

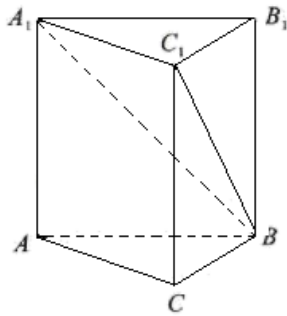
新疆维吾尔自治区阿克苏地区库车县乌尊镇中学 2024 届数学高三第一学期期末质量检测模拟试题

注意事项:

- 1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型 (B) 填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
- 2. 作答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
- 3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上; 如需改动, 先划掉原来的答案, 然后再写上新答案; 不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
- 4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 《九章算术》中记载, 堑堵是底面为直角三角形的直三棱柱, 阳马指底面为矩形, 一侧棱垂直于底面的四棱锥. 如图, 在堑堵 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC \perp BC$, $AA_1 = 2$, 当阳马 $B-ACC_1A_1$ 体积的最大值为 $\frac{4}{3}$ 时, 堑堵 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的体积为 ()



- A. $\frac{4}{3}\pi$ B. $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$ C. $\frac{32}{3}\pi$ D. $\frac{64\sqrt{2}}{3}\pi$
2. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(0,-2)$, $N(1,0)$, 若动点 M 满足 $\frac{|MA|}{|MO|} = \sqrt{2}$, 则 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$ 的取值范围是 ()
- A. $[0,2]$ B. $[0,2\sqrt{2}]$
- C. $[-2,2]$ D. $[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$
3. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 记 $f_1(x) = f'(x)$, $f_2(x) = f_1'(x)$, ..., $f_{n+1}(x) = f_n'(x)$ ($n \in \mathbb{N}^*$). 若 $f(x) = x \sin x$, 则 $f_{2019}(x) + f_{2021}(x) =$ ()
- A. $-2 \cos x$ B. $-2 \sin x$ C. $2 \cos x$ D. $2 \sin x$

4. 已知函数 $f(x) = \log_2 \left(\frac{1}{|x|} + 1 \right) + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 3}$, 则不等式 $f(\lg x) > 3$ 的解集为 ()

- A. $\left(\frac{1}{10}, 10 \right)$ B. $\left(-\infty, \frac{1}{10} \right) \cup (10, +\infty)$ C. $(1, 10)$ D. $\left(\frac{1}{10}, 1 \right) \cup (1, 10)$

5. 已知平面 α 和直线 a, b , 则下列命题正确的是 ()

- A. 若 $a \parallel b, b \parallel \alpha$, 则 $a \parallel \alpha$ B. 若 $a \perp b, b \perp \alpha$, 则 $a \parallel \alpha$
C. 若 $a \parallel b, b \perp \alpha$, 则 $a \perp \alpha$ D. 若 $a \perp b, b \parallel \alpha$, 则 $a \perp \alpha$

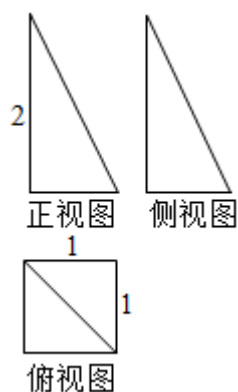
6. 在三棱锥 $D-ABC$ 中, $AB = BC = CD = DA = 1$, 且 $AB \perp BC, CD \perp DA, M, N$ 分别是棱 BC, CD 的中点, 下面四个结论:

- ① $AC \perp BD$;
② $MN \parallel$ 平面 ABD ;
③ 三棱锥 $A-CMN$ 的体积的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{12}$;
④ AD 与 BC 一定不垂直.

其中所有正确命题的序号是 ()

- A. ①②③ B. ②③④ C. ①④ D. ①②④

7. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为 ()



- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{5}{6}$

8. 已知 $a > 0, f(x) = ax^2 - x + 1 (x > 0), A = \{x \mid f(x) \leq x\}, B = \{x \mid f(f(x)) \leq f(x) \leq x\}$, 若 $A = B \neq \emptyset$ 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(0, 1]$ B. $(0, \frac{3}{4}]$ C. $[\frac{3}{4}, 1]$ D. $[1, +\infty)$

9. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5 = 7, a_{10} + a_7 = 0$, 则 $a_3 + a_4 =$ ()

