专题22 平面向量的数量积及其应用

【考点预测】

一．平面向量的数量积 $\boldsymbol{a}$

（1）平面向量数量积的定义

已知两个非零向量与 $\boldsymbol{b}$，我们把数量 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积（或内积），

记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，规定：零向量与任一向量的数量积为0.

（2）平面向量数量积的几何意义

①向量的投影：$|\boldsymbol{a}|\cos\theta$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影数量，当 θ 为锐角时，它是正数；当 θ 为钝角时，它是负数；当 θ 为直角时，它是0.

② $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的几何意义：数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 等于 $\boldsymbol{a}$ 的长度 $|\boldsymbol{a}|$ 与 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上射影 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 的乘积.

二．数量积的运算律

已知向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 和实数 λ，则：

① $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

② $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$；

③ $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

三．数量积的性质

设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 都是非零向量，$\boldsymbol{e}$ 是与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同的单位向量，θ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 的夹角，则

① $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$．② $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

③当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

特别地，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$ 或 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$.

④ $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$ $(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\neq 0)$．⑤ $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

四．数量积的坐标运算

已知非零向量 $\boldsymbol{a}=(x_1，y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2，y_2)$，θ 为向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的夹角.

结论	几何表示	坐标表示
模	$\lvert\boldsymbol{a}\rvert=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$	$\lvert\boldsymbol{a}\rvert=\sqrt{x^2+y^2}$
数量积	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert\cos\theta$	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$
夹角	$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert}$	$\cos\theta=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$
$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充要条件	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$	$x_1x_2+y_1y_2=0$
$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要	$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$	$x_1x_2+y_1y_2=0$

条件		
$\|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\|$与$\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$的关系	$\|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\|\leq\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$(当且仅当$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$时等号成立)	$\|x_1x_2+y_1y_2\|\leqslant\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}$

五、向量中的易错点

（1）平面向量的数量积是一个实数，可正、可负、可为零，且$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leq|\vec{a}||\vec{b}|$.

（2）当$\vec{a}\neq\vec{0}$时，由$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$不能推出$\vec{b}$一定是零向量，这是因为任一与$\vec{a}$垂直的非零向量$\vec{b}$都有$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.
当$\vec{a}\neq\vec{0}$时，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$时，也不能推出一定有$\vec{b}=\vec{c}$，当$\vec{b}$是与$\vec{a}$垂直的非零向量，$\vec{c}$是另一与$\vec{a}$垂直的非零向量时，有$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=0$，但$\vec{b}\neq\vec{c}$.

（3）数量积不满足结合律，即$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}\neq(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$，这是因为$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$是一个与$\vec{c}$共线的向量，而$(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$是一个与$\vec{a}$共线的向量，而$\vec{a}$与$\vec{c}$不一定共线，所以$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$不一定等于$(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$，即凡有数量积的结合律形式的选项，一般都是错误选项.

（4）非零向量夹角为锐角（或钝角）.当且仅当$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$且$\vec{a}\neq\lambda\vec{b}(\lambda>0)$（或$\vec{a}\cdot\vec{b}<0$，且$\vec{a}\neq\lambda\vec{b}(\lambda<0)$）

【方法技巧与总结】

(1)$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影是一个数量，它可以为正，可以为负，也可以等于0.

(2)数量积的运算要注意$\vec{a}=\vec{0}$时，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，但$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$时不能得到$\vec{a}=\vec{0}$或$\vec{b}=\vec{0}$，因为$\vec{a}\perp\vec{b}$时，也有$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

(3)根据平面向量数量积的性质：$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$，$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$，$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$等，所以平面向量数量积可以用来解决有关长度、角度、垂直的问题.

(4)若a、b、c是实数，则$ab=ac\Rightarrow b=c$（$a\neq0$）；但对于向量，就没有这样的性质，即若向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$满足$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$（$\vec{a}\neq0$），则不一定有$\vec{b}=\vec{c}$，即等式两边不能同时约去一个向量，但可以同时乘以一个向量.

(5)数量积运算不适合结合律，即$(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}\neq\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$，这是由于$(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$表示一个与$\vec{c}$共线的向量，$\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$表示一个与$\vec{a}$共线的向量，而$\vec{a}$与$\vec{c}$不一定共线，因此$(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$与$\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$不一定相等.

【题型归纳目录】

题型一：平面向量的数量积运算

题型二：平面向量的夹角

题型三：平面向量的模长

题型四：平面向量的投影、投影向量

题型五：平面向量的垂直问题

题型六：建立坐标系解决向量问题

【典例例题】

题型一：平面向量的数量积运算

例 1.（2023·全国·模拟预测（理））在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{3}$，$O$为$\triangle ABC$的外心，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BO}=2$，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BO}=4$，则$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=$（　　）

A．2　　B．$2\sqrt{2}$　　C．4　　D．$4\sqrt{2}$

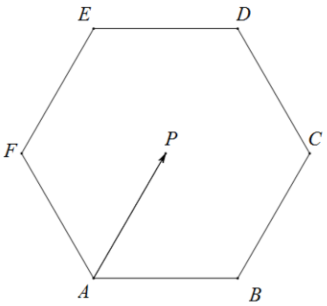
例 2.（2023·河南安阳·模拟预测（理））已知AH是Rt△ABC斜边BC上的高，$AH=2\sqrt{2}$，点M在线段AH上，满足$(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})\cdot\overrightarrow{AH}=8\sqrt{2}$，则$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=$（　　）

A．-4　　B．-2　　C．2　　D．4

例 3.（2023·全国·高三专题练习（理））已知向量$\vec{a},\vec{b}$满足$|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=\sqrt{3},|\vec{a}-2\vec{b}|=3$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$（　　）

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

例 4.（2023·四川省泸县第二中学模拟预测（文））如图，正六边形$ABCDEF$中，$AB=2$，点P是正六边形$ABCDEF$的中心，则$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=$______.



例 5.（2023·安徽·合肥市第八中学模拟预测（理））已知向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$满足$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0,|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=3,|\vec{c}|=4$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$_________.

例 6.（2023·陕西·模拟预测（理））已知向量$\vec{a}=(1,x)$，$\vec{b}=(0,1)$，若$\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=\sqrt{5}$，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$__________

例 7.（2023·上海徐汇·二模）在$\triangle ABC$中，已知$AB=1$，$AC=2$，$\angle A=120°$，若点P是$\triangle ABC$所在平面上一点，且满足$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}=-1$，则实数$\lambda$的值为______________.

例 8.（2023·陕西·交大附中模拟预测（理））已知在平行四边形$ABCD$中，

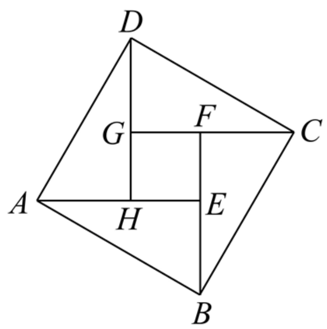
$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EC},\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FC},\left|\overrightarrow{AE}\right|=2,\left|\overrightarrow{AF}\right|=\sqrt{6}$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$ 值为__________.

例 9．（2023·福建省福州第一中学三模）过点 $M(2,\sqrt{3})$ 的直线与 $\odot C:(x-3)^2+y^2=16$ 交于 A，B 两点，当 M 为线段 AB 中点时，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=$___________.

例 10．（2023·全国·模拟预测（理））已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线，且 $\vec{a}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=2$，$\left|\vec{a}\right|=1$，若 $\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)\perp\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)$，则 $\vec{b}\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=$___________.

例 11．（2023·全国·高三专题练习（理））设向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角的余弦值为 $\frac{1}{3}$，且 $\left|\vec{a}\right|=1$，$\left|\vec{b}\right|=3$，则 $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=$_________.

例 12．（2023·江苏·徐州市第七中学模拟预测）如图是第 24 届国际数学家大会的会标，它是根据中国古代数学家赵爽的弦图设计的，大正方形 $ABCD$ 是由 4 个全等的直角三角形和中间的小正方形 $EFGH$ 组成的. 若大正方形的边长为 $\sqrt{5}$，E 为线段 BF 的中点，则 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}=$______.



【方法技巧与总结】

（1）求平面向量的数量积是较为常规的题型，最重要的方法是紧扣数量积的定义找到解题思路.

（2）平面向量数量积的几何意义及坐标表示，分别突出了它的几何特征和代数特征，因而平面向量数量积是中学数学较多知识的交汇处，因此它的应用也就十分广泛.

（3）平面向量的投影问题，是近几年的高考热点问题，应熟练掌握其公式：向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向上的投影为 $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

（4）向量运算与整式运算的同与异（无坐标的向量运算）

同：$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$；$\left|a\pm b\right|=\sqrt{a^2\pm 2ab+b^2}$；$a(b+c)=ab+ac$ 公式都可通用

异：整式：$a\cdot b=\pm\left|a\right|\left|b\right|$，$\left|a\right|$ 仅仅表示数；向量：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$（$\theta$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角）

$\left|m\vec{a}\pm n\vec{b}\right|=\sqrt{m^2\left|\vec{a}\right|^2\pm 2mn\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta+n^2\left|\vec{b}\right|^2}$，使用范围广泛，通常是求模或者夹角.

$\left|m\vec{a}\right|-\left|n\vec{b}\right|\le\left|m\vec{a}\pm n\vec{b}\right|\le\left|m\vec{a}\right|+\left|n\vec{b}\right|$，通常是求$\left|m\vec{a}\pm n\vec{b}\right|$最值的时候用.

题型二：平面向量的夹角

例 13.（2023·甘肃·高台县第一中学模拟预测（文））已知非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|$，$\vec{a}\perp\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$夹角为______.

