中山纪念中学2024年高三数学第一学期期末达标检测模拟试题

请考生注意：

1．请用2B铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用0．5毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。

2．答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知函数 $f(x)=|\cos x|+\sin x$，则下列结论中正确的是

①函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π；

②函数 $f(x)$ 的图象是轴对称图形；

③函数 $f(x)$ 的极大值为 $\sqrt{2}$；

④函数 $f(x)$ 的最小值为 -1.

A． ①③　　**B．** ②④

C． ②③　　**D．** ②③④

2．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_8=16$，$a_6=1$，则数列 $\{a_n\}$ 的公差为（　　）

A． $\frac{3}{2}$　　**B．** $-\frac{3}{2}$　　**C．** $\frac{2}{3}$　　**D．** $-\frac{2}{3}$

3．数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，且 $a_1+a_2+a_3=9$，$a_4=8$，则 $a_5=$（　　）

A． $\frac{21}{2}$　　**B．** 9　　**C．** $\frac{17}{2}$　　**D．** 7

4．下列函数中，图象关于 y 轴对称的为（　　）

A． $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$　　**B．** $f(x)=\sqrt{7+2x}+\sqrt{7-2x}$，$x\in[-1,2]$

C． $f(x)=\sin 8x$　　**D．** $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{x^2}$

5．已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x-\frac{\pi}{3})(A>0,\omega>0)$，将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，若函数 $g(x)$ 的图象的一条对称轴是 $x=\frac{\pi}{6}$，则 ω 的最小值为

A． $\frac{1}{6}$　　**B．** $\frac{2}{3}$　　**C．** $\frac{5}{3}$　　**D．** $\frac{5}{6}$

6．在四面体 $P-ABC$ 中，$\vee ABC$ 为正三角形，边长为6，$PA=6$，$PB=8$，$PC=10$，则四面体 $P-ABC$ 的体积为（　　）

A． $8\sqrt{11}$　　**B．** $8\sqrt{10}$　　**C．** 24　　**D．** $16\sqrt{3}$

7．已知直三棱柱中 $ABC-A_1B_1C_1$，$\angle ABC=120°$，$AB=2$，$BC=CC_1=1$，则异面直线 AB_1 与 BC_1 所成的角的正弦值为（　　）.

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　　C．$\dfrac{\sqrt{15}}{5}$　　D．$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

8．若复数 $z=\dfrac{5}{2-i}$（i 为虚数单位），则 $\overline{z}=$（　　）

A．$2+i$　　B．$2-i$　　C．$1+2i$　　D．$1-2i$

9．已知函数 $f\left(x\right)=ax+1+\left|2x^2+ax-1\right|$（$a\in R$）的最小值为 **0**，则 $a=$（　　）

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．-1　　C．± 1　　D．$\pm\dfrac{1}{2}$

10．若函数 $f(x)=x^3-mx^2+2x(m\in R)$ 在 $x=1$ 处有极值，则 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的最大值为（　　）

A．$\dfrac{14}{27}$　　B．**2**　　C．**1**　　D．**3**

11．已知实数 $a>0,b>1$ 满足 $a+b=5$，则 $\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b-1}$ 的最小值为（　　）

A．$\dfrac{3+2\sqrt{2}}{4}$　　B．$\dfrac{3+4\sqrt{2}}{4}$　　C．$\dfrac{3+2\sqrt{2}}{6}$　　D．$\dfrac{3+4\sqrt{2}}{6}$

12．“哥德巴赫猜想”是近代三大数学难题之一，其内容是：一个大于 **2** 的偶数都可以写成两个质数(素数)之和，也就是我们所谓的“**1+1**”问题.它是 **1742** 年由数学家哥德巴赫提出的，我国数学家潘承洞、王元、陈景润等在哥德巴赫猜想的证明中做出相当好的成绩.若将 **6** 拆成两个正整数的和，则拆成的和式中，加数全部为质数的概率为（　　）

A．$\dfrac{1}{5}$　　B．$\dfrac{1}{3}$　　C．$\dfrac{3}{5}$　　D．$\dfrac{2}{3}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．设 $P(x,y)$ 为椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$ 在第一象限上的点，则 $\dfrac{x}{4-x}+\dfrac{3y}{6-y}$ 的最小值为________.

