

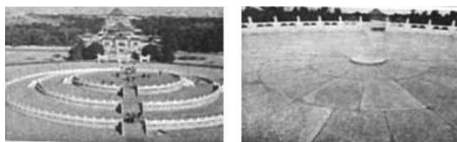
考点 1 等差数列及其应用

1.(2019 课标全国 I,9,5 分,★★)记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.已知 $S_4=0, a_5=5$, 则()

A. $a_n=2n-5$ B. $a_n=3n-10$

C. $S_n=2n^2-8n$ D. $S_n=\frac{1}{2}n^2-2n$

2.(2020 课标全国 II 理,4,5 分,★★)北京天坛的圜丘坛为古代祭天的场所,分上、中、下三层.上层中心有一块圆形石板(称为天心石),环绕天心石砌 9 块扇面形石板构成第一环,向外每环依次增加 9 块.下一层的第一环比上一层的最后一环多 9 块,向外每环依次也增加 9 块.已知每层环数相同,且下层比中层多 729 块,则三层共有扇面形石板(不含天心石)()



A. 3 699 块 B. 3 474 块

C. 3 402 块 D. 3 339 块

3.(2019 课标全国 III,14,5 分,★★)记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,若 $a_1 \neq 0, a_2=3a_1$, 则 $\frac{S_{10}}{S_5} =$ _____.

4.(2019 北京,10,5 分,★★)设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若 $a_2=-3, S_5=-10$, 则 $a_5 =$ _____, S_n 的最小值为 _____.

5.(2019 课标全国 I,18,12 分,★★)记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.已知 $S_9 = -a_5$.

(1)若 $a_3 = 4$,求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)若 $a_1 > 0$,求使得 $S_n \geq a_n$ 的 n 的取值范围.

考点 2 等比数列及其应用

6.(2019 课标全国 III,5,5 分,★★)已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项和为 15,且 $a_5 = 3a_3 + 4a_1$,则 $a_3 = (\quad)$

A.16 B.8 C.4 D.2

7.(2018 北京,4,5 分,★★)“十二平均律”是通用的音律体系,明代朱载堉最早用数学方法计算出半音比例,为这个理论的发展做出了重要贡献.十二平均律将一个纯八度音程分成十二份,依次得到十三个单音,从第二个单音起,每一个单音的频率与它的前一个单音的频率的比都等于 $\sqrt[12]{2}$.若第一个单音的频率为 f ,则第八个单音的频率为 $(\quad)$

A. $\sqrt[3]{2}f$ B. $\sqrt[3]{2^2}f$ C. $\sqrt[12]{2^5}f$ D. $\sqrt[12]{2^7}f$

8.(2019 课标全国 I ,14,5 分,★★)记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.若

$a_1 = \frac{1}{3}, a_4^2 = a_6$, 则 $S_5 =$ _____.

9.(2020 课标全国 I 理,17,12 分,★★)设 $\{a_n\}$ 是公比不为 1 的等比数列, a_1 为 a_2, a_3 的等差中项.

(1)求 $\{a_n\}$ 的公比;

(2)若 $a_1 = 1$, 求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和.

10.(2019 课标全国 II ,19,12 分,★★)已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足

$a_1 = 1, b_1 = 0, 4a_{n+1} = 3a_n - b_n + 4, 4b_{n+1} = 3b_n - a_n - 4.$

(1)证明: $\{a_n + b_n\}$ 是等比数列, $\{a_n - b_n\}$ 是等差数列;

(2)求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

考点3 数列的综合应用

11.(2020 新高考 I,18,12 分,★★)已知公比大于 1 的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2+a_4=20,a_3=8$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)记 b_m 为 $\{a_n\}$ 在区间 $(0,m](m\in\mathbb{N}^*)$ 中的项的个数,求数列 $\{b_m\}$ 的前 100 项和 S_{100} .

12.(2018 课标全国 I,17,12 分,★★)已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,na_{n+1}=2(n+1)a_n$.设 $b_n=\frac{a_n}{n}$.