例 14.（2023·安徽·合肥一六八中学模拟预测（文））已知向量$|\vec{b}|=1$，向量$\vec{a}=(1,\sqrt{3})$，且$|\vec{a}-\sqrt{2}\vec{b}|=\sqrt{6}$，则向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角为___________.

例 15.（2023·湖北武汉·模拟预测）两不共线的向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，满足$\left|\vec{a}\right|=3\left|\vec{b}\right|$，且$\forall t\in R$，$\left|\vec{a}-t\vec{b}\right|\ge\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$，则$\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=$（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{3}$

例 16.（2023·云南师大附中模拟预测（理））已知向量$\vec{a}=\left(2t,2\right)$，$\vec{b}=\left(-t-2,-5\right)$，若向量$\vec{a}$与向量$\vec{a}+\vec{b}$的夹角为钝角，则$t$的取值范围为（　　）

A．$\left(-3,1\right)$　　B．$\left(-3,-1\right)\cup\left(-1,1\right)$

C．$\left(-1,3\right)$　　D．$\left(-1,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},3\right)$

例 17.（2023·广东深圳·高三阶段练习）已知向量$\vec{a}=\left(\cos 30^\circ,-\sin 210^\circ\right)$，$\vec{b}=(-\sqrt{3},1)$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$夹角的余弦值为_________.

例 18.（2023·全国·高三专题练习）已知向量$\vec{a}=(3,4),\vec{b}=(1,0),\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$，若$<\vec{a},\vec{c}>=<\vec{b},\vec{c}>$，则$t=$（　　）

A．-6　　B．-5　　C．5　　D．6

例 19.（2023·湖南·长沙市明德中学二模）已知非零向量$\vec{a}$、$\vec{b}$满足$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$，则向量$\vec{b}$与向量$\vec{a}-\vec{b}$夹角的余弦值为（　　）

A．$-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．0

C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$ D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

例 20．（2023·辽宁·大连市一 0 三中学模拟预测）已知单位向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{3}\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为（　　）

A．30° B．60° C．120° D．150°

例 21．（2023·北京市大兴区兴华中学三模）已知$\vec{a}$为单位向量，向量$\vec{b}=(1,2)$，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，则$\langle\vec{a},\vec{b}-\vec{a}\rangle=$（　　）

A．$\frac{\pi}{6}$ B．$\frac{\pi}{4}$ C．$\frac{\pi}{3}$ D．$\frac{3\pi}{4}$

例 22．（2023·全国·模拟预测（理））已知平面向量$\vec{a}+\vec{b}$与$\vec{a}-\vec{b}$互相垂直，模长之比为 2：1，若$|\vec{a}|=\sqrt{5}$，则$\vec{a}$与$\vec{a}+\vec{b}$的夹角的余弦值为（　　）

A．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B．$\frac{3\sqrt{5}}{5}$ C．$\frac{\sqrt{5}}{5}$ D．$\frac{1}{2}$

例 23．（多选题）（2023·福建省福州格致中学模拟预测）已知单位向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角为120°,则以下说法正确的是（　　）

A．$|\vec{a}+\vec{b}|=1$ B．$(\vec{a}+2\vec{b})\perp\vec{a}$

C．$\cos\langle\vec{a}-\vec{b},\vec{b}\rangle=\frac{\sqrt{3}}{2}$ D．$\vec{a}+2\vec{b}$与$2\vec{a}+\vec{b}$可以作为平面内的一组基底

例 24．（多选题）（2023·江苏·模拟预测）已知向量$\vec{a}=(-3,2)$，$\vec{b}=(2,1)$，$\vec{c}=(\lambda,-1)$，$\lambda\in\mathrm{R}$，则（　　）

A．若$(\vec{a}+2\vec{b})\perp\vec{c}$，则$\lambda=4$

B．若$\vec{a}=t\vec{b}+\vec{c}$，则$\lambda+t=-6$

C．$\left|\vec{a}+\mu\vec{b}\right|$的最小值为$\frac{7\sqrt{5}}{5}$

D．若向量$\vec{a}+\vec{b}$与向量$2\vec{b}+\vec{c}$的夹角为锐角，则λ的取值范围是$(-\infty,-1)$

例 25．（2023·河南·通许县第一高级中学模拟预测（文））已知$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$是单位向量，$\vec{a}=\vec{e_1}-2\vec{e_2}$，$\vec{b}=3\vec{e_1}+\vec{e_2}$，若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$的夹角的余弦值为（　　）

A．$\frac{3}{5}$ B．$\frac{1}{2}$ C．$\frac{1}{3}$ D．$\frac{1}{5}$

例 26．（2023·安徽师范大学附属中学模拟预测（理））非零向量$\vec{a},\vec{b}$满足$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=2\left|\vec{a}\right|$，则$\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{a}$的夹角为（　　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　D．$\frac{5\pi}{6}$

例 27．（2023·内蒙古·海拉尔第二中学模拟预测（文））已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$为单位向量，$\left|\vec{a}+\lambda\vec{b}\right|=\left|\lambda\vec{a}-\vec{b}\right|(\lambda\neq 0)$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为（　　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{\pi}{2}$　　D．$\frac{2\pi}{3}$

【方法技巧与总结】

求夹角，用数量积，由$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$得$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$，进而求得向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角.

题型三：平面向量的模长

例 28．（2023·福建省厦门集美中学模拟预测）已知向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$满足$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{c})=0$，$\left|\vec{b}-\vec{c}\right|=9$，则$\left|\vec{a}\right|=$______.

例 29．（2023·辽宁沈阳·三模）已知平面向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$满足$\left|\vec{a}\right|=1,\left|\vec{c}\right|=1,\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0,\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$，则$\left|\vec{b}\right|=$

_______.

例 30．（2023·全国·高三专题练习（文））已知向量$\vec{a}=(2,1),\vec{b}=(-2,4)$，则$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

例 31．（2023·江苏·扬中市第二高级中学模拟预测）已知$\vec{a}$与$\vec{b}$为单位向量，且$\vec{a}\perp\vec{b}$，向量$\vec{c}$满足$|\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}|=2$，则$|\vec{c}|$的可能取值有（　　）

A．6　　B．5　　C．4　　D．3

例 32．（2023·江苏·南京市天印高级中学模拟预测）已知平面向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$\left|\vec{a}\right|=2$，$\left|\vec{b}\right|=1$，且$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，则$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=$（　　）

A．$\sqrt{3}$　　B．$\sqrt{5}$　　C．$\sqrt{7}$　　D．3

例 33．（2023·河南·开封市东信学校模拟预测（理））已知非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{6}$，$|\vec{a}|=\sqrt{3},\vec{a}\perp\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$，则$|\vec{b}|=$___________.

例34．（2023·全国·高三专题练习）已知三个非零平面向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$两两夹角相等，且$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=3$，求$|2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}|$.

例 35．（2023·全国·高三专题练习）已知$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$120°$，求$|\vec{a}+\vec{b}|$及$|\vec{a}-\vec{b}|$的值.

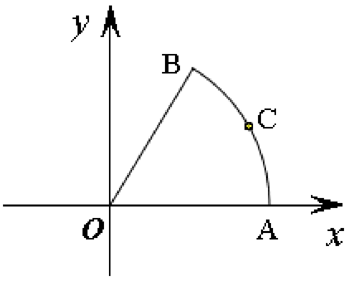
例 36．（2023·福建泉州·模拟预测）已知向量$\vec{a}=(0,1)$，$\vec{b}=(t,\sqrt{3})$，若$\vec{a},\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，则$|\vec{b}|=$___________.

【方法技巧与总结】

求模长，用平方，$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$.

题型四：平面向量的投影、投影向量

例 37．（2023·新疆克拉玛依·三模（理））设$\vec{a}$，$\vec{b}$是两个非零向量，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CD}=\vec{b}$，过$\overrightarrow{AB}$的起点A和终点$B$，分别作$\overrightarrow{CD}$所在直线的垂线，垂足分别为$A_1$，$B_1$，得到$\overrightarrow{A_1B_1}$，则$\overrightarrow{A_1B_1}$叫做向量$\vec{a}$在向量$\vec{b}$上的投影向量.如下图，已知扇形$AOB$的半径为 1，以$O$为坐标原点建立平面直角坐标系，$\overrightarrow{OA}=(1,0)$，$\overrightarrow{OB}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，则弧$AB$的中点$C$的坐标为________；向量$\overrightarrow{CO}$在$\overrightarrow{OB}$上的投影向量为________.



例 38．（2023·江西鹰潭·二模（文））已知向量$\vec{a},\vec{b},\vec{a}=(\sqrt{3},1),|\vec{b}|=\sqrt{2},(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}=3$，则$\vec{b}$在$\vec{a}$方向上的投影为_________

例 39．（2023·江西·南昌市八一中学三模（理））已知向量$\vec{a}=(1,-2)$，$\vec{b}=(3,t)$，且$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影等于-1，则$t=$___________.

