

江苏省泰兴市实验中学 2023-2024 学年高三第一次调研测试数学试卷

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ， $A = \{1, 3, 5\}$ ， $B = \{2, 3, 4\}$ ，则集合 $\complement_U(A \cup B) = (\quad)$

- A. $\{1, 2, 6\}$ B. $\{1, 3, 6\}$ C. $\{1, 6\}$ D. $\{6\}$

2. 下列与 $\frac{9\pi}{4}$ 的终边相同的角的表达式中正确的是()

- A. $2k\pi + 45^\circ (k \in \mathbb{Z})$ B. $k \cdot 360^\circ + \frac{9}{4}\pi (k \in \mathbb{Z})$
C. $k \cdot 360^\circ - 315^\circ (k \in \mathbb{Z})$ D. $k\pi + \frac{5\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$

3. 幻方最早起源于我国，由正整数 $1, 2, 3, \dots, n^2$ 这 n^2 个数填入 $n \times n$ 方格中，使得每行、每列、每条对角线上的数的和相等，这个正方形数阵就叫 n 阶幻方。定义 $f(n)$ 为 n 阶幻方对角线上所有数的和，如 $f(3) = 15$ ，则 $f(10) = (\quad)$

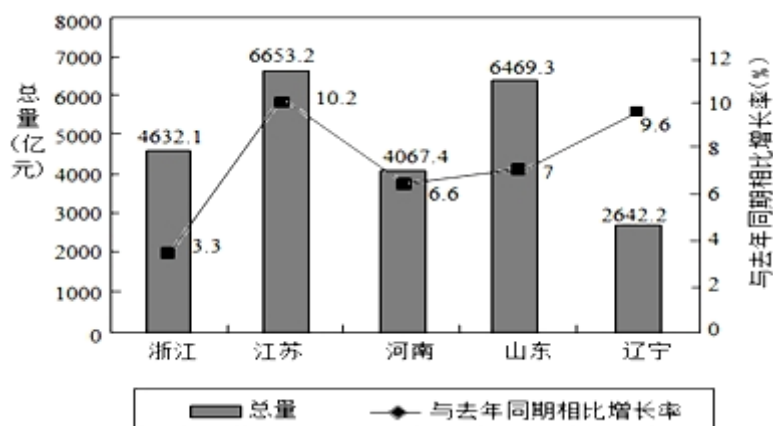
8	1	6
3	5	7
4	9	2

- A. 55 B. 500 C. 505 D. 5050

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，若 $a_6 + a_7 + a_8 = 26$ ，且 $a_5 \cdot a_9 = 36$ ，则 $\frac{1}{a_6} + \frac{1}{a_7} + \frac{1}{a_8} = (\quad)$

- A. $\frac{13}{18}$ B. $\frac{13}{18}$ 或 $\frac{19}{36}$ C. $\frac{13}{9}$ D. $\frac{13}{6}$

5. 如图是 2017 年第一季度五省 GDP 情况图，则下列陈述中不正确的是 ()



- A. 2017 年第一季度 GDP 增速由高到低排位第 5 的是浙江省。
- B. 与去年同期相比, 2017 年第一季度的 GDP 总量实现了增长。
- C. 2017 年第一季度 GDP 总量和增速由高到低排位均居同一位的省只有 1 个
- D. 去年同期河南省的 GDP 总量不超过 4000 亿元。

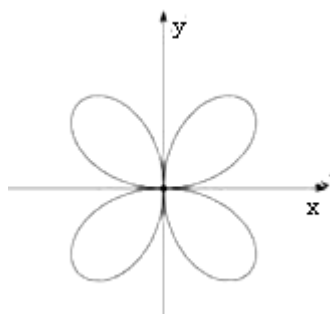
6. 设 m, n 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 下列命题中正确的是 ()

- A. 若 $m // \alpha, m // \beta$, 则 $\alpha // \beta$
- B. 若 $m \perp \alpha, m \perp n$, 则 $n \perp \alpha$
- C. 若 $m \perp \alpha, m // n$, 则 $n \perp \alpha$
- D. 若 $\alpha \perp \beta, m \perp \alpha$, 则 $m // \beta$

