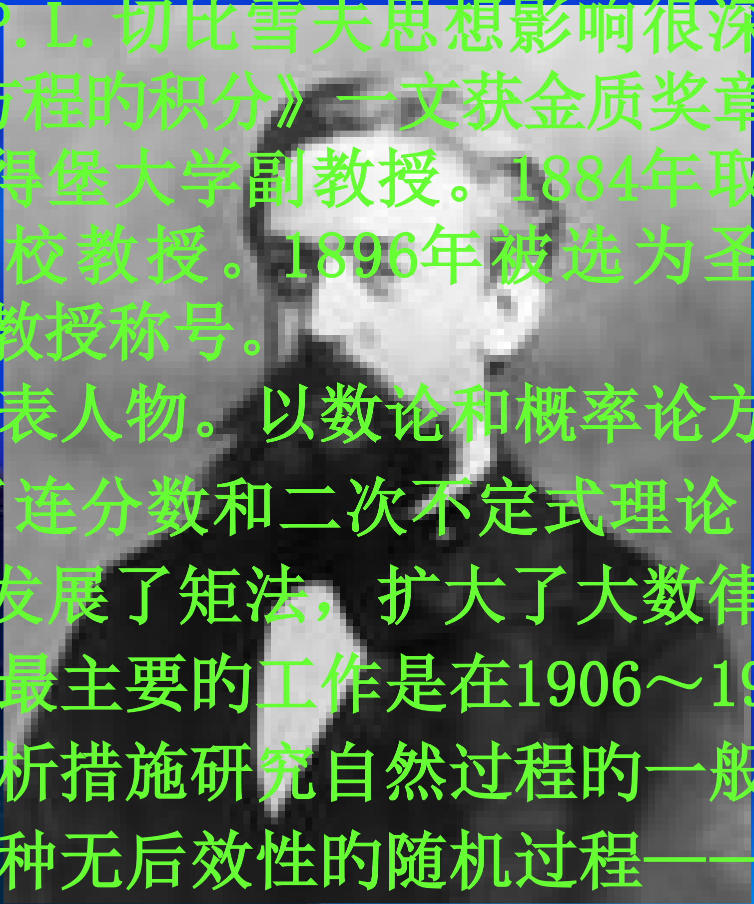
马尔可夫(1856～1922)
Markov，Andrei Andreevich

第十一章 马尔可夫链



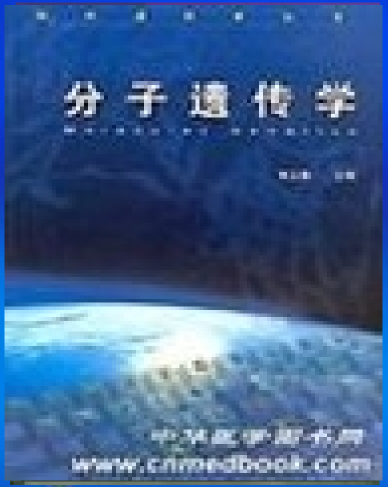
俄罗斯数学家.1856年6月14日生于梁赞,1923年7月20日卒于圣彼得堡.1874年入圣彼得堡大学，受P.L.切比雪夫思想影响很深。1878年毕业，并以《用连分数求微分方程的积分》一文获金质奖章。两年后，取得硕士学位，并任圣彼得堡大学副教授。1884年取得物理-数学博士学位，1886 年任该校教授。1896年被选为圣彼得堡科学院院士。1923年被授予功勋教授称号。

马尔可夫是彼得堡数学学派的代表人物。以数论和概率论方面的工作著称。在数论方面，他研究了连分数和二次不定式理论，处理了许多难题。在概率论中，他发展了矩法，扩大了大数律和中心极限定理的应用范围。马尔可夫最主要的工作是在1906～1923年间，提出并研究了一种能用数学分析措施研究自然过程的一般图式——马尔可夫链。同步开创了对一种无后效性的随机过程——马尔可夫过程的研究。马尔可夫过程在自然科学、工程技术和公用事业中有广泛的应用。他的主要著作有《概率演算》等。

第十一章　马尔可夫链

马尔可夫（Markoff）过程是无后效性的随机过程，现已成为内容十分丰富，理论相当完整，应用十分广泛的一门数学分支．因为马尔可夫过程的理论在近代物理、生物学、分子遗传学、自动控制、管理科学、信息处理以及数字计算方法等方面都有重要应用．使得现代科学家及工程技术人员越来越重视马尔可夫过程的理论
及应用研究。本章讨论以下五个问题：

一、 马尔可夫过程
二、 马尔可夫链
三、 多步转移概率的拟定
四、 遍历性
五、 马尔可夫链的应用



第17讲　马尔可夫过程与马尔可夫链

一、马尔可夫过程

在自然界中，诸多拟定性现象遵从如下演变原则：由时刻t_0系统或过程所处的状态，能够决定系统或过程在时刻$t>t_0$所处的状态，而无需借助于t_0此前系统或过程所处状态的历史资料.