例 40．（2023·江苏淮安·模拟预测）已知$|\vec{a}|=2$，$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影为 1，则$\vec{a}+\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影为（　　）

A．-1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．$\sqrt{2}$

例 41．（2023·四川成都·三模（理））在$\triangle ABC$中，已知$\angle A=\frac{7\pi}{12}$，$\angle C=\frac{\pi}{6}$，$AC=2\sqrt{2}$，则向量$\overrightarrow{BA}$在$\overrightarrow{BC}$方向上的投影为（　　）．

A．$2\sqrt{2}$　　　　B．2　　　　C．$\sqrt{2}$　　　　D．$-\sqrt{2}$

例 42．（2023·广西桂林·二模（文））已知向量$\vec{a}=(1,2),\vec{b}=(0,-1)$，则$\vec{a}$在$\vec{b}$方向上的投影为（　　）

A．-1　　　　B．-2　　　　C．1　　　　D．2

例 43．（2023·内蒙古呼和浩特·二模（理））非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$满足$\vec{b}\perp(\vec{a}-\vec{c})$，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{6}$，$|\vec{a}|=3$，则$\vec{c}$在$\vec{b}$上的正射影的数量为（　　）

A．$-\frac{1}{2}$　　　　B．$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　　　C．$\frac{1}{2}$　　　　D．$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

例 44．（2023·辽宁·渤海大学附属高级中学模拟预测）已知单位向量$\vec{a},\vec{b}$满足$|\vec{a}-\vec{b}|=1$，则$\vec{a}$在$\vec{b}$方向上的投影向量为（　　）

A．$\frac{1}{2}\vec{b}$　　　　B．$-\frac{1}{2}\vec{b}$　　　　C．$\frac{1}{2}\vec{a}$　　　　D．$-\frac{1}{2}\vec{a}$

例 45．（2023·海南华侨中学模拟预测）已知平面向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，且$|\vec{a}|=2$，$\vec{b}=(-1,\sqrt{3})$，则$\vec{a}$在$\vec{b}$方向上的投影向量为（　　）

A．$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$　　　　B．$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$　　　　C．$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　　　D．$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

题型五：平面向量的垂直问题

例 46．（2023·海南海口·二模）已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为45°，$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，若$\left(\lambda\vec{a}+\vec{b}\right)\perp\vec{b}$，则$\lambda=$______．

例 47．（2023·广东茂名·二模）已知向量$\vec{a}=$（t，$2t$），$\vec{b}=$（$-t$，1），若（$\vec{a}-\vec{b}$）⊥（$\vec{a}+\vec{b}$），则$t=$_____．

例 48．（2023·青海玉树·高三阶段练习（理））已知向量$\vec{a}=\left(-1,1\right)$，$\vec{b}=\left(1,m\right)$，若$\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)\perp\vec{a}$，则$m=$______.

例 49．（2023·河南开封·模拟预测（理））已知两个单位向量$\vec{e}_1$与$\vec{e}_2$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，若$\vec{a}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2$，$\vec{b}=\vec{e}_1+m\vec{e}_2$，且$\vec{a}\perp\vec{b}$，则实数$m=$（　　）

A．$-\frac{4}{5}$　　B．$\frac{4}{5}$　　C．$-\frac{5}{4}$　　D．$\frac{5}{4}$

例 50．（2023·河南安阳·模拟预测(文))已知向量$\vec{a}=(-2\sqrt{2},4),\vec{b}=\left(1,\cos\frac{\theta}{2}\right)$,其中$\theta\in(0,\pi)$,若$\vec{a}\perp\vec{b}$,则$\sin\theta=$__________.

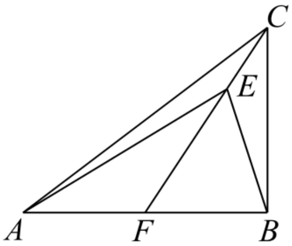
例 51．（2023·全国·模拟预测（文））设向量$\vec{a}=\left(2,1\right)$，$\vec{b}=\left(-1,x\right)$，若$\vec{a}\perp\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$，则$\left|\vec{b}\right|=$__________.

【方法技巧与总结】

$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$

题型六：建立坐标系解决向量问题

例 52．（2023·山东淄博·三模）如图在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=90°$，F为AB中点，$CE=3$，$CB=8$，$AB=12$，则$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}=$（　　）

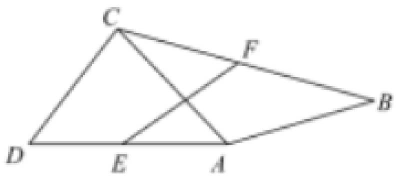


A．-15　　B．-13　　C．13　　D．15

例 53．（2023·贵州贵阳·模拟预测（理））在边长为 2 的正方形$ABCD$中，E是BC的中点，则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DE}=$（　　）

A．2　　B．-2　　C．-4　　D．4

例 54．（2023·江苏·模拟预测）如图，在平面四边形$ABCD$中，E，F分别为AD，BC的中点，$\overrightarrow{AB}=(4,1)$，$\overrightarrow{DC}=(2,3)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,m)$，若$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EF}=0$，则实数$m$的值是（　　）



A．-3　　B．-2　　C．2　　D．3

例 55．（2023·四川南充·三模（理））在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle A=90°$，$AB=2$，$AC=3$，$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$CN$与$BM$交于点$P$，则$\cos\angle BPN$的值为（　　）

A．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B．$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

C．$-\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

例 56．（多选题）（2023·山东聊城·三模）在平面四边形$ABCD$中，$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=1$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}$，则（　　）

A．$\left|\overrightarrow{AC}\right|=1$　　B．$\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}\right|=\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD}\right|$

C．$\overrightarrow{AD}=\sqrt{2}\overrightarrow{BC}$　　D．$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

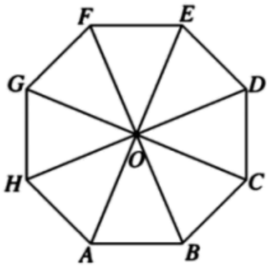
例 57．（多选题）（2023·湖南·长郡中学模拟预测）已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$满足$\left|\vec{a}\right|=2\left|\vec{b}-\vec{a}\right|=2\left|\vec{b}-\vec{c}\right|=2\left|\vec{c}\right|=2$，则可能成立的结果为（　　）

A．$\left|\vec{b}\right|=\frac{3}{4}$　　B．$\left|\vec{b}\right|=\frac{5}{4}$

C．$\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{3}{4}$　　D．$\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{5}{4}$

例 58．（多选题）（2023·湖南·长郡中学模拟预测）如图甲所示，古代中国的太极八卦图是以同圆内的圆心为界，画出相等的两个阴阳鱼，阳鱼的头部有眼，阴鱼的头部有个阳殿，表示万物都在相互转化，互相涉透，阴中有阳，阳中有阴，阴阳相合，相生相克，蕴含现代哲学中的矛盾对立统一规律，其平面图形记为图乙中的正八边形$ABCDEFGH$，其中$OA=2$，则（　　）

甲



乙

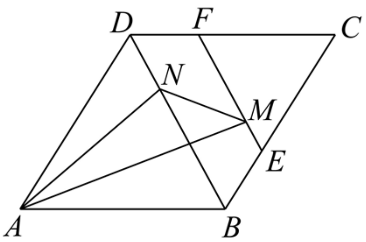
A．$\sqrt{2}\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{0}$　　B．$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=-2\sqrt{2}$

C．$\left|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{EH}\right|=4$　　D．$\left|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{GH}\right|=4+2\sqrt{2}$

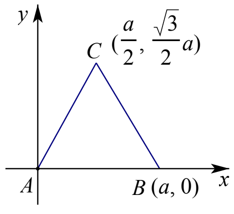
例 59．（2023·江苏南京·模拟预测）在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$\left|\overrightarrow{AB}\right|=3$，$\left|\overrightarrow{AC}\right|=4$，$O$为$\triangle ABC$的重心，$D$在边$BC$上，且$AD\perp BC$，则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AO}$______．

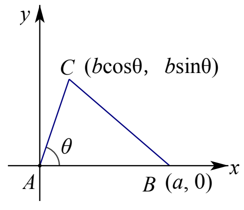
例 60．（2023·北京·北大附中三模）已知正方形$ABCD$的边长为$2, E$是BC的中点，点P满足$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}$，则$\left|\overrightarrow{PD}\right|=$__________；$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PD}=$__________．

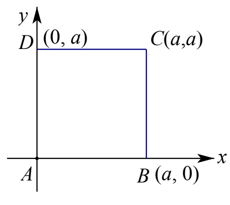
例 61．（2023·天津市西青区杨柳青第一中学模拟预测）如图，在菱形$ABCD$中，$AB=2$，$\angle BAD=60°$，E，F分别为BC，CD上的点，$\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EB}$，$\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{FD}$，若线段$EF$上存在一点$M$，使得$\overrightarrow{AM}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，则$|\overrightarrow{AM}|=$__________，若点$N$为线段$BD$上一个动点，则$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{MN}$的取值范围为__________．

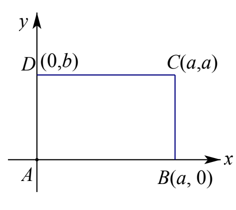


【方法技巧与总结】

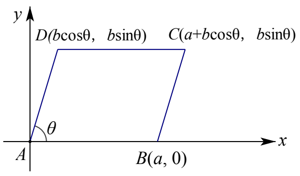




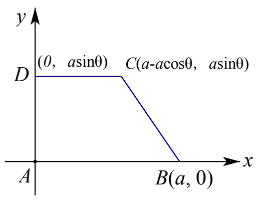




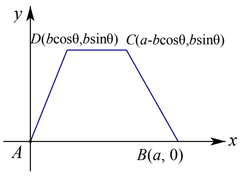
边长为a的等边三角形　已知夹角的任意三角形　　正方形　　　　　　　矩形



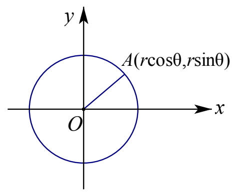
平行四边形



直角梯形



等腰梯形



圆

建系必备（1）三角函数知识 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$；（2）向量三点共线知识 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OB}+(1-\lambda)\overrightarrow{OA}$.