7. 数学中有许多形状优美、寓意美好的曲线, 例如: 四叶草曲线就是其中一种, 其方程为 $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$. 给出下列四个结论:

- ① 曲线 C 有四条对称轴;
- ② 曲线 C 上的点到原点的最大距离为 $\frac{1}{4}$;
- ③ 曲线 C 第一象限上任意一点作两坐标轴的垂线与两坐标轴围成的矩形面积最大值为 $\frac{1}{8}$;
- ④ 四叶草面积小于 $\frac{\pi}{4}$.

其中, 所有正确结论的序号是 ()



- A. ①②
- B. ①③
- C. ①③④
- D. ①②④

8. 已知 i 是虚数单位, 若 $z = 1 + ai$, $z\bar{z} = 2$, 则实数 $a =$ ()

- A. $-\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}$ B. -1 或 1 C. 1 D. $\sqrt{2}$

9. 下列不等式成立的是 ()

- A. $\sin \frac{1}{2} > \cos \frac{1}{2}$ B. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ C. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$ D. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

10. 已知双曲线 C 的一个焦点为 $(0, 5)$, 且与双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的渐近线相同, 则双曲线 C 的标准方程为 ()

- A. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ B. $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{20} = 1$ C. $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ D. $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$

11. 某地区高考改革, 实行“3+2+1”模式, 即“3”指语文、数学、外语三门必考科目, “1”指在物理、历史两门科目中必选一门, “2”指在化学、生物、政治、地理以及除了必选一门以外的历史或物理这五门学科中任意选择两门学科, 则一名学生的不同选科组合有 ()

- A. 8 种 B. 12 种 C. 16 种 D. 20 种

12. 已知角 α 的顶点与坐标原点重合, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 若点 $P(2, -1)$ 在角 α 的终边上, 则 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) =$ ()

- A. $-\frac{4}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $-\frac{3}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知 $|a| = 2\sqrt{2}$, a 在 b 方向上的投影为 $\sqrt{6}$, 则 a 与 b 的夹角为_____.

14. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 a_4 a_5 = 64, a_5 = 8$, 则 $a_2 =$ _____.

15. 若 $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{5}$, 则 $\sin 2\alpha =$ _____.

16. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 与抛物线 $y^2 = 8x$ 有一个共同的焦点 F , 两曲线的一个交点为 P , 若 $|FP| = 5$, 则点 F 到双曲线的渐近线的距离为_____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 在平面直角坐标系中, 以原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 两种坐标系中取相同的长度单位. 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3} - t \\ y = 1 + \sqrt{3}t \end{cases}$ (t 为参数), 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 4\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$.

(1) 求直线 l 的普通方程与曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 若直线 l 与曲线 C 交于 M, N 两点, 求 $\triangle MON$ 的面积.

18. (12 分) 已知函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且满足 $f(xy) = f(x) + f(y)$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, 有 $f(x) > 0$, 且 $f(2) = 1$.

(1) 求不等式 $f(4t) - f(1-t) < 2$ 的解集;

(2) 对任意 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f\left[2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 5a + 2\right] \dots f(6-2a)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

19. (12 分) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $(\sin A + \sin B)(a-b) + b \sin C = c \sin C$.

(1) 求 A ;

(2) 若 $b = 2c$, 点 D 为边 BC 的中点, 且 $AD = \sqrt{7}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

20. (12 分) (某工厂生产零件 A , 工人甲生产一件零件 A , 是一等品、二等品、三等品的概率分别为 $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, 工人乙生产一件零件 A , 是一等品、二等品、三等品的概率分别为 $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$. 已知生产一件一等品、二等品、三等品零件 A 给工厂带来的效益分别为 10 元、5 元、2 元.

