第十五章 分式

16.2.3 整数指数幂(1)

默写　　当n是正整数时，$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n个}$

1. 同底数幂的乘法公式：　$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$

2. 幂的乘方公式：　$(a^m)^n=a^{mn}$

3. 积的乘方公式：　$(ab)^n=a^nb^n$

(当m，n都是正整数)

4. 同底数幂的除法公式：　$a^m\div a^n=a^{m-n}$

($m>n,a\neq0$)

5. 分式的乘方法则：　$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$　(n是正整数,$b\neq0$)

6. 零指数幂：　$a^0=1$　($a\neq0$)

思考：$2^5 \div 2^7 = ?$

$$2^5 \div 2^7 = \frac{2^5}{2^7} = \frac{1}{2^2}$$

$$\boxed{2^{-2} = \frac{1}{2^2}}$$

$$2^5 \div 2^7 = 2^{5-7} = 2^{-2}$$

$a^4 \div a^7 = ?$

$$a^4 \div a^7 = \frac{a^4}{a^7} = \frac{1}{a^3}$$

$$\boxed{a^{-3} = \frac{1}{a^3}}$$

$$a^4 \div a^7 = a^{4-7} = a^{-3}$$

一般地，当n是正整数时，$a^{-n}=\dfrac{1}{a^{n}}$ $(a\neq 0)$

这就是说 a^{-n}与a^{n}互为倒数．

例如：$5^{-1}=\dfrac{1}{5}$，$a^{-3}=\dfrac{1}{a^{3}}$

引入负整数指数幂后，指数的取值范围就扩大到全体整数。

例1　填空：

(1) $2^{-1}=$ $\underline{\quad \frac{1}{2} \quad}$, $3^{-1}=$ $\underline{\quad \frac{1}{3} \quad}$, $x^{-1}=$ $\underline{\quad \frac{1}{x} \quad}$, $(-2)^{0}=$ $\underline{\quad 1 \quad}$.

(2) $(-2)^{-1}=$ $\underline{\quad -\frac{1}{2} \quad}$, $(-3)^{-1}=$ $\underline{\quad -\frac{1}{3} \quad}$, $(-x)^{-1}=$ $\underline{\quad -\frac{1}{x} \quad}$.

(3) $4^{-2}=$ $\underline{\quad \frac{1}{16} \quad}$, $(-4)^{-2}=$ $\underline{\quad \frac{1}{16} \quad}$, $-4^{-2}=$ $\underline{\quad -\frac{1}{16} \quad}$.

(4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=$ $\underline{\quad 2 \quad}$, $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}=$ $\underline{\quad \frac{16}{9} \quad}$, $\left(\frac{b}{a}\right)^{-1}=$ $\underline{\quad \frac{a}{b} \quad}$

例2、把下列各式转化为只含有正整数指数幂的形式

1. $a^{-3}=\frac{1}{a^{3}}$

2. $\frac{1}{3}x^{-2}=\frac{1}{3x^{2}}$

3. $x^{3}y^{-2}=\frac{x^{3}}{y^{2}}$

4. $\frac{1}{3x^{-2}}=\frac{x^{2}}{3}$

5. $2(m+n)^{-2}=\frac{2}{(m+n)^{2}}$

6. $(3x)^{-2}=\frac{1}{(-3x)^{2}}=\frac{1}{9x^{2}}$

例3 利用负整指数幂把下列各式化成不含分母的式子.

1. $\dfrac{x^2}{y^3}$　　2. $-\dfrac{y}{a^4x}$　　3. $\dfrac{2m}{(a-b)^5}$

x^2y^{-3}　　$-a^{-4}x^{-1}y$　　$2m(a-b)^{-5}$

思考

引入负整数指数和0指数后，$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$（m，n是正整数）这条性质能否推广到m，n任意整数的情形？

$$a^3 \cdot a^{-5} = \frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2} = a^{-2} = a^{3+(-5)}$$，即 $a^3 \cdot a^{-5} = a^{3+(-5)}$

$$a^{-3} \cdot a^{-5} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^5} = \frac{1}{a^8} = a^{-8} = a^{(-3)+(-5)}$$，即 $a^{-3} \cdot a^{-5} = a^{(-3)+(-5)}$

$$a^0 \cdot a^{-5} = 1 \cdot \frac{1}{a^5} = \frac{1}{a^5} = a^{-5} = a^{0+(-5)}$$，即 $a^0 \cdot a^{-5} = a^{0+(-5)}$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$这条性质对于m，n是任意整数的情形仍适用.

总结归纳

(1) 根据整数指数幂的运算性质，当m、n为整数时，

$a^m \div a^n = a^{m-n}$，又$a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n}$，因此$a^m \div a^n = a^m \cdot a^{-n}$.

即同底数幂的除法可以转化为同底数幂的乘法.

(2) 特别地，$\frac{a}{b} = a \div b = a \cdot b^{-1}$所以$\left(\frac{a}{b}\right)^n = (a \cdot b^{-1})^n = a^n \cdot b^{-n}$.

即商的乘方可以转化为积的乘方.

整数指数幂有以下运算性质：

(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ （m，n是整数）；

(2) $(a^m)^n = a^{mn}$ （m，n是整数）；

(3) $(ab)^n = a^n b^n$ （n是整数）；

(4) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ （$a \neq 0$，m，n是整数）；

(5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ （n是整数）；

(6) 当$a \neq 0$时，$a^0 = 1$ （0指数幂的运算）.

$a^{-3} \cdot a^{-9} = a^{-12}$

$(a^{-3})^2 = a^{-6}$

$(ab)^{-3} = a^{-3}b^{-3}$

$a^{-3} \div a^{-5} = a^2$

$\frac{a^{-2}}{b^{-2}}$

★整数指数幂的运算性质归结为：

(1)$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (m、n是整数)； (2)

$(a^m)^n = a^{mn}$ (m、n是整数)；

(3)$(ab)^n = a^n b^n$ (n是整数).

例　计算：

（1）$(a^{-1}b^{2})^{3}$　　（2）$a^{-2}b^{2}\cdot(a^{2}b^{-2})^{-3}$

练习：计算

(1) $x^{2}y^{-3}(x^{-1}y)^{3}$　　(2) $(2ab^{2}c^{-3})^{-2}\div(a^{-2}b)^{3}$