【过关测试】

一、单选题

1．（2023·山东潍坊·模拟预测）定义：$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta$，其中$\theta$为向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角．若$\left|\vec{a}\right|=2$，$\left|\vec{b}\right|=5$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-6$，则$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$等于（　　）

A．6　　　　B．-6　　　　C．-8　　　　D．8

2．（2023·全国·哈师大附中模拟预测（文））已知$\triangle ABC$中，$AB=AC=1$，$\angle BAC=120^{o}$，点 D，E 分别是边 AB，BC 的中点，连接 DE 并延长到点 F，使得 $DE=2EF$，则 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的值为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　　　B．$\frac{3}{8}$　　　　C．$-\frac{1}{2}$　　　　D．$-\frac{3}{8}$

3．（2023·江苏·扬州中学模拟预测）已知向量$\vec{a}=(2,4)$，$\vec{b}=(1,n)$，若$\vec{a}//\vec{b}$，则$\left|\vec{b}\right|=$（　　）

A．$\sqrt{5}$　　　　B．2　　　　C．8　　　　D．$4\sqrt{5}$

4．（2023·北京·潞河中学三模）已知菱形$ABCD$的边长为$a,\angle ABC=60^{\circ}$，则$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CD}=$（　　）

A．$-\frac{3}{2}a^{2}$　　　　B．$-\frac{3}{4}a^{2}$　　　　C．$\frac{3}{4}a^{2}$　　　　D．$\frac{3}{2}a^{2}$

5．（2023·内蒙古赤峰·模拟预测（理））若向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$\left|\vec{a}\right|=1$，$\left|\vec{b}\right|=2$，$\vec{a}\cdot\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)=5$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为（　　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　　　B．$\frac{\pi}{3}$　　　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　　　D．$\frac{5\pi}{6}$

6．（2023·内蒙古·满洲里市教研培训中心三模（文））若$\vec{a}=\left(2,-\sqrt{3}\right)$，$\vec{b}=(2\sin\frac{\pi}{6},2\cos\frac{\pi}{6})$，下列正确的是（　　）

A．$\vec{b}//(\vec{a}-\vec{b})$　　　　B．$\vec{b}\perp(\vec{a}-\vec{b})$

C．$\vec{a}$在$\vec{b}$方向上的投影是$-\frac{1}{2}$　　　　D．$(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})$

7．（2023·江苏苏州·模拟预测）在$\triangle ABC$中，$A=\frac{\pi}{3}$，点 D 在线段 AB 上，点 E 在线段 AC 上，且满足$2AD=DB=2,AE=EC=2$，CD 交 BE 于 F，设$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，则$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}=$（　　）

A．$\frac{6}{5}$　　B．$\frac{17}{5}$　　C．$\frac{29}{5}$　　D．$\frac{32}{5}$

8．（2023·全国·二模（理））已知向量$\vec{a}=(x,y)$，$\vec{b}=(1,2)$，$\vec{c}=(-1,1)$，若满足$\vec{a}//\vec{b}$，$\vec{b}\perp(\vec{a}-\vec{c})$，则向量$\vec{a}$的坐标为（　　）

A．$\left(\frac{6}{5},\frac{3}{5}\right)$　　B．$\left(\frac{3}{5},\frac{6}{5}\right)$　　C．$\left(\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)$　　D．$\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$

9．（2023·山东济南·三模）已知单位向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$，满足$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$，则向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的夹角为(　　)

A．$\frac{2\pi}{3}$　　B．$\frac{\pi}{2}$　　C．$\frac{\pi}{3}$　　D．$\frac{\pi}{6}$

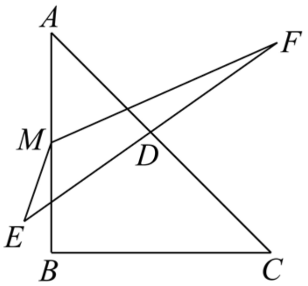
10．（2023·河北邯郸·二模）若向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=2\sqrt{3}$，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$，则向量$\vec{b}$与$\vec{b}-\vec{a}$夹角的余弦值为（　　）.

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{2\sqrt{5}}{9}$　　C．$\frac{7\sqrt{2}}{16}$　　D．$\frac{3\sqrt{30}}{20}$

11．（2023·全国·模拟预测）已知平面向量$\vec{a}=(1-x,3+x)$，$\vec{b}=(2,1+x)$，若$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为（　　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{4}$　　C．$\frac{\pi}{3}$　　D．$\frac{\pi}{2}$

12．（2023·河南安阳·模拟预测（理））如图，在等腰直角$\triangle ABC$中，斜边$AC=2$，M为AB的中点，D为AC的中点．将线段AC绕着点D旋转得到线段EF，则$\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF}=$（　　）



A．-2　　B．$-\frac{3}{2}$　　C．-1　　D．$-\frac{1}{2}$

13．（2023·河南安阳·模拟预测（文））在$\triangle ABC$中，点D在边AC上，且$\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{DC},|\overrightarrow{BA}|=\lambda|\overrightarrow{BC}|$，若$\overrightarrow{BD}\perp(3\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})$，则$\lambda=$（　　）

A．$\frac{4}{3}$　　B．3　　C．2　　D．1

14．（2023·湖南·长沙县第一中学模拟预测）已知△ABC中，$\angle A=60^\circ$，AB=4，AC=6，且$\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{NB}$，则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{NM}=$（　　）

A．12　　B．14　　C．16　　D．18

二、多选题

15．（2023·辽宁实验中学模拟预测）已知平面向量$|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=1$，且$\vec{a}\perp\vec{b}$，$\vec{c}$满足$<\vec{a},\vec{c}>=2<\vec{b},\vec{c}>$，若$|\vec{b}-\vec{c}|>|\vec{a}-\vec{c}|$，则$|\vec{c}|$可能的取值为（　　）

A．4　　　　B．8　　　　C．12　　　　D．16

16．（2023·湖南·长沙一中模拟预测）已知$\vec{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$,$\vec{b}=(\cos\beta,\sin\beta)$,其中$\alpha,\beta\in[0,2\pi)$，则以下结论正确的是（　　）

A．若$\vec{a}//\vec{b}$，则$\alpha=\beta$

B．若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$|\alpha-\beta|=\frac{\pi}{2}$或$\frac{3\pi}{2}$

C．若$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}$，则$|\vec{a}+\vec{b}|=1$

D．若$|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|$，则$\vec{a}\cdot(\vec{a}+b)=\frac{3}{2}$

17．（2023·全国·高三专题练习）已知$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为非零平面向量，则下列说法正确的有（　　）

A．$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

B．$\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow\exists\lambda\in R,\vec{b}=\lambda\vec{a}$

C．若$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$，则$\vec{a}=\vec{b}$

D．$(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$

18．（2023·全国·模拟预测）已知向量$\vec{a}=(2-m,3)$，$\vec{b}=(m,1)$，则下列说法正确的是（　　）

A．若$\vec{a}//\vec{b}$，则$m=\frac{1}{2}$

B．若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$m=3$

C．$|2\vec{a}+\vec{b}|$的最小值为7

D．若$-1<m<3$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为钝角

19．（2023·辽宁·东北育才学校二模）对于非零向量$\vec{m}$，$\vec{n}$，定义运算“$\otimes$”，$\vec{m}\otimes\vec{n}=|\vec{m}||\vec{n}|\sin\langle\vec{m},\vec{n}\rangle$.已知两两不共线的三个向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，则下列结论正确的是（　　）

A．若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$\vec{a}\otimes\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$

B．$(\vec{a}\otimes\vec{b})\vec{c}=\vec{a}(\vec{b}\otimes\vec{c})$

C．$\vec{a}\otimes\vec{b}=(-\vec{a})\otimes\vec{b}$

D．$(\vec{a}+\vec{b})\otimes\vec{c}=(\vec{a}\otimes\vec{c})+(\vec{b}\otimes\vec{c})$

20．（2023·山东日照·模拟预测）已知对任意平面向量$\overrightarrow{AB}=(x,y)$，把$\overrightarrow{AB}$绕其起点$A$沿逆时针方向旋转$\theta$角得到向量$\overrightarrow{AP}=(x\cos\theta-y\sin\theta,x\sin\theta+y\cos\theta)$，叫做把点$B$绕点$A$沿逆时针方向旋转$\theta$角得到点$P$．已知平面内点$A(1,2)$，点$B(1+\sqrt{2},2-2\sqrt{2})$，把点$B$绕点$A$沿顺时针方向旋转$\frac{\pi}{4}$后得到点$P_1$，逆时针旋转$\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{3}$后分别得到点$P_2$，$P_3$则（　　）

A．$\overrightarrow{AP_1}\cdot\overrightarrow{AP_2}=0$

B．$|\overrightarrow{BP_1}|=|\overrightarrow{BP_2}|$

C．$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_3}=\overrightarrow{AP_2}\cdot\overrightarrow{AP_1}$

D．点P_1的坐标为$(0,-1)$

21．（2023·河北·高三阶段练习）若平面向量$\vec{a}=(2\cos\alpha,2\sin\alpha),\vec{b}=(2\cos\beta,2\sin\beta),\vec{c}=(1,\sqrt{3})$

，则下列说法中正确的是（　　）

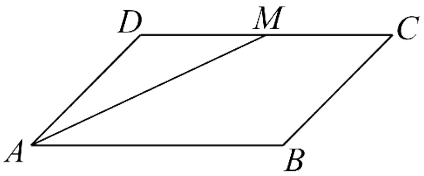
A．若$\vec{a}\,//\,\vec{b}$，则$\beta=\alpha+k\pi,k\in Z$

B．若$\vec{a}\perp\vec{c}$，则$\alpha=\dfrac{\pi}{3}+k\pi,k\in Z$

C．若$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$，则$\alpha=\pi+2k\pi$或$\alpha=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,k\in Z$