(1) 试根据生产一件零件 A 给工厂带来的效益的期望值判断甲乙技术的好坏;

(2) 为鼓励工人提高技术, 工厂进行技术大赛, 最后甲乙两人进入了决赛. 决赛规则是: 每一轮比赛, 甲乙各生产一件零件 A , 如果一方生产的零件 A 品级优于另一方生产的零件, 则该方得分 1 分, 另一方得分 -1 分, 如果两人生产的零件 A 品级一样, 则两方都不得分, 当一方总分为 4 分时, 比赛结束, 该方获胜. P_{i+4} ($i = -4, -3, -2, \dots, 4$) 表示甲总分为 i 时, 最终甲获胜的概率.

①写出 P_0, P_8 的值;

②求决赛甲获胜的概率.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = \ln(x+1) + \frac{a}{x+2}$, 其中 a 为实常数.

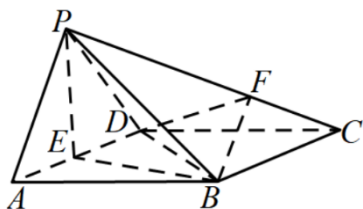
(1) 若存在 $n > m \geq -1$, 使得 $f(x)$ 在区间 (m, n) 内单调递减, 求 a 的取值范围;

(2) 当 $a = 0$ 时, 设直线 $y = kx - 1$ 与函数 $y = f(x)$ 的图象相交于不同的两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 证明:

$$x_1 + x_2 + 2 > \frac{2}{k}.$$

22. (10 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中底面 $ABCD$ 是菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, $\triangle PAD$ 是边长为 2 的正三角形,

$PC = \sqrt{10}$, E 为线段 AD 的中点.



(1) 求证：平面 $PBC \perp$ 平面 PBE ；

(2) 是否存在满足 $\vec{PF} = \lambda \vec{FC}$ ($\lambda > 0$) 的点 F ，使得 $V_{B-PAE} = \frac{3}{4} V_{D-PFB}$ ？若存在，求出 λ 的值；若不存在，请说明理由。

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

根据集合的混合运算，即可容易求得结果。

【详解】

Q $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，故可得 $\complement_U(A \cup B) = \{6\}$ 。

故选：D。

【点睛】

本题考查集合的混合运算，属基础题。

2、C

【解析】

利用终边相同的角的公式判断即得正确答案。

【详解】

与 $\frac{9\pi}{4}$ 的终边相同的角可以写成 $2k\pi + \frac{9\pi}{4}$ ($k \in \mathbb{Z}$)，但是角度制与弧度制不能混用，所以只有答案 C 正确。

故答案为 C

【点睛】

(1) 本题主要考查终边相同的角的公式, 意在考查学生对该知识的掌握水平和分析推理能力.(2) 与 α 终边相同的角

$$\beta = k \cdot 360^\circ + \alpha \quad \text{其中 } k \in \mathbb{Z}.$$

3、C

【解析】

因为幻方的每行、每列、每条对角线上的数的和相等, 可得 $f(n) = \frac{1+2+3+\cdots+n^2}{n}$, 即得解.

【详解】

因为幻方的每行、每列、每条对角线上的数的和相等,

所以 n 阶幻方对角线上数的和 $f(n)$ 就等于每行 (或每列) 的数的和,

又 n 阶幻方有 n 行 (或 n 列),

$$\text{因此, } f(n) = \frac{1+2+3+\cdots+n^2}{n},$$

$$\text{于是 } f(10) = \frac{1+2+3+\cdots+99+100}{10} = 505.$$

故选: C

【点睛】

本题考查了数阵问题, 考查了学生逻辑推理, 数学运算的能力, 属于中档题.

4、A

【解析】

根据等比数列的性质可得 $a_5 \cdot a_9 = a_6 \cdot a_8 = a_7^2 = 36$, 通分化简即可.