如研究一种商店的合计销售额，假如目前时刻合计销售额已知，则将来某一时刻的合计销售额与目前时刻此前的任一时刻合计销售额无关.

第19讲　马尔可夫过程与马尔可夫链

一、马尔可夫过程

在自然界中，诸多拟定性现象遵从如下演变原则：由时刻t_0系统或过程所处的状态，能够决定系统或过程在时刻$t>t_0$所处的状态，而无需借助于t_0此前系统或过程所处状态的历史资料.

某生物种群规模的大小只与目前规模大小有关，而与过去该种群规模大小无关.

第19讲　马尔可夫过程与马尔可夫链

一、马尔可夫过程

在自然界中，诸多拟定性现象遵从如下演变原则：由时刻t_0系统或过程所处的状态，能够决定系统或过程在时刻$t>t_0$所处的状态，而无需借助于t_0此前系统或过程所处状态的历史资料.

假设一部电梯是由进入电梯内的人自行操作的，那么电梯下一步运营到哪一处，只依赖于目前电梯内人员的意图，而与过去电梯从何而来是无关的.

第19讲　马尔可夫过程与马尔可夫链

一、马尔可夫过程

1. 马尔可夫性

过程（或系统）在时刻 t_0 所处的状态为已知的条件下，过程在时刻$t>t_0$所处状态的条件分布与过程在时刻t_0之前所处的状态无关, 这种性质称为马尔可夫性或无后效性.

通俗地说，就是在已经懂得过程“目前”的条件下，其“将来”不依赖于“过去”．描述此类随机现象的数学模型称之为马尔可夫模型.

第19讲　　马尔可夫过程与马尔可夫链

一、马尔可夫过程

1. 马尔可夫性

2. 马尔可夫过程

具有马尔可夫性的随机过程称为马尔可夫过程.

一、马尔可夫过程

1. 马尔可夫性

2. 马尔可夫过程

定义11.1 设随机过程$\{X(t),t\in T\}$的状态空间为I．假如对时间t的任意n个数值$0\le t_1<t_2<\ldots<t_n$， $n\ge 3$， $t_i\in T$ ，在条件$X(t_i)=x_i$, $x_i\in I$, $i=1,2,\ldots,n$下，$X(t_n)$的条件分布函数恰等于$X(t_{n-1})=x_{n-1}$下的条件分布函数，即

$$P\{X(t_n)\le x_n \mid X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2,\cdots, X(t_{n-1})=x_{n-1}\}$$
$$=P\{X(t_n)\le x_n \mid X(t_{n-1})=x_{n-1}\}, x_n\in R,$$

或 $$F_{t_n|t_1\cdots t_{n-1}}(x_n;t_n \mid x_1,x_2,\cdots,x_{n-1};t_1,t_2,\cdots,t_{n-1})$$
$$=F_{t_n|t_{n-1}}(x_n;t_n \mid x_{n-1};t_{n-1}),$$

则称过程$\{X(t),t\in T\}$为马尔可夫过程．简称马氏过程.

一、马尔可夫过程

1. 马尔可夫性

2. 马尔可夫过程

定义11.1 设随机过程$\{X(t),t\in T\}$的状态空间为I. 假如

$$P\{X(t_n)\le x_n \mid X(t_1)=x_1,X(t_2)=x_2,\cdots,X(t_{n-1})=x_{n-1}\}$$

$$=P\{X(t_n)\le x_n \mid X(t_{n-1})=x_{n-1}\},x_n\in R,$$

则称过程$\{X(t),t\in T\}$为马尔可夫过程. 简称马氏过程.

注：假如把时刻t_{n-1}看作“目前”，相对于t_{n-1}而言，时刻t_n是“将来”，时刻t_1，t_2，…，t_n是“过去”. 马尔可夫过程的要求是：已知过程目前的状态，过程将来的状态与过程过去的状态无关. 也就是说，过程的“将来”只经过“目前”与“过去”发生联络，一旦“目前”已拟定，则“将来”与“过去”无关.

例11.1　假如$\{X(t),t\geq a\}$是独立增量过程, 且$X(a)=0$，

那么$\{X(t),t\geq a\}$是一种马尔可夫过程.