(1)求 b_1,b_2,b_3 ;

(2)判断数列 $\{b_n\}$ 是否为等比数列,并说明理由;

(3)求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

13.(2020 天津,19,15 分,★★)已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\{b_n\}$ 为等比数

列, $a_1=b_1=1$, $a_5=5(a_4-a_3)$, $b_5=4(b_4-b_3)$.

(1)求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2)记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求证: $S_n S_{n+2} < S_{n+1}^2 (n \in \mathbb{N}^*)$;

(3)对任意的正整数 n , 设 $c_n = \begin{cases} \frac{(3a_n-2)b_n}{a_n a_{n+2}}, & n \text{ 为奇数}, \\ \frac{a_{n-1}}{b_{n+1}}, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$ 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项

和.

14.(2018 浙江,20,15 分,★★)已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q > 1$, 且

$a_3 + a_4 + a_5 = 28$, $a_4 + 2$ 是 a_3, a_5 的等差中项. 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 1$, 数列

$\{(b_{n+1} - b_n)a_n\}$ 的前 n 项和为 $2n^2 + n$.

(1)求 q 的值;

(2)求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

考点 4 数学归纳法*

15.(2020 课标全国Ⅲ理,17,12 分,★★)设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3, a_{n+1}=3a_n-4n$.

(1)计算 a_2, a_3 , 猜想 $\{a_n\}$ 的通项公式并加以证明;

(2)求数列 $\{2^n a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

三年模拟练

应用实践

1.(2020 河南开封高二上期末联考,★★)公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的部分项 $a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, \dots$ 构成公比为 4 的等比数列 $\{a_{k_n}\}$, 且 $k_1=1, k_2=2$, 则

$k_3=(\quad)$

A.4 B.6 C.8 D.22

2.(2020 福建厦门外国语学校高二上期中,★★)已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n+\frac{a}{n}(n \in \mathbb{N}^*)$, 则“ $a_2>a_1$ ”是“数列 $\{a_n\}$ 单调递增”的 $(\quad)$

A.充要条件 B.充分不必要条件

C.必要不充分条件 D.既不充分也不必要条件

3.(2020 湖南长沙一中高三上第三次月考,★★)已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列,其前 n 项和为 S_n ,且 $a_2=3, S_5=25$,若 $b_n=a_n\sin\frac{2n\pi}{3}$,且数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ,则 $T_9=(\quad)$

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B.0 C. $-3\sqrt{3}$ D. $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

4.(多选)(2020 山东济宁高二上期末质量检测,★★)若 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,且 $S_n=2a_n+1(n\in\mathbb{N}^*)$,则下列说法正确的是 $(\quad)$

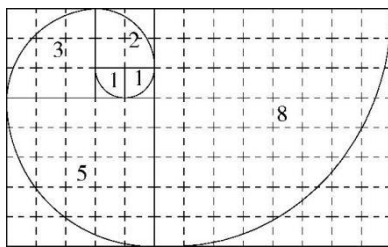
A. $a_5=-16$ B. $S_5=-63$

C.数列 $\{a_n\}$ 是等比数列 D.数列 $\{S_n+1\}$ 是等比数列

5.(多选)(2020 广东中山高二上期末统考,★★)意大利数学家列昂纳多·斐波那契是第一个研究了印度和阿拉伯数学理论的欧洲人,斐波那契数列被誉为最美的数列,斐波那契数列 $\{a_n\}$ 满足:

$a_1=1, a_2=1, a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geq 3, n\in\mathbb{N}^*)$.若将数列的每一项按照下图方法放进格子里,每一小格子的边长为 1,记前 n 项所占的格子的面积之和为 S_n ,每段螺旋线与其所在的正方形围成的扇形面积为 c_n ,则下列结论

正确的是 $(\quad)$



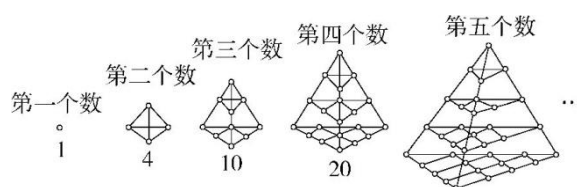
A. $S_{n+1}=a_{n+1}^2+a_{n+1}a_n$ B. $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=a_{n+2}-1$