【详解】

由题意, 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 则 $a_5 \cdot a_9 = a_6 \cdot a_8 = a_7^2 = 36$,

又 $a_6 + a_7 + a_8 = 26$, 即 $a_6 + a_8 = 26 - a_7$,

$$\begin{aligned} \text{所以, } \frac{1}{a_6} + \frac{1}{a_7} + \frac{1}{a_8} &= \frac{a_7 \cdot a_8 + a_6 \cdot a_8 + a_6 \cdot a_7}{a_6 \cdot a_7 \cdot a_8} = \frac{36 + a_7 \cdot (a_6 + a_8)}{36 \cdot a_7} = \frac{36 + a_7 \cdot (26 - a_7)}{36 \cdot a_7}, \\ &= \frac{36 + a_7 \cdot (26 - a_7)}{36 \cdot a_7} = \frac{36 + 26 \cdot a_7 - a_7^2}{36 \cdot a_7} = \frac{36 + 26 \cdot a_7 - 36}{36 \cdot a_7} = \frac{26 \cdot a_7}{36 \cdot a_7} = \frac{13}{18}. \end{aligned}$$

故选: A.

【点睛】

本题考查了等比数列的性质, 考查了推理能力与运算能力, 属于基础题.

5、C

【解析】

利用图表中的数据进行分析即可求解.

【详解】

对于 A 选项: 2017 年第一季度 5 省的 GDP 增速由高到低排位分别是: 江苏、辽宁、山东、河南、浙江, 故 A 正确;

对于 B 选项: 与去年同期相比, 2017 年第一季度 5 省的 GDP 均有不同的增长, 所以其总量也实现了增长, 故 B 正确;

对于 C 选项: 2017 年第一季度 GDP 总量由高到低排位分别是: 江苏、山东、浙江、河南、辽宁, 2017 年第一季度 5 省的 GDP 增速由高到低排位分别是: 江苏、辽宁、山东、河南、浙江, 均居同一位的省有 2 个, 故 C 错误;

对于 D 选项: 去年同期河南省的 GDP 总量 $4067.4 \times \frac{1}{1+6.6\%} \approx 3815.57 < 4000$, 故 D 正确.

故选: C.

【点睛】

本题考查了图表分析, 学生的分析能力, 推理能力, 属于基础题.

6、C

【解析】

在 A 中, α 与 β 相交或平行; 在 B 中, $n // \alpha$ 或 $n \subset \alpha$; 在 C 中, 由线面垂直的判定定理得 $n \perp \alpha$; 在 D 中, m 与 β 平行或 $m \subset \beta$.

【详解】

设 m, n 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 则:

在 A 中, 若 $m // \alpha$, $m // \beta$, 则 α 与 β 相交或平行, 故 A 错误;

在 B 中, 若 $m \perp \alpha$, $m \perp n$, 则 $n // \alpha$ 或 $n \subset \alpha$, 故 B 错误;

在 C 中, 若 $m \perp \alpha$, $m // n$, 则由线面垂直的判定定理得 $n \perp \alpha$, 故 C 正确;

在 D 中, 若 $\alpha \perp \beta$, $m \perp \alpha$, 则 m 与 β 平行或 $m \subset \beta$, 故 D 错误.

故选 C.

【点睛】

本题考查命题真假的判断, 考查空间中直线、线面、面面间的位置关系等基础知识, 是中档题.

7、C

【解析】

①利用 x, y 之间的代换判断出对称轴的条数; ②利用基本不等式求解出到原点的距离最大值; ③将面积转化为 x, y 的关系式, 然后根据基本不等式求解出最大值; ④根据 x, y

满足的不等式判断出四叶草与对应圆的关系，从而判断出面积是否小于 $\frac{\pi}{4}$.

【详解】

①：当 x 变为 $-x$ 时， $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$ 不变，所以四叶草图象关于 y 轴对称；

当 y 变为 $-y$ 时， $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$ 不变，所以四叶草图象关于 x 轴对称；

当 y 变为 x 时， $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$ 不变，所以四叶草图象关于 $y = x$ 轴对称；

当 y 变为 $-x$ 时， $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$ 不变，所以四叶草图象关于 $y = -x$ 轴对称；

综上所述：有四条对称轴，故正确；

②：因为 $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$ ，所以 $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2 \leq \left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)^2$ ，

所以 $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$ ，所以 $\sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}$ ，取等号时 $x^2 = y^2 = \frac{1}{8}$ ，