D．若$|\vec{a}-\vec{b}|=2\sqrt{2}$，则$\beta-\alpha=k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z$

22．（2023·海南·文昌中学高三阶段练习）如图，平行四边形*ABCD*中，*AB*=4，*AD*=2且$\angle BAD=60^\circ$，*M*为边*CD*的中点，则（　　）



A．$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}$　　B．$\overrightarrow{DM}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AM}$

C．$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=6$　　D．$\overrightarrow{AD}$在$\overrightarrow{AB}$上投影向量的模为2

三、填空题

23．（2023·全国·模拟预测）已知向量$\vec{a}=(2,-5)$，$\vec{b}=(-1,4)$，若$\left(\lambda\vec{a}+\vec{b}\right)\perp\vec{b}$，则$\lambda=$______．

24．（2023·贵州·贵阳一中模拟预测（文））已知向量$\vec{a}=(1,-1),\vec{b}=(m,1-m),\vec{c}=(2m,2)$，若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$\vec{b}\cdot\vec{c}=$__________．

25．（2023·河北·沧县中学模拟预测）已知向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角为$\dfrac{2\pi}{3}$，$\left|\vec{a}\right|=4$，$\left|\vec{b}\right|=3$，则$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=$___________．

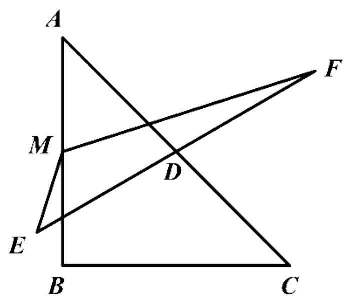
26．（2023·安徽师范大学附属中学模拟预测（文））设$\vec{a},\vec{b}$为非零向量，且$\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|$，则$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为___________．

27．（2023·辽宁·抚顺市第二中学三模）已知半径为*R*的圆*O*内有一条长度为2的弦*AB*，则$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=$_______．

28．（2023·河南·模拟预测（文））若向量$\vec{a},\vec{b}$满足$\left|\vec{a}\right|=1,\vec{b}=(-6,8),\vec{a}\cdot\vec{b}=-5$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为__________．

29．（2023·海南省直辖县级单位·三模）已知平面向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=2$，且$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，则$|\vec{a}+\vec{b}|=$___________．

30．（2023·河北·高三期中）如图，在等腰直角$\triangle ABC$中，斜边$AC=2$，M为AB的中点，D为AC的中点，将线段AC绕着点D旋转得到线段*EF*，则$\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF}=$_____________．


A
F
M
D
E
B
C

专题22 平面向量的数量积及其应用

【考点预测】

一．平面向量的数量积 $\boldsymbol{a}$

（1）平面向量数量积的定义

已知两个非零向量与 $\boldsymbol{b}$，我们把数量 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积（或内积），

记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，规定：零向量与任一向量的数量积为 0．

（2）平面向量数量积的几何意义

①向量的投影：$|\boldsymbol{a}|\cos\theta$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影数量，当 θ 为锐角时，它是正数；当 θ 为钝角时，它是负数；当 θ 为直角时，它是 0．

② $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的几何意义：数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 等于 $\boldsymbol{a}$ 的长度 $|\boldsymbol{a}|$ 与 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上射影 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 的乘积．

二．数量积的运算律

已知向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 和实数 λ，则：

① $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

② $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$；

③ $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$．

三．数量积的性质

设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 都是非零向量，$\boldsymbol{e}$ 是与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同的单位向量，θ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 的夹角，则

① $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$．② $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$．

③当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$．

特别地，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$ 或 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$．

④ $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\ (|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\neq 0)$．⑤ $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$．

四．数量积的坐标运算

已知非零向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2)$，$\theta$ 为向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的夹角．

结论	几何表示	坐标表示
模	$\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$	$\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{x^2+y^2}$
数量积	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta$	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$
夹角	$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}$	$\cos\theta=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$
$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充要条件	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$	$x_1x_2+y_1y_2=0$

$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要条件	$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$	$x_1x_2+y_1y_2=0$
$\lvert\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\rvert$ 与 $\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert$ 的关系	$\lvert\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\rvert\leqslant\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert$(当且仅当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时等号成立)	$\lvert x_1x_2+y_1y_2\rvert\leqslant\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}$

五、向量中的易错点

（1）平面向量的数量积是一个实数，可正、可负、可为零，且$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leq|\vec{a}||\vec{b}|$.

（2）当$\vec{a}\neq\vec{0}$时，由$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$不能推出$\vec{b}$一定是零向量，这是因为任一与$\vec{a}$垂直的非零向量$\vec{b}$都有$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

当$\vec{a}\neq\vec{0}$时，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$时，也不能推出一定有$\vec{b}=\vec{c}$，当$\vec{b}$是与$\vec{a}$垂直的非零向量，$\vec{c}$是另一与$\vec{a}$垂直的非零向量时，有$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=0$，但$\vec{b}\neq\vec{c}$.

（3）数量积不满足结合律，即$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}\neq(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$，这是因为$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$是一个与$\vec{c}$共线的向量，而$(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$是一个与$\vec{a}$共线的向量，而$\vec{a}$与$\vec{c}$不一定共线，所以$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$不一定等于$(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$，即凡有数量积的结合律形式的选项，一般都是错误选项.

（4）非零向量夹角为锐角（或钝角）.当且仅当$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$且$\vec{a}\neq\lambda\vec{b}(\lambda>0)$（或$\vec{a}\cdot\vec{b}<0$，且$\vec{a}\neq\lambda\vec{b}(\lambda<0)$)

【方法技巧与总结】

(1)$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影是一个数量，它可以为正，可以为负，也可以等于 0.

(2)数量积的运算要注意$\vec{a}=\vec{0}$时，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，但$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$时不能得到$\vec{a}=\vec{0}$或$\vec{b}=\vec{0}$，因为$\vec{a}\perp\vec{b}$时，也有$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

(3)根据平面向量数量积的性质：$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$，$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$，$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$等，所以平面向量数量积可以用来解决有关长度、角度、垂直的问题.

(4)若a、b、c是实数，则$ab=ac\Rightarrow b=c$ ($a\neq0$)；但对于向量，就没有这样的性质，即若向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$满足$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$（$\vec{a}\neq0$），则不一定有$\vec{b}=\vec{c}$，即等式两边不能同时约去一个向量，但可以同时乘以一个向量.

(5)数量积运算不适合结合律，即$(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}\neq\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$，这是由于$(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$表示一个与$\vec{c}$共线的向量，$\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$表示一个与$\vec{a}$共线的向量，而$\vec{a}$与$\vec{c}$不一定共线，因此$(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$与$\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$不一定相等.

【题型归纳目录】

题型一：平面向量的数量积运算

题型二：平面向量的夹角

题型三：平面向量的模长

题型四：平面向量的投影、投影向量

题型五：平面向量的垂直问题

题型六：建立坐标系解决向量问题

【典例例题】

题型一：平面向量的数量积运算

例 1．（2023·全国·模拟预测（理））在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$，O为$\triangle ABC$的外心，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BO}=2$，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BO}=4$，则$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=$（　　）

A．2　　　　B．$2\sqrt{2}$　　　　C．4　　　　D．$4\sqrt{2}$

答案：B

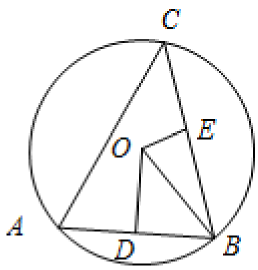
【解析】

分析：

设AB,BC的中点为D,E，将$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BO}=2$，变为$2\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BO}$，根据数量积的几何意义可得$|\overrightarrow{BD}|=1$，同理求得$|\overrightarrow{BC}|$，根据数量积的定义即可求得答案.

【详解】

如图，设AB,BC的中点为D,E，连接OD,OE,则$OD\perp AB,OE\perp BC$　，



故$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BO}=2$，即$2\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BO}=2|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{BO}|\cos\angle OBD=2$　，

即$|\overrightarrow{BD}|^2=1,|\overrightarrow{BD}|=1$，故$|\overrightarrow{BA}|=2$，

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BO}=4$，即$2\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BO}=2|\overrightarrow{BE}|\cdot|\overrightarrow{BO}|\cos\angle OBE=4$　，

即$|\overrightarrow{BE}|^2=2,|\overrightarrow{BE}|=\sqrt{2}$，故$|\overrightarrow{BC}|=2\sqrt{2}$，

故$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos\angle BAC=2\times2\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=2\sqrt{2}$，

故选：B

例 2．（2023·河南安阳·模拟预测（理））已知AH是$\mathrm{Rt}\triangle ABC$斜边BC上的高，$AH=2\sqrt{2}$，点M在线段AH上，满足$(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})\cdot\overrightarrow{AH}=8\sqrt{2}$，则$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=$（　　）

A．-4　　　　B．-2　　　　C．2　　　　D．4

答案：A

【解析】

分析：

由 $(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})\cdot\overrightarrow{AH}=8\sqrt{2}$ 结合数量积的运算可得 $|\overrightarrow{MH}|=2$，由 AH 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 斜边 BC 上的高，$AH=2\sqrt{2}$，可得 $|\overrightarrow{HC}|\cdot|\overrightarrow{HB}|=|\overrightarrow{AH}|^2=8$，然后对 $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HB})\cdot(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HC})$ 化简可求得结果

【详解】

因为 AH 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 斜边 BC 上的高，$AH=2\sqrt{2}$

所以 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HB}=0, \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HC}=0$，$|\overrightarrow{HC}|\cdot|\overrightarrow{HB}|=|\overrightarrow{AH}|^2=8$，