14．$(x-\dfrac{2}{x})^5$ 的展开式中含 x^3 的系数为__________.（用数字填写答案）

15．袋中装有两个红球、三个白球，四个黄球，从中任取四个球，则其中三种颜色的球均有的概率为________.

16．如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$AD=1$,则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ 的值为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）已知函数 $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-mx^2+m^2x$ **($m\in R$)**的导函数为 $f'(x)$.

（**1**）若函数 $g(x)=f(x)-f'(x)$ 存在极值，求 m 的取值范围；

（**2**）设函数 $h(x)=f'(\mathrm{e}^x)+f'(\ln x)$（其中 **e** 为自然对数的底数），对任意 $m\in R$，若关于 x 的不等式 $h(x)\ge m^2+k^2$ 在**(0，$+\infty$)**上恒成立，求正整数 k 的取值集合.

18．（12 分）在平面直角坐标系中，曲线 $C_1:x^2-y^2=2$，曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+2\cos\theta\\ y=2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）. 以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

（**1**）求曲线 C_1、C_2 的极坐标方程；

（**2**）在极坐标系中，射线 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 与曲线 C_1，C_2 分别交于 A、B 两点（异于极点 O），定点 $M(3,0)$，求 ΔMAB 的面积

19．（12 分）已知函数 $f(x)=x^2-6x+4\ln x$

（**1**）求 $f(x)$ 单调区间和极值；

（**2**）若存在实数 $a,b,c(0<a<b<c)$，使得 $f(a)=f(b)=f(c)$，求证：$c-a<2$

20．（12 分）在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1：$\begin{cases}x=1+r\cos\theta,\\ y=\sqrt{3}+r\sin\theta,\end{cases}$（$\theta$ 为参数，$r>0$），曲线 C_2：$\begin{cases}x=5+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t,\\ y=\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}t,\end{cases}$（$t$ 为参数）**.**若曲线 C_1 和 C_2 相切**.**

（**1**）在以 O 为极点，x 轴非负半轴为极轴的极坐标系中，求曲线 C_1 的普通方程；

（**2**）若点 M，N 为曲线 C_1 上两动点，且满足 $\angle MON=\dfrac{\pi}{3}$，求 ΔMON 面积的最大值**.**

21．（12 分）设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 **0**，公差为 a，$a\in\mathrm{N}^*$；等差数列 $\{b_n\}$ 的首项为 **0**，公差为 b，$b\in\mathbf{N}^*$**.**由数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 构造数表 M，与数表 M^*；

记数表 M 中位于第 i 行第 j 列的元素为 c_{ij}，其中 $c_{ij}=a_i+b_j$，（i，j**=1，2，3，…**）.

记数表 M^* 中位于第 i 行第 j 列的元素为 d_{ij}，其中 $d_{ij}=a_i-b_{j+1}$（$1\le i\le b$，$i\in\mathbf{N}^*$，$j\in\mathbf{N}^*$）**.**如：$c_{1,2}=a_1+b_2$，$d_{1,2}=a_1-b_3$.

（1）设 $a=5$，$b=9$，请计算 $c_{2,6}$，$c_{396,6}$，$d_{2,6}$；

（2）设 $a=6$，$b=7$，试求 c_{ij}，d_{ij} 的表达式（用 ***i*，*j*** 表示），并证明：对于整数 ***t***，若 ***t*** 不属于数表 ***M***，则 ***t*** 属于数表 M^*；

（3）设 $a=6$，$b=7$，对于整数 ***t***，***t*** 不属于数表 ***M***，求 ***t*** 的最大值.