证 因为$\{X(t),t\geq a\}$是独立增量过程, 由独立增量过程的定义可知,对任意的n, 当$0\leq t_1<t_2<\ldots<t_{n-1}<t_n$，相应的增量

$$X(t_1)-X(a),X(t_2)-X(t_1),\cdots,X(t_n)-X(t_{n-1})$$

相互独立.

根据条件$X(a)=0$及随机变量相互独立性可知

$X(t_n)-X(t_{n-1})$ 与 $X(t_i),i=1,2,\cdots,n-1$，

相互独立.

例11.1 假如$\{X(t),t\geq a\}$是独立增量过程, 且$X(a)=0$,

那么$\{X(t),t\geq a\}$是一种马尔可夫过程

证 根据条件 $X(a)=0$ 及随机变量相互独立性可知

$$X(t_n)-X(t_{n-1}) \quad 与 \quad X(t_i), i=1,2,L\ ,n-1,$$

相互独立.

所以对任意的$x_1,x_2,L\ ,x_{n-1}$，有

$$P\{X(t_n)\leq x_n \mid X(t_1)=x_1,X(t_2)=x_2,L\ ,X(t_{n-1})=x_{n-1})$$

$$=P\{X(t_n)-X(t_{n-1})\leq x_n-x_{n-1}\mid X(t_1)=x_1,L\ ,X(t_{n-1})=x_{n-1}\}$$

$$=\boxed{P\{X(t_n)-X(t_{n-1})\leq x_n-x_{n-1}\},}$$

$$P\{X(t_n)\leq x_n \mid X(t_{n-1})=x_{n-1})$$

$$=P\{X(t_n)-X(t_{n-1})\leq x_n-x_{n-1}\mid X(t_{n-1})=x_{n-1})$$

$$=\boxed{P\{X(t_n)-X(t_{n-1})\leq x_n-x_{n-1}\}}$$

例11.1　假如$\{X(t),t\geq a\}$是独立增量过程, 且$X(a)=0$,

那么$\{X(t),t\geq a\}$是一种马尔可夫过程.

证　即对任意的$x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$，有

$$P\{X(t_n)\leq x_n \mid X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2,\cdots,X(t_{n-1})=x_{n-1}\}$$

$$=P\{X(t_n)\leq x_n \mid X(t_{n-1})=x_{n-1}\}$$

这表白$\{X(t),t\geq a\}$具有无后效性，所以$\{X(t),t\geq a\}$是一种马尔可夫过程.

泊松过程是参数连续、状态离散的马尔可夫过程;

维纳过程是参数连续、状态也连续的马尔可夫过程;

贝努利过程是参数离散、状态也离散的马尔可夫过程

.

例11.2 某人不断地掷一枚骰子. 设X_n表达前n次掷骰子后出现的最大点数，随机序列的状态空间$E=\{1,2,3,4,5,6\}$.

易见$X_1 \le X_2 \le \cdots$，且X_n的值由X_{n-1}与第n次出现的点数拟定，而与X_1，X_2，…，X_{n-2}的值无关. 所以X_n是一种参数离散、状态离散马尔可夫过程.

例11.3 爱伦菲斯特（Ehrenfest）模型 设袋中装有红球与白球共a只. 每隔单位时间从袋中随机地取出一球，同步换另一种颜色的球放入袋中. 设X_n表达第n次摸球并放回后袋中红球的个数，$n=0,1,2,\cdots$. 显然，当$X_n=0$时，下一时刻袋中的红球个数必为1；当$X_n=a$时，下一时刻袋中的红球个数必为$a-1$. 已知袋中的既有红球数为 X_{n_0} 将来的红球数仅与 X_{n_0} 有关，而与时刻n_0之前袋中的红球数无关. 所以$\{X_n, n\ge 0\}$是一种马尔可夫过程，且状态空间$E=\{0,1,2,\ldots,a\}$. 爱伦菲斯特应用这一模型研究了气体分之之间的热传导过程.

例11.4　设在每次试验中，事件A发生的概率为p，独立反复进行这项试验，X_n表达到第n次为止事件A发生的次数，阐明$\{X_n,n=1, 2, \cdots\}$是一种马尔可夫过程。

解　由二项分布的知识可知, X_n服从二项分布$B(n,p)$,故称此$\{X_n,n=1, 2, \cdots\}$为二项过程。若令$Y_n=X_n-X_{n-1}$，$n=1, 2, 3, \cdots$, 其中$X_0=0$.

