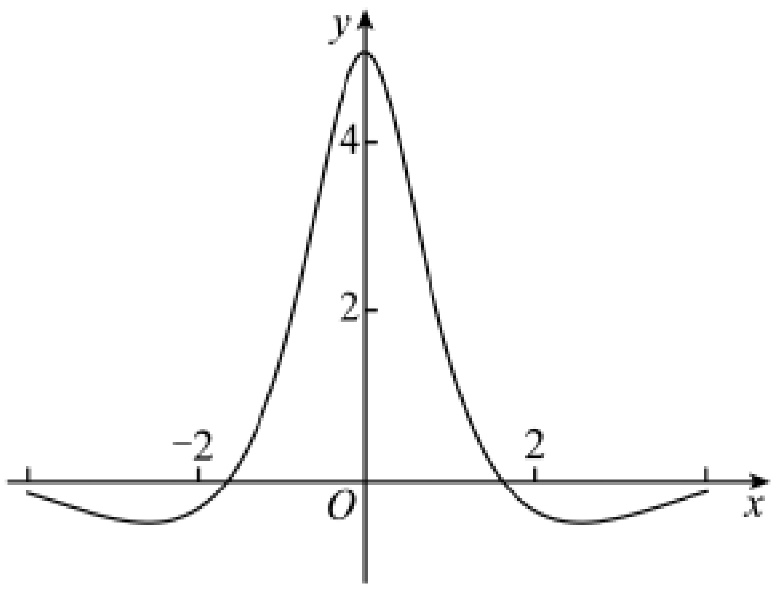
C. 充分必要条件　　D. 既不充分又不必要条件

3. 若 $a=1.01^{0.5}, b=1.01^{0.6}, c=0.6^{0.5}$, 则 a,b,c 的大小关系为（　　）

A. $c>a>b$　　B. $c>b>a$

C. $a>b>c$　　D. $b>a>c$

4. 函数 $f(x)$ 的图象如下图所示, 则 $f(x)$ 的解析式可能为（　　）



A. $\dfrac{5\left(e^x-e^{-x}\right)}{x^2+2}$　　B. $\dfrac{5\sin x}{x^2+1}$

C. $\dfrac{5\left(e^x+e^{-x}\right)}{x^2+2}$　　D. $\dfrac{5\cos x}{x^2+1}$

5. 已知函数 $f(x)$ 的一条对称轴为直线 $x=2$, 一个周期为 4, 则 $f(x)$ 的解析式可能为（　　）

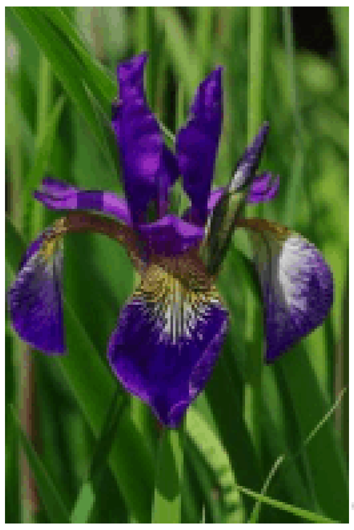
A. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$　　B. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$

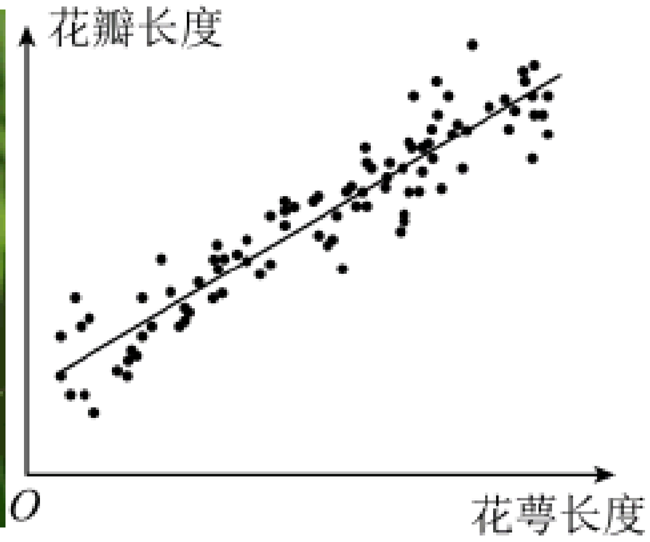
C. $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)$　　D. $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)$

6. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_{n+1}=2S_n+2$, 则 a_4 的值为（　　）

A. 3　　B. 18　　C. 54　　D. 152

7. 调查某种群花萼长度和花瓣长度, 所得数据如图所示, 其中相关系数 $r=0.8245$, 下列说法正确的是（　　）





A. 花瓣长度和花萼长度没有相关性

B. 花瓣长度和花萼长度呈现负相关

C. 花瓣长度和花萼长度呈现正相关

D. 若从样本中抽取一部分,则这部分的相关系数一定是0.8245

8. 在三棱锥 $P-ABC$ 中,线段 PC 上的点 M 满足 $PM=\frac{1}{3}PC$,线段 PB 上的点 N 满足 $PN=\frac{2}{3}PB$,则三棱锥 $P-AMN$ 和三棱锥 $P-ABC$ 的体积之比为（　　）

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{2}{9}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{4}{9}$

9. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2. 过 F_2 作其中一条渐近线的垂线,垂足为 P. 已知 $PF_2=2$,直线 PF_1 的斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$,则双曲线的方程为（　　）

A. $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$　　B. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{8}=1$

C. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$　　D. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$

二、填空题：本大题共 **6** 小题,每小题 **5** 分,共 **30** 分．试题中包含两个空的,答对 **1** 个的给 **3** 分,全部答对的给 **5** 分．

10. 已知 i 是虚数单位,化简 $\frac{5+14\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}$ 的结果为________.

11. 在 $\left(2x^3-\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中,x^2 项的系数为________.

12. 过原点的一条直线与圆 $C:(x+2)^2+y^2=3$ 相切,交曲线 $y^2=2px(p>0)$ 于点 P,若 $|OP|=8$,则 p 的值为________.

13. 甲乙丙三个盒子中装有一定数量的黑球和白球,其总数之比为 $5:4:6$．这三个盒子中黑

球占总数的比例分别为$40\%,25\%,50\%$．现从三个盒子中各取一个球，取到的三个球都是黑球的概率为________；将三个盒子混合后任取一个球，是白球的概率为________．

14. 在$\triangle ABC$中，$\angle A=60^\circ$，$BC=1$，点D为AB的中点，点E为CD的中点，若设$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，则$\overrightarrow{AE}$可用$\vec{a},\vec{b}$表示为________；若$\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$的最大值为________．

15. 若函数$f\left(x\right)=ax^2-2x-\left|x^2-ax+1\right|$有且仅有两个零点，则$a$的取值范围为________．

三、解答题：本大题共**5**小题，共**75**分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

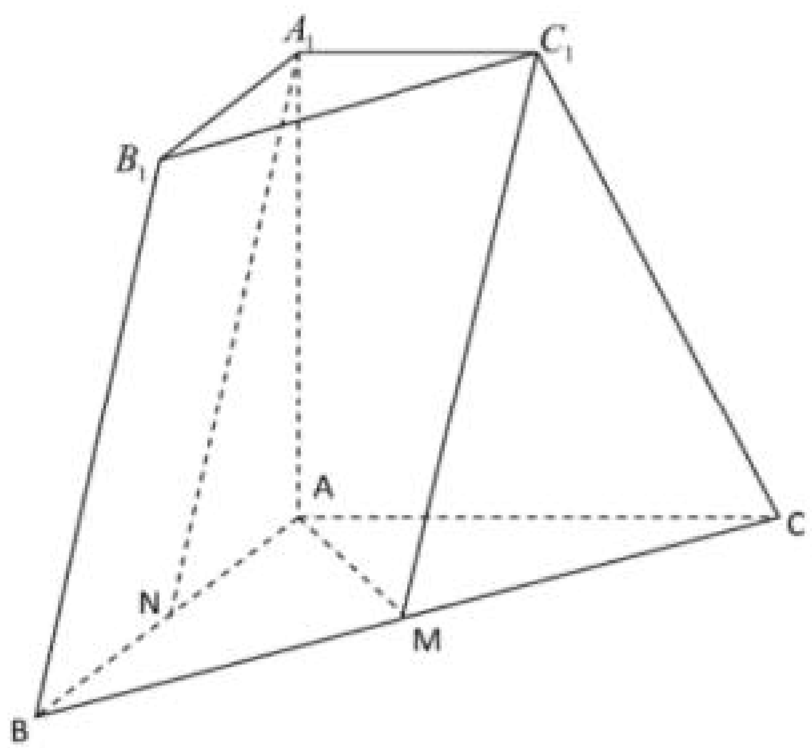
16. 在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别是a,b,c．已知$a=\sqrt{39},b=2,\angle A=120^\circ$．