- A. 20 B. 18 C. 16 D. 14

10. 直线 $y = kx + 1$ 与抛物线 $C: x^2 = 4y$ 交于 A, B 两点, 直线 $l \parallel AB$, 且 l 与 C 相切, 切点为 P , 记 $\triangle PAB$ 的面积为 S , 则 $S - |AB|$ 的最小值为 ()

- A. $-\frac{9}{4}$ B. $-\frac{27}{4}$ C. $-\frac{32}{27}$ D. $-\frac{64}{27}$

11. 已知 m, n 为两条不重合直线, α, β 为两个不重合平面, 下列条件中, $\alpha \perp \beta$ 的充分条件是 ()

- A. $m \parallel n, m \subset \alpha, n \subset \beta$ B. $m \parallel n, m \perp \alpha, n \perp \beta$
C. $m \perp n, m \parallel \alpha, n \parallel \beta$ D. $m \perp n, m \perp \alpha, n \perp \beta$

12. 定义: $N\{f(x) \otimes g(x)\}$ 表示不等式 $f(x) < g(x)$ 的解集中的整数解之和. 若 $f(x) = |\log_2 x|$, $g(x) = a(x-1)^2 + 2$,

$N\{f(x) \otimes g(x)\} = 6$, 则实数 a 的取值范围是

- A. $(-\infty, -1]$ B. $(\log_2 3 - 2, 0)$ C. $(2 - \log_2 6, 0]$ D. $(\frac{\log_2 3 - 2}{4}, 0]$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知全集 $U = \{-1, 0, 1\}$, 集合 $A = \{0, |x|\}$, 则 $\complement_U A =$ _____.

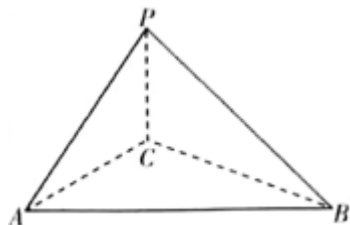
14. 在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = -8 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \frac{t}{2} \end{cases}$ (t 为参数), 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3s^2 \\ y = 2\sqrt{3}s \end{cases}$ (s 为

参数).

(1) 求直线 l 和曲线 C 的普通方程;

(2) 设 P 为曲线 C 上的动点, 求点 P 到直线 l 距离的最小值及此时 P 点的坐标.

15. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PC \perp$ 平面 ABC , $AC \perp CB$, 已知 $AC = 2$, $PB = 2\sqrt{6}$, 则当 $PA + AB$ 最大时, 三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 _____.



16. 函数 $f(x) = ae^x$ 与 $g(x) = -x - 1$ 的图象上存在关于 x 轴的对称点, 则实数 a 的取值范围为 _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知 $f(x) = 2\ln(x+2) - (x+1)^2$, $g(x) = k(x+1)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $k=2$ 时, 求证: 对于 $\forall x > -1$, $f(x) < g(x)$ 恒成立;

(3) 若存在 $x_0 > -1$, 使得当 $x \in (-1, x_0)$ 时, 恒有 $f(x) > g(x)$ 成立, 试求 k 的取值范围.

18. (12 分) 已知在 $\triangle ABC$ 中, a 、 b 、 c 分别为角 A 、 B 、 C 的对边, 且 $b = \frac{a \sin A - c \sin C}{\sin B - \sin C}$.

(1) 求角 A 的值;

(2) 若 $a = \sqrt{3}$, 设角 $B = \theta$, $\triangle ABC$ 周长为 y , 求 $y = f(\theta)$ 的最大值.

19. (12 分) 已知函数 $g(x) = e^x - (a-1)x^2 - bx - 1 (a, b \in \mathbb{R})$, 其中 e 为自然对数的底数.

(1) 若函数 $f(x) = g'(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上是单调函数, 试求 a 的取值范围;

(2) 若函数 $g(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上恰有 3 个零点, 且 $g(1) = 0$, 求 a 的取值范围.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = x^2 + ax - a \ln x$, $a \in \mathbb{R}$

(1) 若 $a=1$, 求 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(2) 设 $g(x) = f(x) + (a+2) \ln x - (a+2b-2)x$, 且 $g(x)$ 有两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 若 $b \geq 1 + \frac{4\sqrt{3}}{3}$, 求

$g(x_1) - g(x_2)$ 的最小值.

21. (12 分) 已知函数 $\varphi(x) = |x - 2| - |x - a|$, $x \in \mathbb{R}$.