因为 $(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})\cdot\overrightarrow{AH}=8\sqrt{2}$，

所以 $(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HC})\cdot\overrightarrow{AH}=8\sqrt{2}$，

所以 $2\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AH}=8\sqrt{2}$，

所以 $\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{AH}=4\sqrt{2}$，

所以 $|\overrightarrow{MH}|\cdot|\overrightarrow{AH}|=4\sqrt{2}$，

所以 $|\overrightarrow{MH}|=2$，

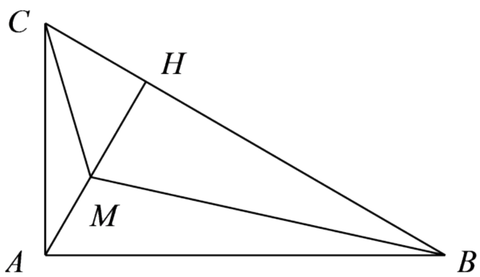
所以 $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HB})\cdot(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HC})$

$=\overrightarrow{MH}^2+\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HB}$

$=|\overrightarrow{MH}|^2+|\overrightarrow{HC}|\cdot|\overrightarrow{HB}|\cos\pi$

$=2^2+8\times(-1)=-4$，

故选：A



例 3．（2023·全国·高三专题练习（理））已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=\sqrt{3},|\vec{a}-2\vec{b}|=3$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$（　　）

A．-2　　　　B．-1　　　　C．1　　　　D．2

答案：C

【解析】

分析：

根据给定模长，利用向量的数量积运算求解即可.

【详解】

解：$\because |\vec{a}-2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\left|\vec{b}\right|^2$，

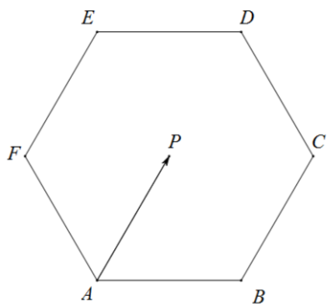
又$\because |\vec{a}|=1,|\vec{b}|=\sqrt{3},|\vec{a}-2\vec{b}|=3,$

$\therefore 9=1-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\times 3=13-4\vec{a}\cdot\vec{b}$，

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=1$

故选：C.

例 4．（2023·四川省泸县第二中学模拟预测（文））如图，正六边形 $ABCDEF$ 中，$AB=2$，点 P 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=$______.



答案：2

【解析】

分析：

找到向量的模长和夹角，带入向量的数量积公式即可.

【详解】

在正六边形中，点 P 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心，

$\therefore \angle PAB=60^\circ$，且 $AP=AB=2$，

$\therefore \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\cos 60^\circ=2\times 2\times\frac{1}{2}=2$.

故答案为：2.

例 5．（2023·安徽·合肥市第八中学模拟预测（理））已知向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0},|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=3,|\vec{c}|=4$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$________.

答案：3

【解析】

分析：

由 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，得 $\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$，两边平方化简可得答案

【详解】

由 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，得 $\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$，

两边平方，得 $\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=\vec{c}^2$，

因为 $|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=3,|\vec{c}|=4$，

所以 $1+2\vec{a}\cdot\vec{b}+9=16$，得 $\vec{a}\cdot\vec{b}=3$.

故答案为：3.

例 6.（2023·陕西·模拟预测（理））已知向量 $\vec{a}=(1,x)$，$\vec{b}=(0,1)$，若 $|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{5}$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$

____

答案：0 或 -4##-4 或 0.

【解析】

分析：

由向量模长坐标运算可求得 x，由向量数量积的坐标运算可求得结果.

【详解】

$\because \vec{a}+2\vec{b}=(1,x+2)$，$\therefore |\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{1+(x+2)^2}=\sqrt{5}$，解得：$x=0$ 或 $x=-4$；

当 $x=0$ 时，$\vec{a}=(1,0)$，$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=0$；当 $x=-4$ 时，$\vec{a}=(1,-4)$，$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=0-4=-4$；

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=0$ 或 -4.

故答案为：0 或 -4.

例 7.（2023·上海徐汇·二模）在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB=1$，$AC=2$，$\angle A=120°$，若点 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面上一点，且满足 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}=-1$，则实数 λ 的值为

______________.

答案：1 或 $\frac{1}{4}$

【解析】

分析：

根据平面向量的线性运算法则，分别把 $\overrightarrow{BP},\overrightarrow{CP}$ 用 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 表示出来，再用 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}=-1$ 建立方程，解出 λ 的值.

【详解】

由 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$，得 $\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$，即 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{AC}$，

$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+(\lambda-1)\overrightarrow{AC}$，

在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB=1$，$AC=2$，$\angle A=120°$，

所以 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}=\lambda\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}+(\lambda-1)\overrightarrow{AC})=\lambda\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\lambda(\lambda-1)\overrightarrow{AC}^2)$

$=2\lambda\cos120°+4\lambda(\lambda-1)=4\lambda^2-5\lambda=-1$，

即$4\lambda^2-5\lambda+1=0$，解得$\lambda=1$或$\lambda=\frac{1}{4}$

所以实数λ的值为1或$\frac{1}{4}$.

故答案为：1或$\frac{1}{4}$.

例 8.（2023·陕西·交大附中模拟预测（理））已知在平行四边形$ABCD$中，$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EC},\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FC},|\overrightarrow{AE}|=2,|\overrightarrow{AF}|=\sqrt{6}$，则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$值为__________.

答案：$\frac{9}{4}$

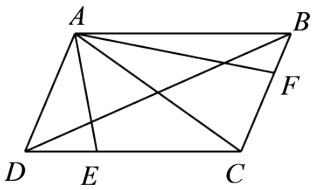
【解析】

分析：

由向量加法的几何意义及数量积运算律有$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DC}^2-\overrightarrow{CB}^2$，再由$\begin{cases}\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}\\\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{DC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\end{cases}$结合数量积运算律，即可得结果.

【详解】

由题设可得如下图：$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$，而$\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{CB}$，



所以$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DC}^2-\overrightarrow{CB}^2$，

又$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EC},\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FC},|\overrightarrow{AE}|=2,|\overrightarrow{AF}|=\sqrt{6}$，

所以$\begin{cases}\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}\\\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{DC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\end{cases}$，则$\begin{cases}\overrightarrow{BC}^2+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}+\frac{1}{9}\overrightarrow{DC}^2=4\\\overrightarrow{DC}^2+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}+\frac{1}{9}\overrightarrow{BC}^2=6\end{cases}$，

故$\frac{8}{9}(\overrightarrow{DC}^2-\overrightarrow{BC}^2)=2$，可得$\overrightarrow{DC}^2-\overrightarrow{BC}^2=\frac{9}{4}$，即$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=\frac{9}{4}$.

故答案为：$\frac{9}{4}$

例 9.（2023·福建省福州第一中学三模）过点$M(2,\sqrt{3})$的直线与$\odot C:(x-3)^2+y^2=16$交于A，B两点，当M为线段AB中点时，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=$__________.

答案：-8

【解析】

分析：

由题意可得 $M(2,\sqrt{3})$ 在 e C 内，又由 M 为线段 AB 中点 $AB\perp CM$，由两点间距离公式得 $CM=2=\frac{1}{2}AC$，进而求得 $\angle ACB=120^{\circ}$，再由向量的数量积公式计算即可得答案.

【详解】

解：因为点 $M(2,\sqrt{3})$ 在 e $C:(x-3)^2+y^2=16$ 内，

所以当 M 为线段 AB 中点时，$AB\perp CM$，

又因为 e C 的半径为 4，$CM=2=\frac{1}{2}AC$，

所以 $\angle ACM=60^{\circ}$，

所以 $\angle ACB=120^{\circ}$，

所以，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{CB}|\cdot\cos120^{\circ}=4\times4\times(-\frac{1}{2})=-8$.

故答案为：-8.

例 10.（2023·全国·模拟预测（理））已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线，且 $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=2$，$|\vec{a}|=1$，若 $(2\vec{a}-\vec{b})\perp(2\vec{a}+\vec{b})$，则 $\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=$__________.

答案：-3

【解析】

分析：

由 $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=2$ 得 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，由 $(2\vec{a}-\vec{b})\perp(2\vec{a}+\vec{b})$ 得 $|\vec{b}|=2$，即可求解结果.

【详解】

由 $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=1+\vec{a}\cdot\vec{b}=2$ 得 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$

由 $(2\vec{a}-\vec{b})\perp(2\vec{a}+\vec{b})$ 得 $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})=4\vec{a}^2-\vec{b}^2=0$，所以 $|\vec{b}|=2$

则 $\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}^2=1-4=-3$

故答案为：-3

例 11.（2023·全国·高三专题练习（理））设向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角的余弦值为 $\frac{1}{3}$，且 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=3$，则 $(2\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=$________.

答案：11

【解析】

分析：

设$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为θ，依题意可得$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$，再根据数量积的定义求出$\vec{a}\cdot\vec{b}$，最后根据数量积的运算律计算可得.

【详解】

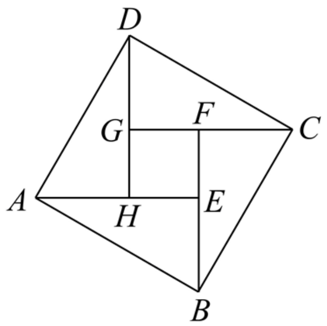
解：设$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为θ，因为$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角的余弦值为$\dfrac{1}{3}$，即$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$，

又$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=3$，所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta=1\times3\times\dfrac{1}{3}=1$，

所以$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=2\times1+3^2=11$.