（1）求$\sin B$的值；

（2）求c的值；

（3）求$\sin\left(B-C\right)$．

17. 三棱台$ABC-A_1B_1C_1$中，$A_1A\perp$面$ABC,AB\perp AC,AB=AC=AA_1=2,A_1C_1=1$
M,N分别是BC,BA中点．



（1）求证：A_1N//平面C_1MA；

（2）求平面C_1MA与平面ACC_1A_1所成夹角的余弦值；

（3）求点C到平面C_1MA的距离．

18. 设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右顶点分别为$A_1,A_2$，右焦点为$F$，已知$\left|A_1F\right|=3,\left|A_2F\right|=1$．

（1）求椭圆方程及其离心率；

（2）已知点 P 是椭圆上一动点（不与端点重合），直线 A_2P 交 y 轴于点 Q，若三角形 A_1PQ 的面积是三角形 A_2FP 面积的二倍，求直线 A_2P 的方程.

19. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，$a_2+a_5=16, a_5-a_3=4$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式和 $\sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} a_i$.

（2）已知 $\{b_n\}$ 为等比数列，对于任意 $k\in \mathrm{N}^*$，若 $2^{k-1}\le n\le 2^k-1$，则 $b_k<a_n<b_{k+1}$，

（□）当 $k\ge 2$ 时，求证：$2^k-1<b_k<2^k+1$；

（□）求 $\{b_n\}$ 的通项公式及其前 n 项和.

20. 已知函数 $f(x)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)\ln(x+1)$.

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 处切线的斜率；

（2）当 $x>0$ 时，证明：$f(x)>1$；

（3）证明：$\frac{5}{6}<\ln(n!)-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n)+n\le 1$.

2023年天津市高考数学试卷答案

一、选择题（在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知集合$U=\{1,2,3,4,5\}, A=\{1,3\}, B=\{1,2,4\}$，则$C_U B\cup A=$（　　）

A. $\{1,3,5\}$　　B. $\{1,3\}$　　C. $\{1,2,4\}$　　D. $\{1,2,4,5\}$

【详解】由$C_U B=\{3,5\}$，而$A=\{1,3\}$

所以$C_U B\cup A=\{1,3,5\}$.

故选：A.

2. “$a^2=b^2$”是“$a^2+b^2=2ab$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分又不必要条件

【详解】由$a^2=b^2$，则$a=\pm b$，当$a=-b\neq 0$时$a^2+b^2=2ab$不成立，充分性不成立；

由$a^2+b^2=2ab$，则$(a-b)^2=0$，即$a=b$，显然$a^2=b^2$成立，必要性成立；

所以$a^2=b^2$是$a^2+b^2=2ab$的必要不充分条件.

故选：B.