(I) 若 $\varphi(1) > 1$, 求 a 的取值范围;

(II) 若 $a < 0$, 对 $\forall x$, $x \in (-\infty, a]$, 都有不等式 $\varphi(x) \leq |(x+2020)| + |x - a|$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

22. (10 分) 下表是某公司 2018 年 5~12 月份研发费用 (百万元) 和产品销量 (万台) 的具体数据:

月 份	5	6	7	8	9	10	11	12
研发费用 (百万元)	2	3	6	10	21	13	15	18
产品销量 (万台)	1	1	2	2.5	6	3.5	3.5	4.5

(I) 根据数据可知 y 与 x 之间存在线性相关关系, 求出 y 与 x 的线性回归方程 (系数精确到 0.01);

(II) 该公司制定了如下奖励制度: 以 Z (单位: 万台) 表示日销售, 当 $Z \in [0, 0.13)$ 时, 不设奖; 当 $Z \in [0.13, 0.15)$

时, 每位员工每日奖励 200 元; 当 $Z \in [0.15, 0.16)$ 时, 每位员工每日奖励 300 元; 当 $Z \in [0.16, +\infty)$

时, 每位员工每日奖励 400 元. 现已知该公司某月份日销售 Z (万台) 服从正态分布 $N(\mu, 0.0001)$ (其中 μ 是 2018 年 5-12 月产品销售平均数的二十分之一), 请你估计每位员工该月 (按 30 天计算) 获得奖励金额总数大约多少元.

参考数据: $\sum_{i=1}^n x_i y_i = 347$, $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1308$, $\sum_{i=1}^n y_i^2 = 93$, $\sqrt{7140} \approx 84.50$,

参考公式: 相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2\right)}}$, 其回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 中的 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$, 若随机变量

x 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < x \leq \mu + \sigma) = 0.6826$, $P(\mu - 2\sigma < x \leq \mu + 2\sigma) = 0.9544$.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、B

【解析】

利用均值不等式可得 $V_{B-ACC_1A_1} = \frac{1}{3} BC \cdot AC \cdot AA_1 = \frac{2}{3} BC \cdot AC \leq \frac{1}{3} (BC^2 + AC^2) = \frac{1}{3} AB^2$, 即可求得 AB , 进而求得外接球的半径, 即可求解.

【详解】

由题意易得 $BC \perp$ 平面 ACC_1A_1 ,

所以 $V_{B-ACC_1A_1} = \frac{1}{3} BC \cdot AC \cdot AA_1 = \frac{2}{3} BC \cdot AC \leq \frac{1}{3} (BC^2 + AC^2) = \frac{1}{3} AB^2$,

当且仅当 $AC = BC$ 时等号成立,

又阳马 $B-ACC_1A_1$ 体积的最大值为 $\frac{4}{3}$,

所以 $AB = 2$,

所以堑堵 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的半径 $R = \sqrt{\left(\frac{AA_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$,

所以外接球的体积 $V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{8\sqrt{2}}{3} \pi$,

故选:B

【点睛】

本题以中国传统文化为背景,考查四棱锥的体积、直三棱柱的外接球的体积、基本不等式的应用,体现了数学运算、直观想象等核心素养.

2、D

【解析】

设出 M 的坐标为 (x, y) , 依据题目条件, 求出点 M 的轨迹方程 $x^2 + (y - 2)^2 = 8$,

写出点 M 的参数方程, 则 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 2\sqrt{2} \cos \theta$, 根据余弦函数自身的范围, 可求得 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$ 结果.

【详解】

设 $M(x, y)$, 则

$$\because \frac{|MA|}{|MO|} = \sqrt{2}, \quad A(0, -2)$$

$$\therefore \frac{\sqrt{x^2 + (y + 2)^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}$$

$$\therefore x^2 + (y + 2)^2 = 2(x^2 + y^2)$$

$$\therefore x^2 + (y - 2)^2 = 8 \text{ 为点 } M \text{ 的轨迹方程}$$

$$\therefore \text{点 } M \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos \theta \\ y = 2 + 2\sqrt{2} \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数})$$

则由向量的坐标表达式有:

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 2\sqrt{2} \cos \theta$$

$$\text{又} \because \cos \theta \in [-1, 1]$$

$$\therefore \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 2\sqrt{2} \cos \theta \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$$

故选: D

【点睛】

考查学生依据条件求解各种轨迹方程的能力, 熟练掌握代数式转换, 能够利用三角换元的思想处理轨迹中的向量乘积, 属于中档题. 求解轨迹方程的方法有: ①直接法; ②定义法; ③相关点法; ④参数法; ⑤待定系数法

3、D

【解析】

通过计算 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x)$ ，可得 $f_{4k-3}(x), f_{4k-2}(x), f_{4k-1}(x), f_{4k}(x)$ ，最后计算可得结果.