22.（10 分）已知在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C 的焦点为 $F_1\left(-\sqrt{3},0\right),F_2\left(\sqrt{3},0\right),M$ 为椭圆 C 上任意一点，且 $\left|MF_1\right|+\left|MF_2\right|=4$.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）若直线 $l:y=kx+m\left(k>0,m>0\right)$ 交椭圆 C 于 P,Q 两点，且满足 $k_{PQ}^2=k_{OP}\cdot k_{OQ}$（$k_{PQ},k_{OP},k_{OQ}$ 分别为直线 PQ,OP,OQ 的斜率），求 ΔOPQ 的面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时直线 PQ 的方程.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、**D**

【解析】

因为 $f(x+\pi)=|\cos(x+\pi)|+\sin(x+\pi)=|\cos x|-\sin x\neq f(x)$，所以①不正确；

因为 $f(x)=|\cos x|+\sin x$，所以 $f(\frac{\pi}{2}+x)=|\cos(\frac{\pi}{2}+x)|+\sin(\frac{\pi}{2}+x)=|\sin x|+\cos x$，

$f(\frac{\pi}{2}-x)=|\cos(\frac{\pi}{2}-x)|+\sin(\frac{\pi}{2}-x)=|\sin x|+\cos x$，所以 $f(\frac{\pi}{2}+x)=f(\frac{\pi}{2}-x)$，

所以函数 $f(x)$ 的图象是轴对称图形，②正确；

易知函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π，因为函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称，所以只需研究函数 $f(x)$ 在 $[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}]$ 上的极大值与最小值即可．当 $\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{3\pi}{2}$ 时，$f(x)=-\cos x+\sin x=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$，且 $\frac{\pi}{4}\le x-\frac{\pi}{4}\le\frac{5\pi}{4}$，令 $x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，得 $x=\dfrac{3\pi}{4}$，可知函数 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{3\pi}{4}$ 处取得极大值为 $\sqrt{2}$，③正确；

因为 $\frac{\pi}{4}\le x-\frac{\pi}{4}\le\frac{5\pi}{4}$，所以 $-1\le\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})\le\sqrt{2}$，所以函数 $f(x)$ 的最小值为 -1，④正确.

故选 **D.**

2、**D**

【解析】

根据等差数列公式直接计算得到答案.

【详解】

依题意，$S_8=\frac{8\left(a_1+a_8\right)}{2}=\frac{8\left(a_3+a_6\right)}{2}=16$，故 $a_3+a_6=4$，故 $a_3=3$，故 $d=\frac{a_6-a_3}{3}=-\frac{2}{3}$，故选：**D.**

【点睛】

本题考查了等差数列的计算，意在考查学生的计算能力.

3、**A**

【解析】

先由题意可得数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，再根据 $a_1+a_2+a_3=9$，$a_4=8$，可求出公差，即可求出 a_5 .

【详解】

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}(n\in N^*)$，则数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，

Q $a_1+a_2+a_3=9$，$a_4=8$，

$\therefore 3a_1+3d=9$，$a_1+3d=8$，

$\therefore d=\frac{5}{2}$，

$\therefore a_5=a_4+d=8+\frac{5}{2}=\frac{21}{2}$，

故选：A .

【点睛】

本题主要考查了等差数列的性质和通项公式的求法，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平，属于基础题.

4、**D**

【解析】

图象关于 y 轴对称的函数为偶函数,用偶函数的定义及性质对选项进行判断可解.

【详解】

图象关于 y 轴对称的函数为偶函数；

A 中，$x\in\mathbf{R}$，$f(-x)=\frac{-x}{\sqrt{(-x)^2+1}}=-f(x)$，故 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ 为奇函数；

B 中，$f(x)=\sqrt{7+2x}+\sqrt{7-2x}$ 的定义域为 $\left[-1,2\right]$，

不关于原点对称，故为非奇非偶函数；

C 中，由正弦函数性质可知，$f(x)=\sin 8x$ 为奇函数；

D 中，$x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 0$，$f(-x)=\dfrac{e^{-x}+e^{x}}{(-x)^2}=f(x)$，故 $f(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{x^2}$ 为偶函数.

故选：D.

【点睛】

本题考查判断函数奇偶性. 判断函数奇偶性的两种方法:

(1)定义法：对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x 都有 $f(x)=-f(-x)$，则函数 $f(x)$ 是奇函数；都有 $f(x)=f(-x)$，则函数 $f(x)$ 是偶函数

(2)图象法：函数是奇(偶)函数 $\Leftrightarrow$ 函数图象关于原点(y 轴)对称.