3. 若$a=1.01^{0.5}, b=1.01^{0.6}, c=0.6^{0.5}$，则$a,b,c$的大小关系为（　　）

A. $c>a>b$　　B. $c>b>a$

C. $a>b>c$　　D. $b>a>c$

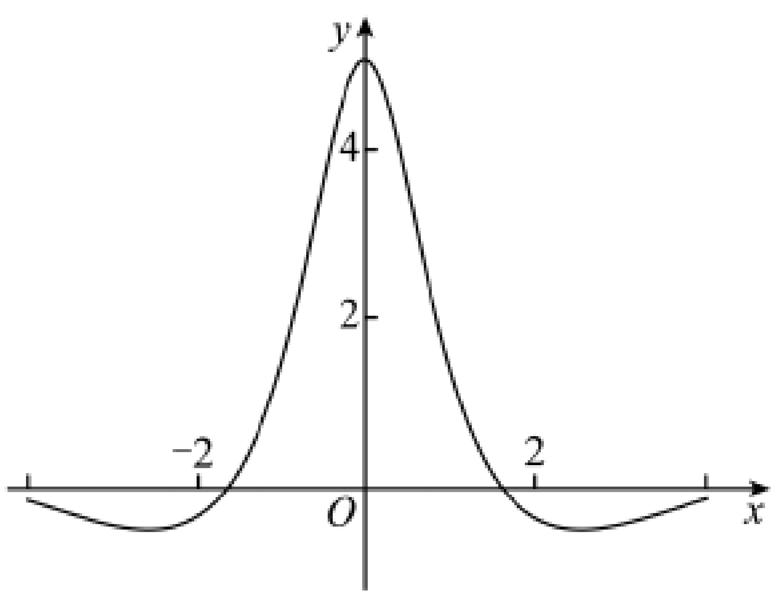
【详解】由$y=1.01^x$在R上递增，则$a=1.01^{0.5}<b=1.01^{0.6}$

由$y=x^{0.5}$在$[0,+\infty)$上递增，则$a=1.01^{0.5}>c=0.6^{0.5}$.

所以$b>a>c$.

故选：D.

4. 函数$f(x)$的图象如下图所示，则$f(x)$的解析式可能为（　　）



A. $\dfrac{5\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{x^{2}+2}$　　B. $\dfrac{5\sin x}{x^{2}+1}$

C. $\dfrac{5\left(e^{x}+e^{-x}\right)}{x^{2}+2}$　　D. $\dfrac{5\cos x}{x^{2}+1}$

【分析】由图知函数为偶函数, 先判断 B 中函数的奇偶性, 再判断 A、C 中函数在 $(0,+\infty)$ 上的函数符号排除选项, 即得答案.

【详解】由图知：函数图象关于 y 轴对称, 其为偶函数, 且 $f(-2)=f(2)<0$

由 $\dfrac{5\sin(-x)}{(-x)^{2}+1}=-\dfrac{5\sin x}{x^{2}+1}$ 且定义域为 R, 即 B 中函数为奇函数, 排除；

当 $x>0$ 时, $\dfrac{5(e^{x}-e^{-x})}{x^{2}+2}>0$ 、 $\dfrac{5(e^{x}+e^{-x})}{x^{2}+2}>0$, 即 A、C 中 $(0,+\infty)$ 上函数值为正, 排除；

故选：D.

5. 已知函数 $f\left(x\right)$ 的一条对称轴为直线 $x=2$, 一个周期为 4, 则 $f\left(x\right)$ 的解析式可能为（　　）

A. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$　　B. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$

C. $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)$　　D. $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)$

【详解】由函数的解析式考查函数的最小周期性：

A 选项中 $T=\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$, B 选项中 $T=\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$, C 选项中 $T=\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8$, D 选项中 $T=\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8$,

排除选项 CD.

对于 A 选项, 当 $x=2$ 时, 函数值 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\times 2\right)=0$, 故 $\left(2,0\right)$ 是函数的一个对称中心, 排除选项 A.

对于 B 选项, 当 $x=2$ 时, 函数值 $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\times 2\right)=-1$, 故 $x=2$ 是函数的一条对称轴.

故选：B.