所以最大距离为 $\frac{1}{2}$ ，故错误；

③：设任意一点 $P(x, y)$ ，所以围成的矩形面积为 xy ，

因为 $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$ ，所以 $x^2 y^2 = (x^2 + y^2)^3 \geq (2xy)^3$ ，所以 $xy \leq \frac{1}{8}$ ，

取等号时 $x = y = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ，所以围成矩形面积的最大值为 $\frac{1}{8}$ ，故正确；

④：由②可知 $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$ ，所以四叶草包含在圆 $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ 的内部，

因为圆的面积为： $S = \pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$ ，所以四叶草的面积小于 $\frac{\pi}{4}$ ，故正确。

故选：C.

【点睛】

本题考查曲线与方程的综合运用，其中涉及到曲线的对称性分析以及基本不等式的运用，难度较难.分析方程所表示曲线的对称性，可通过替换方程中 x, y 去分析证明.

8、B

【解析】

由题意得， $\overline{zz} = (1+ai)(1-ai) = 1+a^2$ ，然后求解即可

【详解】

$\because z = 1 + ai, \therefore \overline{z}z = (1 + ai)(1 - ai) = 1 + a^2$. 又 $\because z\overline{z} = 2, \therefore 1 + a^2 = 2, \therefore a = \pm 1$.

【点睛】

本题考查复数的运算，属于基础题

9、D

【解析】

根据指数函数、对数函数、幂函数的单调性和正余弦函数的图象可确定各个选项的正误.

【详解】

对于 A, $Q 0 < \frac{1}{2} < \frac{\pi}{4}, \therefore \sin \frac{1}{2} < \cos \frac{1}{2}, A$ 错误;

对于 B, $Q y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 R 上单调递减, $\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, B$ 错误;

对于 C, $Q \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} = \log_2 3 > 1, \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} = \log_3 2 < 1, \therefore \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}, C$ 错误;

对于 D, $Q y = x^{\frac{1}{3}}$ 在 R 上单调递增, $\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}, D$ 正确.

故选: D.

【点睛】

本题考查根据初等函数的单调性比较大小的问题; 关键是熟练掌握正余弦函数图象、指数函数、对数函数和幂函数的单调性.

10、B

【解析】

根据焦点所在坐标轴和渐近线方程设出双曲线的标准方程, 结合焦点坐标求解.

【详解】

$\because$ 双曲线 C 与 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的渐近线相同, 且焦点在 y 轴上,

$\therefore$ 可设双曲线 C 的方程为 $\frac{y^2}{k} - \frac{x^2}{4k} = 1$, 一个焦点为 $(0, 5)$,

$\therefore k + 4k = 25, \therefore k = 5$, 故 C 的标准方程为 $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{20} = 1$.

故选: B

【点睛】

此题考查根据双曲线的渐近线和焦点求解双曲线的标准方程，易错点在于漏掉考虑焦点所在坐标轴导致方程形式出错.

11、C

【解析】

分两类进行讨论：物理和历史只选一门；物理和历史都选，分别求出两种情况对应的组合数，即可求出结果.

【详解】

若一名学生只选物理和历史中的一门，则有 $C_2^1 C_4^2 = 12$ 种组合；

若一名学生物理和历史都选，则有 $C_4^1 = 4$ 种组合；

因此共有 $12 + 4 = 16$ 种组合.

故选 C

【点睛】

本题主要考查两个计数原理，熟记其计数原理的概念，即可求出结果，属于常考题型.

12、D

【解析】

由题知 $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，又 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ ，代入计算可得.

【详解】

由题知 $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，又 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{3}{5}$.

故选：D

【点睛】

本题主要考查了三角函数的定义，诱导公式，二倍角公式的应用求值.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13、 $\frac{\pi}{6}$

【解析】

由向量投影的定义可求得两向量夹角的余弦值，从而得角的大小.

【详解】

$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影为 $|\vec{a}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sqrt{6}$, $\therefore \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，即夹角为 $\frac{\pi}{6}$.

故答案为： $\frac{\pi}{6}$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/738127106006006063>