C. $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}=a_{2n}-1$ D. $4(c_n-c_{n-1})=\pi a_{n-2}a_{n+1}$

6.(2020 山东济宁实验中学高二上期中,★★)古代埃及数学中有一个独特现象:除 $\frac{2}{3}$ 用一个单独的符号表示以外,其他分数都可写成若干个单

分数和的形式.例如 $\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$,可这样理解:假定有两个面包,要平均分给 5 个人,如果每人 $\frac{1}{2}$,不够,每人 $\frac{1}{3}$,余 $\frac{1}{3}$,再将这 $\frac{1}{3}$ 分成 5 份,每人得 $\frac{1}{15}$,这样每人分得 $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$.形如 $\frac{2}{2n-1}$ ($n \geq 3, n \in \mathbb{N}^*$) 的分数的分解: $\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$, $\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$, $\frac{2}{9}=\frac{1}{5}+\frac{1}{45}$, 按此规律,则 $\frac{2}{2n-1}=\frac{\quad}{\quad}+\frac{\quad}{\quad}$ ($n \geq 3, n \in \mathbb{N}^*$).

7.(2020 山东高考第一次模拟,★★)古希腊毕达哥拉斯学派研究了“多边形数”,人们把多边形数推广到空间,研究了“四面体数”,如图给出了第一至第四个四面体数(已知 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$).



观察上图,由此得出第 5 个四面体数为_____ (用数字作答);第 n 个四面体数为_____.

8.(2020 河北武邑中学高三上期末,★★)我们称一个数列是“有趣数列”,当且仅当该数列满足以下两个条件:①所有的奇数项满足 $a_{2n-1} < a_{2n+1}$,所有的偶数项满足 $a_{2n} < a_{2n+2}$;②任意相邻的两项 a_{2n-1}, a_{2n} 满足 $a_{2n-1} < a_{2n}$.根据上面的信息完成下面的问题:

(1)数列 1,2,3,4,5,6_____ “有趣数列” (填“是”或者“不是”);

(2)若 $a_n = n + (-1)^n \cdot \frac{2}{n}$,则数列 $\{a_n\}$ _____ “有趣数列” (填“是”或者“不是”).

9.(2020 北京高考适应性测试,★★)已知 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的无穷等比数列,其前 n 项和为 S_n ,满足 $a_3=12$,_____.是否存在正整数 k ,使得 $S_k>2\ 020$?

若存在,求出 k 的最小值;若不存在,请说明理由.

从① $q=2$,② $q=\frac{1}{2}$,③ $q=-2$ 这三个条件中任选一个,补充在上面问题中并作答.

注:若选择多个条件分别解答,则按第一个解答计分.

10.(2020 江西新余一中高二上第二次段考,★★)已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,对任意 $n\in\mathbb{N}^*$,点 (a_n, S_n) 都在函数 $f(x)=2x-2$ 的图象上.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)若 $b_n=(2n-1)a_n$,求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n ;

(3)已知数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n=\frac{1}{a_n}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ ($n\in\mathbb{N}^*$),若对任意 $n\in\mathbb{N}^*$,存在 $x_0\in\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$,使得 $c_1+c_2+\cdots+c_n\leq f(x_0)-a$ 成立,求实数 a 的取值范围.

11.(2020 天津耀华中学高二上期中,★★)在数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_1=1$,其前 n 项和为 S_n ,且对任意的正整数 n ,都有 $2S_n=(n+1)a_n$ 成立.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)已知关于 n 的不等式 $\frac{a_3-2}{a_3} \cdot \frac{a_4-2}{a_4} \cdot \dots \cdot \frac{a_n-2}{a_n} < \frac{a}{\sqrt{2n+1}}$ 对一切 $n \geq 3, n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立,求实数 a 的取值范围;

(3)已知 $c_n = \left(\frac{1}{1+a_n}\right)^2$,数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ,试比较 T_n 与 $\frac{2}{3}$ 的大小并证明.

迁移创新

12.(2019 北京高考,★★)已知数列 $\{a_n\}$,从中选取第 i_1 项、第 i_2 项、 $\dots$ 、第 i_m 项($i_1 < i_2 < \dots < i_m$),若 $a_{i_1} < a_{i_2} < \dots < a_{i_m}$,则称新数列 $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}$ 为 $\{a_n\}$ 的长度为 m 的递增子列.规定:数列 $\{a_n\}$ 的任意一项都是 $\{a_n\}$ 的长度为1的递增子列.