5、C

【解析】

将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)=2\sin(\omega x+\dfrac{\omega\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3})$ 的图象，因为函数 $g(x)$ 的图象的一条对称轴是 $x=\dfrac{\pi}{6}$，所以 $\sin(\dfrac{\omega\pi}{6}+\dfrac{\omega\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3})=\pm 1$，即 $\dfrac{\omega\pi}{6}+\dfrac{\omega\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以 $\omega=\dfrac{5}{3}+2k,k\in\mathbf{Z}$，又 $\omega>0$，所以 ω 的最小值为 $\dfrac{5}{3}$. 故选 C.

6、A

【解析】

推导出 $PB\perp BC$，分别取 BC，PC 的中点 D,E ,连结 AD,AE,DE，则 $AD\perp BC,AE\perp PC,DE\perp BC$，推导出 $AE\perp DE$，从而 $AE\perp$ 平面PBC，进而四面体 $P-ABC$ 的体积为 $V_{P-ABC}=V_{A-PBC}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{\triangle PBC}\cdot AE$，由此能求出结果.

【详解】

解：$\because$ 在四面体 $P-ABC$ 中，$\triangle ABC$ 为等边三角形，边长为 6，

$PA=6$，$PB=8$，$PC=10$，

$\therefore PB^2+BC^2=PC^2$，

$\therefore PB\perp BC$，

分别取 BC，PC 的中点 D,E，连结 AD,AE,DE，

则 $AD\perp BC,AE\perp PC,DE\perp BC$，

且 $AD=\sqrt{36-9}=3\sqrt{3}$，$DE=4$，$AE=\sqrt{36-25}=\sqrt{11}$，

$\therefore AE^2+DE^2=AD^2$，

$\therefore AE\perp DE$，

∵ $PC \cap DE = E$，$PC \subset$ 平面 PBC， $DE \subset$ 平面 PBC，

∴ $AE \perp$ 平面PBC，

∴四面体 $P-ABC$ 的体积为：

$$V_{P-ABC} = V_{A-PBC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle PBC} \cdot AE$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times PB \times BC \times AE = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \sqrt{11} = 8\sqrt{11}.$$

故答案为：$8\sqrt{11}$.

【点睛】

本题考查四面体体积的求法，考查空间中线线，线面，面面间的位置关系等基础知识，考查运算求解能力.

7、C

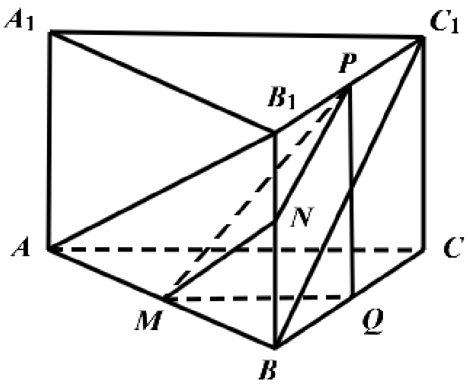
【解析】

设 ***M,N,P*** 分别为 AB, BB_1 和 B_1C_1 的中点，得出 AB_1, BC_1 的夹角为 ***MN*** 和 **NP** 夹角或其补角，根据中位线定理，

结合余弦定理求出 AC, MQ, MP 和 $\angle MNP$ 的余弦值再求其正弦值即可.

【详解】

根据题意画出图形:



设 ***M,N,P*** 分别为 AB, BB_1 和 B_1C_1 的中点，

则 AB_1, BC_1 的夹角为 ***MN*** 和 ***NP*** 夹角或其补角

可知 $MN = \frac{1}{2}AB_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$， $NP = \frac{1}{2}BC_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

作 **BC** 中点 **Q**，则$\triangle PQM$ 为直角三角形；

$\because PQ=1, MQ=\frac{1}{2}AC$

$\triangle ABC$ 中，由余弦定理得

$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC=4+1-2\times2\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=7$$

$\therefore AC=\sqrt{7}$，$MQ=\frac{\sqrt{7}}{2}$

在$\triangle MQP$ 中，$MP=\sqrt{MQ^2+PQ^2}=\frac{\sqrt{11}}{2}$

在$\triangle PMN$ 中，由余弦定理得

$$\cos\angle MNP=\frac{MN^2+NP^2-PM^2}{2\cdot MH\cdot NP}==\frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2}{2\times\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{\sqrt{10}}{5}$$

所以$\sin\angle MNP=\sqrt{1-\cos^2\angle MNP}=\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{5}$

故选：**C**

【点睛】

此题考查异面直线夹角，关键点通过平移将异面直线夹角转化为同一平面内的夹角，属于较易题目.