6. 已知 $\left\{a_{n}\right\}$ 为等比数列, S_{n} 为数列 $\left\{a_{n}\right\}$ 的前 n 项和, $a_{n+1}=2S_{n}+2$, 则 a_{4} 的值为（　　）

A. 3　　B. 18　　C. 54　　D. 152

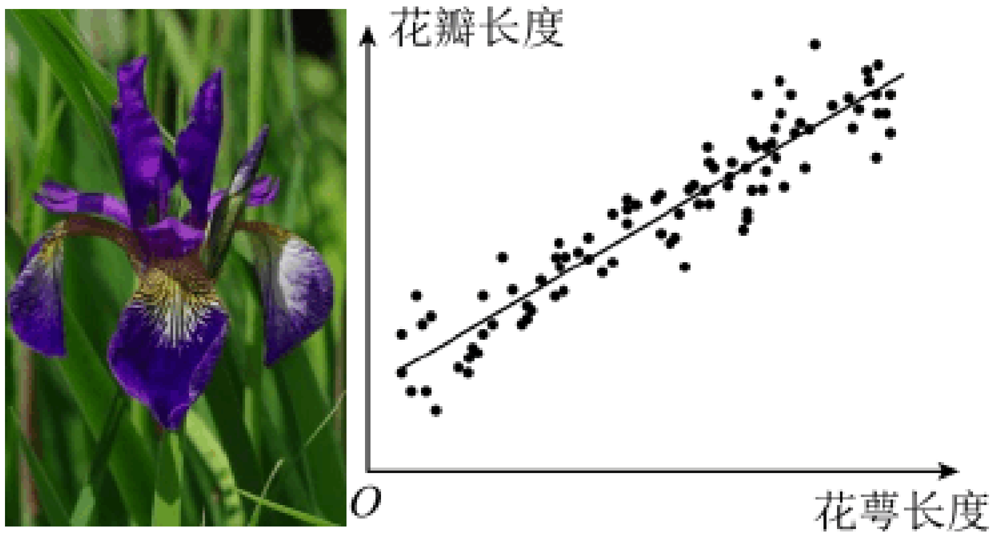
【详解】由题意可得：当 $n=1$ 时, $a_{2}=2a_{1}+2$, 即 $a_{1}q=2a_{1}+2$, ①

当 $n=2$ 时, $a_{3}=2\left(a_{1}+a_{2}\right)+2$, 即 $a_{1}q^{2}=2\left(a_{1}+a_{1}q\right)+2$, ②

联立①②可得 $a_{1}=2, q=3$, 则 $a_{4}=a_{1}q^{3}=54$.

故选：C.

7. 调查某种群花萼长度和花瓣长度, 所得数据如图所示, 其中相关系数 $r=0.8245$, 下列说法正确的是（　　）



A. 花瓣长度和花萼长度没有相关性

B. 花瓣长度和花萼长度呈现负相关

C. 花瓣长度和花萼长度呈现正相关

D. 若从样本中抽取一部分, 则这部分的相关系数一定是 0.8245

【详解】根据散点的集中程度可知,花瓣长度和花萼长度有相关性,A 选项错误;

散点的分布是从左下到右上,从而花瓣长度和花萼长度呈现正相关性,B 选项错误,C 选项正确;

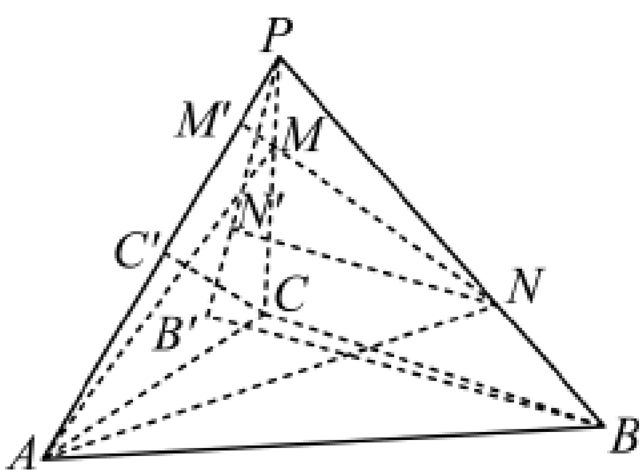
由于 $r=0.8245$ 是全部数据的相关系数,取出来一部分数据,相关性可能变强,可能变弱,即取出的数据的相关系数不一定是 0.8245 ,D 选项错误.