故答案为：11.

例 12.（2023·江苏·徐州市第七中学模拟预测）如图是第 24 届国际数学家大会的会标，它是根据中国古代数学家赵爽的弦图设计的，大正方形$ABCD$是由 4 个全等的直角三角形和中间的小正方形$EFGH$组成的．若大正方形的边长为$\sqrt{5}$，E为线段BF的中点，则$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}=$______.



答案：4

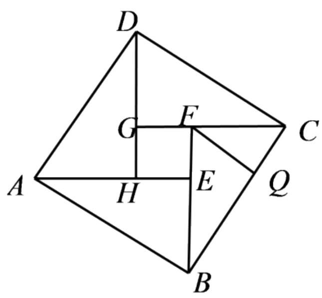
【解析】

分析：

利用数量积的几何意义求解.

【详解】

解：如图所示：



设 $CF=x$，由题可得 $BF=2x$，

所以 $x^2+(2x)^2=5$，

解得 $x=1$．

过 F 作 BC 的垂线，垂足设为 Q，

故 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}=BQ\cdot BC=BF^2=4$，

故答案为：4．

【方法技巧与总结】

（1）求平面向量的数量积是较为常规的题型，最重要的方法是紧扣数量积的定义找到解题思路．

（2）平面向量数量积的几何意义及坐标表示，分别突出了它的几何特征和代数特征，因而平面向量数量积是中学数学较多知识的交汇处，因此它的应用也就十分广泛．

（3）平面向量的投影问题，是近几年的高考热点问题，应熟练掌握其公式：向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向上的投影为 $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$．

（4）向量运算与整式运算的同与异（无坐标的向量运算）

同：$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$；$|a\pm b|=\sqrt{a^2\pm 2ab+b^2}$；$a(b+c)=ab+ac$ 公式都可通用

异：整式：$a\cdot b=\pm|a||b|$，$|a|$ 仅仅表示数；向量：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$（$\theta$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角）

$|m\vec{a}\pm n\vec{b}|=\sqrt{m^2|\vec{a}|^2\pm 2mn|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta+n^2|\vec{b}|^2}$，使用范围广泛，通常是求模或者夹角．

$|m\vec{a}|-|n\vec{b}|\le|m\vec{a}\pm n\vec{b}|\le|m\vec{a}|+|n\vec{b}|$，通常是求 $|m\vec{a}\pm n\vec{b}|$ 最值的时候用．

题型二：平面向量的夹角

例 13．（2023·甘肃·高台县第一中学模拟预测（文））已知非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|$，$\vec{a}\perp(\vec{a}-\vec{b})$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为______．

答案：$\dfrac{\pi}{4}$##$45°$

【解析】

分析：

根据已知求出 $\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{b}$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}|\vec{a}|$，即得解．

【详解】

解：因为 $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|$，所以 $\vec{a}^2+\vec{b}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}^2$，$\therefore\vec{b}^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}$．

因为$\vec{a}\perp\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$，所以$\vec{a}\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0,\therefore\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{b}$，

所以$\vec{b}^2=2\vec{a}^2$，$\therefore|\vec{b}|=\sqrt{2}|\vec{a}|$.

设$\vec{a}$与$\vec{b}$夹角为θ，所以$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\sqrt{2}|\vec{a}|^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

因为$\theta\in[0,\pi]$，所以$\theta=\dfrac{\pi}{4}$.

例 14.（2023·安徽·合肥一六八中学模拟预测（文））已知向量$|\vec{b}|=1$，向量$\vec{a}=(1,\sqrt{3})$，且$|\vec{a}-\sqrt{2}\vec{b}|=\sqrt{6}$，则向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角为___________.

答案：$\dfrac{\pi}{2}$##$90°$

【解析】

分析：

由$|\vec{a}-\sqrt{2}\vec{b}|=\sqrt{6}$两边平方，结合数量积的定义和性质化简可求向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角

【详解】

因为$\vec{a}=(1,\sqrt{3})$，所以$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$

因为$|\vec{a}-\sqrt{2}\vec{b}|=\sqrt{6}$，

所以$\vec{a}^2-2\sqrt{2}\vec{a}\vec{b}+2\vec{b}^2=6$，又$|\vec{b}|=1$，

所以$4-2\sqrt{2}\vec{a}\cdot\vec{b}+2=6$，所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角为θ,则$\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\theta=0$

所以$\cos\theta=0$，则$\theta=\dfrac{\pi}{2}$.

故答案为：$\dfrac{\pi}{2}$.

例 15.（2023·湖北武汉·模拟预测）两不共线的向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，满足$\left|\vec{a}\right|=3\left|\vec{b}\right|$，且$\forall t\in R$，$\left|\vec{a}-t\vec{b}\right|\geq\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$，则$\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=$（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　C．$\dfrac{1}{3}$　　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

答案：C

【解析】

分析：

由$\left|\vec{a}-t\vec{b}\right|\geq\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$两边平方后整理得一元二次不等式，根据一元二次函数的性质可判断$\Delta\leq0$

，整理后可知Δ只能为0，即可解得答案.

【详解】

解：由题意得：

$\because \forall t\in R$，$\left|\vec{a}-t\vec{b}\right|\geq\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$

$\therefore \forall t\in R$，$\left|\vec{a}\right|^2+t^2\left|\vec{b}\right|^2-2t\vec{a}\cdot\vec{b}\geq\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

即$t^2\left|\vec{b}\right|^2-6t\left|\vec{b}\right|^2\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle-\left|\vec{b}\right|^2+6\left|\vec{b}\right|^2\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\geq 0$

$\because \left|\vec{b}\right|\neq 0$

$\therefore \forall t\in R$，$t^2-6t\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle-1+6\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\geq 0$

$\therefore \Delta=36\cos^2\langle\vec{a},\vec{b}\rangle-4\left(6\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle-1\right)=36\left(\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle-\frac{1}{3}\right)^2\leq 0$

$\therefore \cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle-\frac{1}{3}=0$，即$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{1}{3}$

故选：C

例 16.（2023·云南师大附中模拟预测（理））已知向量$\vec{a}=(2t,2)$，$\vec{b}=(-t-2,-5)$，若向量$\vec{a}$与向量$\vec{a}+\vec{b}$的夹角为钝角，则t的取值范围为（　　）

A．$(-3,1)$　　　　B．$(-3,-1)\cup(-1,1)$

C．$(-1,3)$　　　　D．$\left(-1,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},3\right)$

答案：D

【解析】

分析：

求出$\vec{a}+\vec{b}$的坐标，求得当$\vec{a}$与$\vec{a}+\vec{b}$共线时$t=\frac{1}{2}$，根据向量$\vec{a}$与向量$\vec{a}+\vec{b}$的夹角为钝角,列出相应的不等式，求得答案.

【详解】

因为$\vec{a}+\vec{b}=(t-2,-3)$，又$\vec{a}$与$\vec{a}+\vec{b}$的夹角为钝角，

当$\vec{a}$与$\vec{a}+\vec{b}$共线时，$-6t-2(t-2)=0,t=\frac{1}{2}$　，

所以$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})<0$且$\vec{a}$与$\vec{a}+\vec{b}$的不共线，即$t^2-2t-3<0$且$t\neq\frac{1}{2}$，

所以$t\in\left(-1,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},3\right)$，

故选：D.

例 17．（2023·广东深圳·高三阶段练习）已知向量 $\vec{a}=\left(\cos 30°,-\sin 210°\right)$，$\vec{b}=(-\sqrt{3},1)$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角的余弦值为________．

答案：$-\frac{1}{2}$

【解析】

分析：

化简向量 $\vec{a}$，根据向量的模的公式，数量积公式和向量的夹角公式求解.

【详解】

由 $\vec{a}=\left(\cos 30°,-\sin 210°\right)$ 知 $\vec{a}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，故 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times(-\sqrt{3})+\frac{1}{2}\times 1=-1$，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，

记 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\times|\vec{b}|}=\frac{-1}{1\times 2}=-\frac{1}{2}$．

故答案为：$-\frac{1}{2}$.

例 18．（2023·全国·高三专题练习）已知向量 $\vec{\boldsymbol{a}}=(3,4),\vec{\boldsymbol{b}}=(1,0),\vec{\boldsymbol{c}}=\vec{\boldsymbol{a}}+t\vec{\boldsymbol{b}}$，若 $<\vec{\boldsymbol{a}},\vec{\boldsymbol{c}}>=<\vec{\boldsymbol{b}},\vec{\boldsymbol{c}}>$，则 $t=$（　　）

A．-6　　　B．-5　　　C．5　　　D．6

答案：C

【解析】

分析：

利用向量的运算和向量的夹角的余弦公式的坐标形式化简即可求得

【详解】

解：$\vec{c}=\left(3+t,4\right)$，$\cos\vec{a},\vec{c}=\cos b,\vec{c}$，即 $\frac{9+3t+16}{5|\vec{c}|}=\frac{3+t}{|\vec{c}|}$，解得 $t=5$，

故选：C

例 19．（2023·湖南·长沙市明德中学二模）已知非零向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 满足 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$，则向量 $\vec{b}$ 与向量 $\vec{a}-\vec{b}$ 夹角的余弦值为（　　）

A．$-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　B．0

C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

答案：A

【解析】

分析：

根据$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，设$\vec{a}=(1,0)$，$\vec{b}=(0,t)$，根据$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$求出$t^2=1$，再根据平面向量的夹角公式计算可得解.

【详解】

因为$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，所以可设$\vec{a}=(1,0)$，$\vec{b}=(0,t)$，则$\vec{a}+\vec{b}=(1,t)$，$\vec{a}-\vec{b}=(1,-t)$，

因为$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$，所以$1-t^2=0$，即$t^2=1$.