(1)写出数列1,8,3,7,5,6,9的一个长度为4的递增子列;

(2)已知数列 $\{a_n\}$ 的长度为 p 的递增子列的末项的最小值为 a_{m_0} ,长度为 q 的递增子列的末项的最小值为 a_{n_0} .若 $p < q$,求证: $a_{m_0} < a_{n_0}$;

(3)设无穷数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正整数,且任意两项均不相等.若 $\{a_n\}$ 的长度为 s 的递增子列的末项的最小值为 $2s-1$,且长度为 s 末项为 $2s-1$ 的递增子列恰有 2^{s-1} 个($s=1,2,\dots$),求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

答案全解全析

1.A 设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 ,公差为 d ,则由题意有

$$\begin{cases} 4a_1 + \frac{4 \times 3}{2}d = 0, \\ a_1 + 4d = 5, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a_1 = -3, \\ d = 2, \end{cases}$$

所以 $a_n = -3 + (n-1) \times 2 = 2n-5$,

$$S_n = -3n + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = n^2 - 4n, \text{故选 A.}$$

2.C 由题意可设每层有 n 个环,则三层共有 $3n$ 个环, $\therefore$ 每一环扇面形石板的块数构成以 $a_1=9$ 为首项,9为公差的等差数列 $\{a_n\}$,且项数为 $3n$.

不妨设上层扇面形石板总数为 S_1 ,中层总数为 S_2 ,下层总数为 S_3 , $\therefore$

$$S_3 - S_2 = \left[9(2n+1) \cdot n + \frac{n(n-1)}{2} \times 9 \right] - \left[9(n+1) \cdot n + \frac{n(n-1)}{2} \times 9 \right] = 9n^2 = 729, \text{解得 } n=9 \text{ (负值舍去).}$$

则三层共有扇面形石板(不含天心

$$\text{石}) 27 \times 9 + \frac{27 \times 26}{2} \times 9 = 27 \times 9 + 27 \times 13 \times 9 = 27 \times 14 \times 9 = 3402 \text{ (块). 故选 C.}$$

3.答案 4

解析 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

由题意得 $a_1 + d = 3a_1$, 即 $d = 2a_1$,

$$\text{则 } S_5 = 5a_1 + \frac{5 \times 4}{2}d = 25a_1, S_{10} = 10a_1 + \frac{10 \times 9}{2}d = 100a_1, \text{又 } a_1 \neq 0, \text{所以 } \frac{S_{10}}{S_5} = \frac{100a_1}{25a_1} = 4.$$

4.答案 0;-10

解析 解法一: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 ,公差为 d ,则由已知可得

$$\begin{cases} a_1 + d = -3, \\ 5a_1 + 10d = -10, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a_1 = -4, \\ d = 1, \end{cases} \text{所以}$$

$$a_5 = a_1 + 4d = -4 + 4 \times 1 = 0, S_n = -4n + \frac{n(n-1)}{2} \times 1 = \frac{n^2}{2} - \frac{9n}{2} = \frac{1}{2} \left(n - \frac{9}{2} \right)^2 - \frac{81}{8}. \text{因为 } n \in \mathbb{N}^*, \text{所以当}$$

$n=4$ 或 $n=5$ 时, S_n 取得最小值, 最小值为-10.

解法二:设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 ,公差为 d ,因为 $S_5=\frac{5(a_1+a_5)}{2}=5a_3=-10$,

所以 $a_3=-2$,又因为 $a_2=-3$,所以 $d=a_3-a_2=1$,所以 $a_5=a_3+2d=0$,所以

$$(S_n)_{\min}=S_4=S_5=-10.$$

5.解析 (1)设 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

$$\text{由 } S_9=-a_5 \text{ 得 } a_1+4d=0,$$

$$\text{由 } a_3=4 \text{ 得 } a_1+2d=4,$$

$$\text{于是 } a_1=8, d=-2.$$

因此 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=10-2n$.

$$(2)\text{由}(1)\text{得 } a_1=-4d,$$

$$\text{故 } a_n=(n-5)d, S_n=\frac{n(n-9)d}{2}.$$

由 $a_1>0$ 知 $d<0$,故 $S_n\geq a_n$ 等价于 $n^2-11n+10\leq 0$,解得 $1\leq n\leq 10$.