【详解】

由题可知： $f(x) = x \sin x$

所以 $f_1(x) = \sin x + x \cos x, f_2(x) = 2 \cos x - x \sin x$

$f_3(x) = -3 \sin x - x \cos x, f_4(x) = -4 \cos x + x \sin x$

$f_5(x) = 5 \sin x + x \cos x, \dots$

所以猜想可知： $f_{4k-3}(x) = (4k-3) \sin x + x \cos x$

$f_{4k-2}(x) = (4k-2) \cos x - x \sin x$

$f_{4k-1}(x) = -(4k-1) \sin x - x \cos x$

$f_{4k}(x) = -4k \cos x + x \sin x$

由 $2019 = 4 \times 505 - 1, 2021 = 4 \times 506 - 3$

所以 $f_{2019}(x) = -2019 \sin x - x \cos x$

$f_{2021}(x) = 2021 \sin x + x \cos x$

所以 $f_{2019}(x) + f_{2021}(x) = 2 \sin x$

故选：D

【点睛】

本题考查导数的计算以及不完全归纳法的应用，选择题、填空题可以使用取特殊值，归纳猜想等方法的使用，属中档题.

4、D

【解析】

先判断函数的奇偶性和单调性，得到 $-1 < \lg x < 1$ ，且 $\lg x \neq 0$ ，解不等式得解.

【详解】

由题得函数的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

因为 $f(-x) = f(x)$ ，

所以 $f(x)$ 为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的偶函数,

因为函数 $y = \frac{1}{|x|} + 1$, $y = \sqrt{\frac{1}{x^2} + 3}$ 都是在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

因为 $f(1) = 3, f(\lg x) > 3 = f(1)$,

所以 $-1 < \lg x < 1$, 且 $\lg x \neq 0$,

解得 $x \in \left(\frac{1}{10}, 1\right) \cup (1, 10)$.

故选: D

【点睛】

本题主要考查函数的奇偶性和单调性的判断, 考查函数的奇偶性和单调性的应用, 意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

5、C

【解析】

根据线面的位置关系, 结合线面平行的判定定理、平行线的性质进行判断即可.

【详解】

A: 当 $a \subset \alpha$ 时, 也可以满足 $a \parallel b$, $b \parallel \alpha$, 故本命题不正确;

B: 当 $a \subset \alpha$ 时, 也可以满足 $a \perp b$, $b \perp \alpha$, 故本命题不正确;

C: 根据平行线的性质可知: 当 $a \parallel b$, $b \perp \alpha$, 时, 能得到 $a \perp \alpha$, 故本命题是正确的;

D: 当 $a \subset \alpha$ 时, 也可以满足 $a \perp b$, $b \parallel \alpha$, 故本命题不正确.

故选: C

【点睛】

本题考查了线面的位置关系, 考查了平行线的性质, 考查了推理论证能力.

6、D

【解析】

①通过证明 $AC \perp$ 平面 OBD , 证得 $AC \perp BD$; ②通过证明 $MN \parallel BD$, 证得 $MN \parallel$ 平面 ABD ; ③求得三棱锥 $A-CMN$ 体积的最大值, 由此判断③的正确性; ④利用反证法证得 AD 与 BC 一定不垂直.

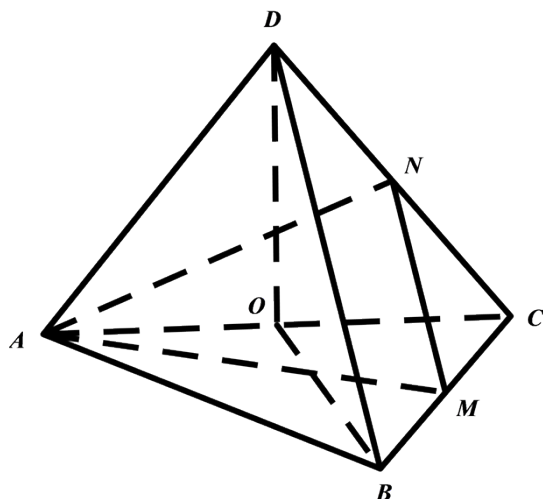
【详解】

设 AC 的中点为 O , 连接 OB, OD , 则 $AC \perp OB$, $AC \perp OD$, 又 $OB \cap OD = O$, 所以 $AC \perp$ 平面 OBD , 所以