故选：C.

8. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, 线段 PC 上的点 M 满足 $PM=\frac{1}{3}PC$, 线段 PB 上的点 N 满足 $PN=\frac{2}{3}PB$, 则三棱锥 $P-AMN$ 和三棱锥 $P-ABC$ 的体积之比为（　　）

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{2}{9}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{4}{9}$

【详解】如图, 分别过 M , C 作 $MM' \perp PA, CC' \perp PA$,垂足分别为 M' , C' .过 B 作 $BB' \perp$ 平面 PAC , 垂足为 B' , 连接 PB' ,过 N 作 $NN' \perp PB'$,垂足为 N' .



因为 $BB' \perp$ 平面 PAC , $BB' \subset$ 平面 PBB' , 所以平面 $PBB' \perp$ 平面 PAC .

又因为平面 $PBB'\cap$ 平面 $PAC=PB'$，$NN'\perp PB'$，$NN'\subset$ 平面 PBB'，所以 $NN'\perp$ 平面 PAC，且 $BB'//NN'$．

在 $\triangle PCC'$ 中，因为 $MM'\perp PA, CC'\perp PA$，所以 $MM'//CC'$，所以 $\dfrac{PM}{PC}=\dfrac{MM'}{CC'}=\dfrac{1}{3}$

在 $\triangle PBB'$ 中，因为 $BB'//NN'$，所以 $\dfrac{PN}{PB}=\dfrac{NN'}{BB'}=\dfrac{2}{3}$

所以 $\dfrac{V_{P-AMN}}{V_{P-ABC}}=\dfrac{V_{N-PAM}}{V_{B-PAC}}=\dfrac{\frac{1}{3}S_{\triangle PAM}\cdot NN'}{\frac{1}{3}S_{\triangle PAC}\cdot BB'}=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}PA\cdot MM'\right)\cdot NN'}{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}PA\cdot CC'\right)\cdot BB'}=\dfrac{2}{9}$．

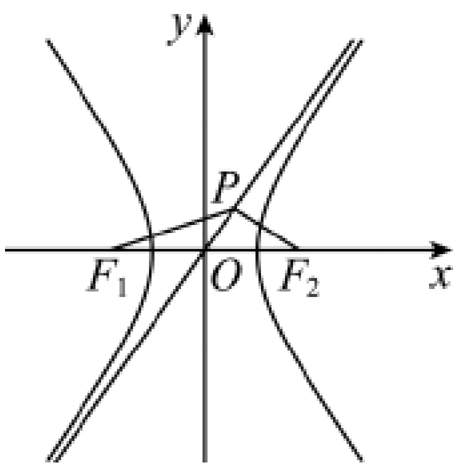
故选：B.

9. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2．过 F_2 作其中一条渐近线的垂线，垂足为 P．已知 $PF_2=2$，直线 PF_1 的斜率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，则双曲线的方程为（　　）

A. $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{4}=1$　　B. $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{8}=1$

C. $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{2}=1$　　D. $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{4}=1$

【详解】如图



因为 $F_2\left(c,0\right)$，不妨设渐近线方程为 $y=\dfrac{b}{a}x$，即 $bx-ay=0$

所以 $\left|PF_2\right|=\dfrac{|bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{bc}{c}=b$

所以 $b=2$．

设 $\angle POF_2=\theta$，则 $\tan\theta=\dfrac{\left|PF_2\right|}{|OP|}=\dfrac{b}{|OP|}=\dfrac{b}{a}$，所以 $|OP|=a$，所以 $\left|OF_2\right|=c$．

因为$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}c\cdot y_P$,所以$y_P=\frac{ab}{c}$,所以$\tan\theta=\frac{y_P}{x_P}=\frac{\frac{ab}{c}}{x_P}=\frac{b}{a}$,所以$x_P=\frac{a^2}{c}$

所以$P\left(\frac{a^2}{c},\frac{ab}{c}\right)$

因为$F_1(-c,0)$

所以$k_{PF_1}=\frac{\frac{ab}{c}}{\frac{a^2}{c}+c}=\frac{ab}{a^2+c^2}=\frac{2a}{a^2+a^2+4}=\frac{a}{a^2+2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

所以$\sqrt{2}\left(a^2+2\right)=4a$, 解得$a=\sqrt{2}$

所以双曲线的方程为$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$.