所以 n 的取值范围是 $\{n|1\leq n\leq 10, n\in\mathbb{N}^*\}$.

6.C 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,由题知 $a_1>0, q>0$ 且 $q\neq 1$,则

$$\begin{cases} \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = 15, \\ a_1q^4 = 3a_1q^2 + 4a_1, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a_1 = 1, \\ q = 2, \end{cases} \text{所以 } a_3=a_1q^2=4.$$

7.D 由题意得,十三个单音的频率构成首项为 f ,公比为 $\sqrt[12]{2}$ 的等比数

列,设该等比数列为 $\{a_n\}$,首项为 a_1 ,公比为 q 则

$$a_8=a_1q^7=f\cdot(\sqrt[12]{2})^7=\sqrt[12]{2^7}f.$$

$$8.\text{答案 } \frac{121}{3}$$

解析 因为 $a_4^2=a_2a_6=a_6$,所以 $a_2=1$,所以公比为 $\frac{a_2}{a_1}=3$,所以 $S_5=\frac{\frac{1}{3}\times(1-3^5)}{1-3}=\frac{121}{3}$.

9.解析 (1)设 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,且 $q\neq 1$,由题设得 $2a_1=a_2+a_3$,即

$$2a_1=a_1q+a_1q^2.$$

所以 $q^2+q-2=0$, 解得 $q_1=1$ (舍去), $q_2=-2$.

故 $\{a_n\}$ 的公比为 -2 .

(2) 记 S_n 为 $\{na_n\}$ 的前 n 项和. 由 (1) 及题设可得, $a_n=(-2)^{n-1}$.

所以 $S_n=1+2\times(-2)+\cdots+n\times(-2)^{n-1}$, ①

$-2S_n=-2+2\times(-2)^2+\cdots+(n-1)\times(-2)^{n-1}+n\times(-2)^n$. ②

①-②可得 $3S_n=1+(-2)+(-2)^2+\cdots+(-2)^{n-1}-n\times(-2)^n=\frac{1-(-2)^n}{3}-n\times(-2)^n$.

所以 $S_n=\frac{1}{9}-\frac{(3n+1)(-2)^n}{9}$.

10. 解析 (1) 证明: 由题知 $4a_{n+1}=3a_n-b_n+4$ ①, $4b_{n+1}=3b_n-a_n-4$ ②, ①+②得

$4(a_{n+1}+b_{n+1})=2(a_n+b_n)$, 即 $a_{n+1}+b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$.

又因为 $a_1+b_1=1$, 所以 $\{a_n+b_n\}$ 是首项为 1 , 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列.

①-②, 得 $4(a_{n+1}-b_{n+1})=4(a_n-b_n)+8$, 即 $a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n+2$.

又因为 $a_1-b_1=1$, 所以 $\{a_n-b_n\}$ 是首项为 1 , 公差为 2 的等差数列.

(2) 由 (1) 知, $a_n+b_n=\frac{1}{2^{n-1}}$, $a_n-b_n=2n-1$,

所以 $a_n=\frac{1}{2}[(a_n+b_n)+(a_n-b_n)]$

$=\frac{1}{2^n}+n-\frac{1}{2}$,

$b_n=\frac{1}{2}[(a_n+b_n)-(a_n-b_n)]=\frac{1}{2^n}-n+\frac{1}{2}$.

11. 解析 (1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 且 $q>1$. 由题设得 $a_1q+a_1q^3=20$, $a_1q^2=8$.

解得 $q_1=\frac{1}{2}$ (舍去), $q_2=2$. 所以 $a_1=\frac{8}{q^2}=2$.

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^n$.

(2) 由于 $2^1=2, 2^2=4, 2^3=8, 2^4=16, 2^5=32, 2^6=64, 2^7=128$, 所以由题设及 (1) 可得,

b_1 对应的区间为: $(0, 1]$, 则 $b_1=0$;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/745214202232011243>