8、**B**

【解析】

根据复数的除法法则计算z，由共轭复数的概念写出$\overline{z}$.

【详解】

$\because z=\frac{5}{2-i}=\frac{5(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{10+5i}{5}=2+i$,

$\therefore \overline{z}=2-i$,

故选：***B***

【点睛】

本题主要考查了复数的除法计算，共轭复数的概念，属于容易题.

9、**C**

【解析】

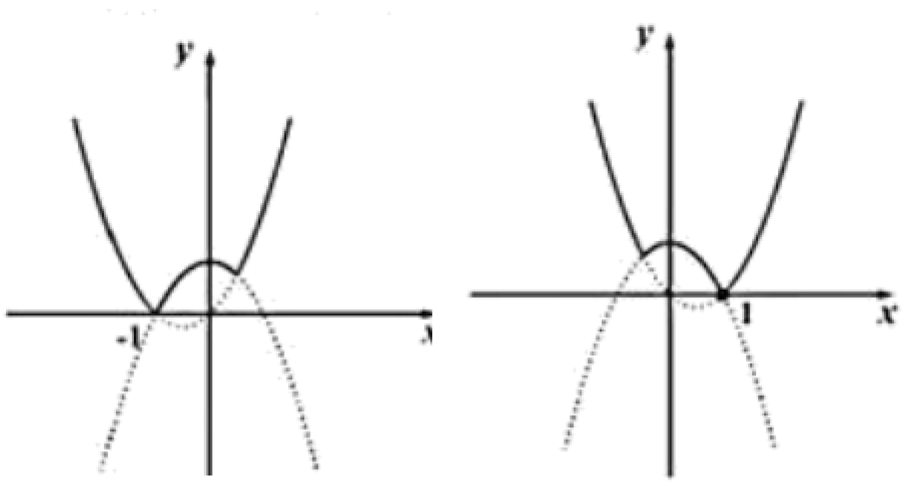
设$\begin{cases}g(x)+h(x)=ax+1\\g(x)-h(x)=2x^2+ax-1\end{cases}$，计算可得$f(x)=\begin{cases}2g(x),g(x)\ge h(x)\\2h(x),g(x)<h(x)\end{cases}$，再结合图像即可求出答案.

【详解】

设$\begin{cases}g(x)+h(x)=ax+1\\g(x)-h(x)=2x^2+ax-1\end{cases}$，则$\begin{cases}g(x)=x^2+ax\\h(x)=1-x^2\end{cases}$，

则$f(x)=g(x)+h(x)+|g(x)-h(x)|=\begin{cases}2g(x),g(x)\ge h(x)\\2h(x),g(x)<h(x)\end{cases}$，

由于函数$f(x)$的最小值为0，作出函数$g(x),h(x)$的大致图像，



结合图像，$1-x^2=0$，得$x=\pm1$，

所以$a=\pm1$.

故选：C

【点睛】

本题主要考查了分段函数的图像与性质，考查转化思想，考查数形结合思想，属于中档题.

10、B

【解析】

根据极值点处的导数为零先求出m的值，然后再按照求函数在连续的闭区间上最值的求法计算即可.

【详解】

解：由已知得$f'(x)=3x^2-2mx+2$，$\therefore f'(1)=3-2m+2=0$，$\therefore m=\dfrac{5}{2}$，经检验满足题意.

$\therefore f(x)=x^3-\dfrac{5}{2}x^2+2x$，$f'(x)=3x^2-5x+2$.

由$f'(x)<0$得$\dfrac{2}{3}<x<1$；由$f'(x)>0$得$x<\dfrac{2}{3}$或$x>1$.