故选：D.

二、填空题：本大题共 **6** 小题, 每小题 **5** 分, 共 **30** 分．试题中包含两个空的, 答对 **1** 个的给 **3** 分, 全部答对的给 **5** 分．

10. 已知i是虚数单位, 化简$\frac{5+14\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}$的结果为________.

【详解】由题意可得$\frac{5+14\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}=\frac{(5+14\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}{(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}=\frac{52+13\mathrm{i}}{13}=4+\mathrm{i}$.

故答案为：$4+\mathrm{i}$.

11. 在$\left(2x^3-\frac{1}{x}\right)^6$的展开式中, x^2项的系数为________.

【详解】展开式的通项公式$T_{k+1}=\mathrm{C}_6^k\left(2x^3\right)^{6-k}\left(-\frac{1}{x}\right)^k=(-1)^k\times2^{6-k}\times\mathrm{C}_6^k\times x^{18-4k}$

令$18-4k=2$可得, $k=4$

则x^2项的系数为$(-1)^4\times2^{6-4}\times\mathrm{C}_6^4=4\times15=60$.

故答案为：60.

12. 过原点的一条直线与圆$C:(x+2)^2+y^2=3$相切, 交曲线$y^2=2px(p>0)$于点P, 若$|OP|=8$, 则p的值为________.

【详解】易知圆$(x+2)^2+y^2=3$和曲线$y^2=2px$关于x轴对称,不妨设切线方程为$y=kx$, $k>0$

所以$\dfrac{|2k|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{3}$,解得：$k=\sqrt{3}$,由$\begin{cases}y=\sqrt{3}x\\y^2=2px\end{cases}$解得：$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=\dfrac{2p}{3}\\y=\dfrac{2\sqrt{3}p}{3}\end{cases}$

所以$|OP|=\sqrt{\left(\dfrac{2p}{3}\right)^2+\left(\dfrac{2\sqrt{3}p}{3}\right)^2}=\dfrac{4p}{3}=8$,解得：$p=6$.

当$k=-\sqrt{3}$时,同理可得.

故答案为：6.

13. 甲乙丙三个盒子中装有一定数量的黑球和白球,其总数之比为$5:4:6$．这三个盒子中黑球占总数的比例分别为$40\%,25\%,50\%$．现从三个盒子中各取一个球,取到的三个球都是黑球的概率为________；将三个盒子混合后任取一个球,是白球的概率为________.

【详解】设甲、乙、丙三个盒子中的球的个数分别为$5n,4n,6n$,所以总数为$15n$

所以甲盒中黑球个数为$40\%\times5n=2n$,白球个数为$3n$；

甲盒中黑球个数为$25\%\times4n=n$,白球个数为$3n$；

甲盒中黑球个数为$50\%\times6n=3n$,白球个数为$3n$；

记“从三个盒子中各取一个球,取到的球都是黑球”为事件A,所以

$P(A)=0.4\times0.25\times0.5=0.05$；

记“将三个盒子混合后取出一个球,是白球”为事件B

黑球总共有$2n+n+3n=6n$个,白球共有$9n$个

所以,$P(B)=\dfrac{9n}{15n}=\dfrac{3}{5}$.

故答案为：0.05；$\dfrac{3}{5}$.

14. 在$\triangle ABC$中,$\angle A=60^\circ$,$BC=1$,点D为AB的中点,点E为CD的中点,若设$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AC}=\vec{b}$,则$\overrightarrow{AE}$可用$\vec{a},\vec{b}$表示为________；若$\overrightarrow{BF}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$,则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$的最大值为________.

【详解】空1：因为E为CD的中点,则$\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EC}=\vec{0}$,可得$\begin{cases}\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AD}\\\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AC}\end{cases}$

两式相加,可得到$2\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}$

即$2\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$,则$\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$；