则$\cos<\vec{b},\vec{a}-\vec{b}>=\dfrac{\vec{b}\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)}{|\vec{b}|\cdot|\vec{a}-\vec{b}|}=\dfrac{-t^2}{|t|\cdot\sqrt{1+t^2}}=\dfrac{-1}{1\times\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

故选：A.

例 20．（2023·辽宁·大连市一 0 三中学模拟预测）已知单位向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{3}\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为（　　）

A．$30°$　　B．$60°$　　C．$120°$　　D．$150°$

答案：C

【解析】

分析：

根据数量积的运算律及夹角公式计算可得；

【详解】

解：因为$\vec{a}$，$\vec{b}$为单位向量，所以$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$，

又$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{3}\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$，所以$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=3\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2$，即$\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=3\left(\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2\right)$，

所以$2\left(\vec{a}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2\right)=0$，即$2\left(\left|\vec{a}\right|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2\right)=0$，所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$，

所以$\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=-\dfrac{1}{2}$，因为$\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle\in[0,\pi]$，所以$\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\dfrac{2\pi}{3}$；

故选：C

例 21．（2023·北京市大兴区兴华中学三模）已知$\vec{a}$为单位向量，向量$\vec{b}=(1,2)$，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，则$\left\langle\vec{a},\vec{b}-\vec{a}\right\rangle=$（　　）

A．$\dfrac{\pi}{6}$　　B．$\dfrac{\pi}{4}$　　C．$\dfrac{\pi}{3}$　　D．$\dfrac{3\pi}{4}$

答案：B

【解析】

分析：

先根据已知条件求出$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$和$\left|\vec{b}-\vec{a}\right|$，然后利用向量的夹角公式可求出结果

【详解】

因为 $\vec{a}$ 为单位向量，向量 $\vec{b}=(1,2)$，且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，

所以 $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}^2=2-1=1$，

$\left|\vec{b}-\vec{a}\right|=\sqrt{(\vec{b}-\vec{a})^2}=\sqrt{\vec{b}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}^2}=\sqrt{5-2\times2+1}=\sqrt{2}$，

所以 $\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}-\vec{a}\right\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)}{|\vec{a}||\vec{b}-\vec{a}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

因为 $\left\langle\vec{a},\vec{b}-\vec{a}\right\rangle\in[0,\pi]$，

所以 $\left\langle\vec{a},\vec{b}-\vec{a}\right\rangle=\dfrac{\pi}{4}$，

故选：B

例 22．（2023·全国·模拟预测（理））已知平面向量 $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\vec{b}$ 互相垂直，模长之比为 2：1，若 $|\vec{a}|=\sqrt{5}$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{a}+\vec{b}$ 的夹角的余弦值为（　　）

A．$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　B．$\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$　　C．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　D．$\dfrac{1}{2}$

答案：A

【解析】

分析：

利用向量 $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\vec{b}$ 互相垂直，模长之比为 2：1，利用数量积求得向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的模长及数量积，然后利用平面向量夹角公式求得结果.

【详解】

平面向量 $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\vec{b}$ 互相垂直，模长之比为 2：1，则 $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$ 且 $|\vec{a}+\vec{b}|=2|\vec{a}-\vec{b}|$，得 $\vec{a}^2=\vec{b}^2$，又 $|\vec{a}|=\sqrt{5}$，则 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=\sqrt{5}$，将 $|\vec{a}+\vec{b}|=2|\vec{a}-\vec{b}|$ 平方得

$\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=4\vec{a}^2-8\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2$，解得 $\vec{a}\cdot\vec{b}=3$，$|\vec{a}+\vec{b}|^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=16$，则 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=4$，设 $\vec{a}$ 与 $\vec{a}+\vec{b}$ 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)}{|\vec{a}||\vec{a}+\vec{b}|}=\dfrac{\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{a}+\vec{b}|}=\dfrac{5+3}{\sqrt{5}\times4}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

故选：A.

例 23．（多选题）（2023·福建省福州格致中学模拟预测）已知单位向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为 120°，则以下说法正确的是（　　）

A．$|\vec{a}+\vec{b}|=1$　　B．$(\vec{a}+2\vec{b})\perp\vec{a}$

C．$\cos\langle\vec{a}-\vec{b},\vec{b}\rangle=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\vec{a}+2\vec{b}$ 与 $2\vec{a}+\vec{b}$

可以作为平面内的一组基底

答案：ABD

【解析】

分析：

根据向量的模的公式，数量积的运算，向量的夹角公式，判断向量共线的条件逐项验证即可

【详解】

据题意，$\vec{a}^2=\vec{b}^2=1,\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times1\times\cos120^\circ=-\frac{1}{2}$

因为$(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=1+1+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1$

所以$|\vec{a}+\vec{b}|=1$,所以 A 对

因为$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot\vec{a}=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=1+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=0$,所以$(\vec{a}+2\vec{b})\perp\vec{a}$,所以 B 对.

因为$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}^2=-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2}$,$(\vec{a}-\vec{b})^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

所以$\cos\langle\vec{a}-\vec{b},\vec{b}\rangle=\frac{(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}}{|\vec{a}-\vec{b}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{-\frac{3}{2}}{\sqrt{3}\times1}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 C 错

因为$\vec{a}+2\vec{b}$与$2\vec{a}+\vec{b}$不共线,所以可以作为平面内的一组基底,所以 D 正确

故选：ABD

例 24．（多选题）（2023·江苏·模拟预测）已知向量$\vec{a}=(-3,2)$，$\vec{b}=(2,1)$，$\vec{c}=(\lambda,-1)$，$\lambda\in\mathrm{R}$，则（　　）

A．若$(\vec{a}+2\vec{b})\perp\vec{c}$，则$\lambda=4$

B．若$\vec{a}=t\vec{b}+\vec{c}$，则$\lambda+t=-6$

C．$|\vec{a}+\mu\vec{b}|$的最小值为$\frac{7\sqrt{5}}{5}$

D．若向量$\vec{a}+\vec{b}$与向量$2\vec{b}+\vec{c}$的夹角为锐角，则λ的取值范围是$(-\infty,-1)$

答案：ABC

【解析】

分析：

利用向量的坐标运算及向量垂直的坐标表示判断 A，利用向量坐标的表示可判断 B，利用向量的模长的坐标公式及二次函数的性质可判断 C，利用向量数量积的坐标表示及向量共线的坐标表示可判断 D.

【详解】

对于 A，因为$\vec{a}+2\vec{b}=(1,4)$，$\vec{c}=(\lambda,-1)$，$(\vec{a}+2\vec{b})\perp\vec{c}$，所以$1\times\lambda+4\times(-1)=0$，解得$\lambda=4$

，所以 A 正确.

对于 B，由 $\vec{a}=t\vec{b}+\vec{c}$，得 $(-3,2)=t(2,1)+(\lambda,-1)=(2t+\lambda,t-1)$，

则 $\begin{cases}-3=2t+\lambda,\\ 2=t-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=-9\\ t=3\end{cases}$，故 $\lambda+t=-6$，所以 B 正确.

对于 C，因为 $\vec{a}+\mu\vec{b}=(-3,2)+\mu(2,1)=(2\mu-3,\mu+2)$，

所以 $\left|\vec{a}+\mu\vec{b}\right|=\sqrt{(2\mu-3)^2+(\mu+2)^2}=\sqrt{5\mu^2-8\mu+13}=\sqrt{5\left(\mu-\frac{4}{5}\right)^2+\frac{49}{5}}$，

则当 $\mu=\frac{4}{5}$ 时，$\left|\vec{a}+\mu\vec{b}\right|$ 取得最小值，为 $\frac{7\sqrt{5}}{5}$，所以 C 正确.

对于 D，因为 $\vec{a}+\vec{b}=(-1,3)$，$2\vec{b}+\vec{c}=(4+\lambda,1)$，向量 $\vec{a}+\vec{b}$ 与向量 $2\vec{b}+\vec{c}$ 的夹角为锐角，

所以 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{b}+\vec{c})=-1\times(4+\lambda)+3\times1>0$，解得 $\lambda<-1$；

当向量 $\vec{a}+\vec{b}$ 与向量 $2\vec{b}+\vec{c}$ 共线时，$-1\times1-3\times(4+\lambda)=0$，解得 $\lambda=-\frac{13}{3}$，

所以 λ 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{13}{3}\right)\cup\left(-\frac{13}{3},-1\right)$，所以 D 不正确.

故选：ABC.

例 25.（2023·河南·通许县第一高级中学模拟预测(文)）已知 $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ 是单位向量，$\vec{a}=\vec{e_1}-2\vec{e_2}$，$\vec{b}=3\vec{e_1}+\vec{e_2}$，若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ 的夹角的余弦值为（　　）

A．$\frac{3}{5}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{1}{5}$

答案：D

【解析】

分析：

根据平面向量数量积的运算性质，结合平面向量夹角公式进行求解即可.

【详解】

由题意知 $\left|\vec{e_1}\right|=\left|\vec{e_2}\right|=1$，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(\vec{e_1}-2\vec{e_2}\right)\cdot\left(3\vec{e_1}+\vec{e_2}\right)=0\Rightarrow3\vec{e_1}^2-2\vec{e_2}^2-5\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}=0$，

即 $\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}=\frac{1}{5}$，所以 $\cos\left\langle\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}\right\rangle=\frac{1}{5}$.

故选：D.

例 26.（2023·安徽师范大学附属中学模拟预测（理））非零向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=2\left|\vec{a}\right|$，则 $\vec{a}-\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 的夹角为（　　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　D．$\frac{5\pi}{6}$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
https://d.book118.com/745102003121011214