$AC \perp BD$, 故①正确. 因为 $MN \parallel BD$, 所以 $MN \parallel$ 平面 ABD , 故②正确. 当平面 DAC 与平面 ABC 垂直时, V_{A-CMN}

最大, 最大值为 $V_{A-CMN} = V_{N-ACM} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{48}$, 故③错误 若 AD 与 BC 垂直, 又因为 $AB \perp BC$, 所以 $BC \perp$ 平面 ABD , 所以 $BC \perp BD$, 又 $BD \perp AC$, 所以 $BD \perp$ 平面 ABC , 所以 $BD \perp OB$, 因为 $OB = OD$, 所以显然 BD 与 OB 不可能垂直, 故④正确.

故选: D



【点睛】

本小题主要考查空间线线垂直、线面平行、几何体体积有关命题真假性的判断, 考查空间想象能力和逻辑推理能力, 属于中档题.

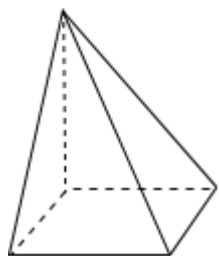
7、A

【解析】

利用已知条件画出几何体的直观图, 然后求解几何体的体积.

【详解】

几何体的三视图的直观图如图所示,



则该几何体的体积为: $\frac{1}{3} \times 1 \times 1 \times 2 = \frac{2}{3}$.

故选: A.

【点睛】

本题考查三视图求解几何体的体积, 判断几何体的形状是解题的关键.

8、C

【解析】

根据 $A \neq \phi$ ，得到 $f(x) = ax^2 - x + 1 \leq x$ 有解，则 $\Delta = 4 - 4a \geq 0$ ，得 $0 < a \leq 1$ ， $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1-a}}{a}$ ， $x_2 = \frac{1 + \sqrt{1-a}}{a}$ ，得

到 $A = \{x \mid f(x) \leq x\} = [x_1, x_2] = [\frac{1 - \sqrt{1-a}}{a}, \frac{1 + \sqrt{1-a}}{a}]$ ，再根据 $B = \{x \mid f(f(x)) \leq f(x) \leq x\}$ ，有 $f(f(x)) \leq f(x)$ ，

即 $a(ax^2 - x + 1)^2 - 2(ax^2 - x + 1) + 1 \leq 0$ ，可化为 $(ax^2 - 2x + 1)(a^2x^2 + a - 1) \leq 0$ ，根据 $A = B \neq \phi$ ，则

$a^2x^2 + a - 1 \geq 0$ 的解集包含 $[\frac{1 - \sqrt{1-a}}{a}, \frac{1 + \sqrt{1-a}}{a}]$ 求解，

【详解】

因为 $A \neq \phi$ ，

所以 $f(x) = ax^2 - x + 1 \leq x$ 有解，

即 $f(x) = ax^2 - 2x + 1 \leq 0$ 有解，

所以 $\Delta = 4 - 4a \geq 0$ ，得 $0 < a \leq 1$ ， $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1-a}}{a}$ ， $x_2 = \frac{1 + \sqrt{1-a}}{a}$ ，

所以 $A = \{x \mid f(x) \leq x\} = [x_1, x_2] = [\frac{1 - \sqrt{1-a}}{a}, \frac{1 + \sqrt{1-a}}{a}]$ ，

又因为 $B = \{x \mid f(f(x)) \leq f(x) \leq x\}$ ，

所以 $f(f(x)) \leq f(x)$ ，

即 $a(ax^2 - x + 1)^2 - 2(ax^2 - x + 1) + 1 \leq 0$ ，

可化为 $(ax^2 - 2x + 1)(a^2x^2 + a - 1) \leq 0$ ，

因为 $A = B \neq \phi$ ，

所以 $a^2x^2 + a - 1 \geq 0$ 的解集包含 $[\frac{1 - \sqrt{1-a}}{a}, \frac{1 + \sqrt{1-a}}{a}]$ ，

所以 $\frac{1 + \sqrt{1-a}}{a} \leq \frac{-\sqrt{1-a}}{a}$ 或 $\frac{1 - \sqrt{1-a}}{a} \geq \frac{\sqrt{1-a}}{a}$ ，

解得 $\frac{3}{4} \leq a \leq 1$ ，

故选：C

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/745213141012011131>