显然Y_n是第n次试验中事件A发生的次数为

$$P(Y_n=0)=1-p,\ P(Y_n=1)=p,\ n=1,2,3,\mathrm{L}$$

且

$$X(n+m)-X(n):\ B(m,p),\ n=1,2,3,\mathrm{L}$$

所以$\{X_n,n=1,2,\ldots\}$为平稳的独立增量过程，即为参数离散、状态也离散马尔可夫过程。

参数离散、状态也离散马尔可夫过程称为马尔可夫链。

第19讲　马尔可夫过程与马尔可夫链

二、马尔可夫链

1. 马尔可夫链的定义

定义11. 2　设参数集$T_1=\{0,1,2,\ldots\}$，$\{X_n, n\in T_1\}$是一种随机序列，状态空间$I_1=\{a_1, a_2,\ldots\}$, $a_i\in$R. 假如对任意的正 $0\le t_1<t_2<\cdots<t_r<m, t_i, m, m+n\in R$ 整数n和 有

$$P\{X_{m+n}=a_j \mid X_{t_1}=a_{i_1}, X_{t_2}=a_{i_2},\cdots, X_{t_r}=a_{i_r}, X_m=a_i\}$$

$$=P\{X_{m+n}=a_j \mid X_m=a_i\},$$

(11.1)

则称$\{X_n, n\in T_1\}$为一种马尔可夫链. 马尔可夫链也简称为马氏链.

二、马尔可夫链

1. 马尔可夫链的概念

定义11.2 设参数集$T_1=\{0,1,2,\ldots\}$,$\{X_n, n\in T_1\}$是一种随机序列，状态空间$I_1=\{a_1, a_2,\ldots\}$, $a_i\in$R. 假如对任意的正整数n和

$$0\le t_1<t_2<\cdots<t_r<m, t_i, m, m+n\in R$$

有

$$P\{X_{m+n}=a_j \mid X_{t_1}=a_{i_1}, X_{t_2}=a_{i_2}, \cdots, X_{t_r}=a_{i_r}, X_m=a_i\}$$

$$=P\{X_{m+n}=a_j \mid X_m=a_i\}, \tag{11.1}$$

则称$\{X_n, n\in T_1\}$为一种马尔可夫链．马尔可夫链也简称为马氏链．

假如马尔可夫链的状态空间T_1是可列集，则称之为可列状态的马氏链;

假如马尔可夫链的状态空间T_1是有限集，则称之为有限状态的马氏链.

二、马尔可夫链

1. 马尔可夫链的概念

定义11.2　设参数集$T_1=\{0,1,2,\ldots\}$，$\{X_n, n\in T_1\}$是一种随机序列，状态空间$I_1=\{a_1, a_2,\ldots\}$, $a_i\in$R. 假如对任意的正整数n和$0\le t_1<t_2<\cdots<t_r<m, t_i, m, m+n\in R$有

$$P\{X_{m+n}=a_j \mid X_{t_1}=a_{i_1}, X_{t_2}=a_{i_2},\cdots, X_{t_r}=a_{i_r}, X_m=a_i\}$$

$$=P\{X_{m+n}=a_j \mid X_m=a_i\}, \tag{11.1}$$

则称$\{X_n, n\in T_1\}$为一种马尔可夫链．马尔可夫链也简称为马氏链．

定义11.3　设$\{X_n, n\in T_1\}$为马尔可夫链，其状态为a_1, $a_2,\ldots$．则称条件概率

$$P_{ij}(m,m+n)=P\{X_{m+n}=a_j \mid X_m=a_i\} \tag{11.2}$$

为马氏链在时刻m处于状态a_i的条件下，在时刻$m+n$转移到状态a_j的转移概率.

二、马尔可夫链

1. 马尔可夫链的概念

定义11.3　设$\{X_n, n\in T_1\}$为马尔可夫链，其状态为a_1，a_2,…．则称条件概率

$$P_{ij}(m,m+n)=P\{X_{m+n}=a_j\mid X_m=a_i\} \qquad (11.2)$$

为马氏链在时刻m处于状态a_i的条件下，在时刻$m+n$转移到状态a_j的转移概率.

$$\sum_{j=1}^{+\infty}P_{ij}(m,m+n)=1,\qquad i=1,2,\cdots$$

$$\mathbf{P}(m,m+n)=(P_{ij}(m,m+n))$$

转移概率矩阵

因为链在时刻m从任何一种状态a_i出发，到另一时刻$m+n$，必然转移到a_1, a_2,… 各状态中的某一种，所以

二、马尔可夫链

1. 马尔可夫链的概念

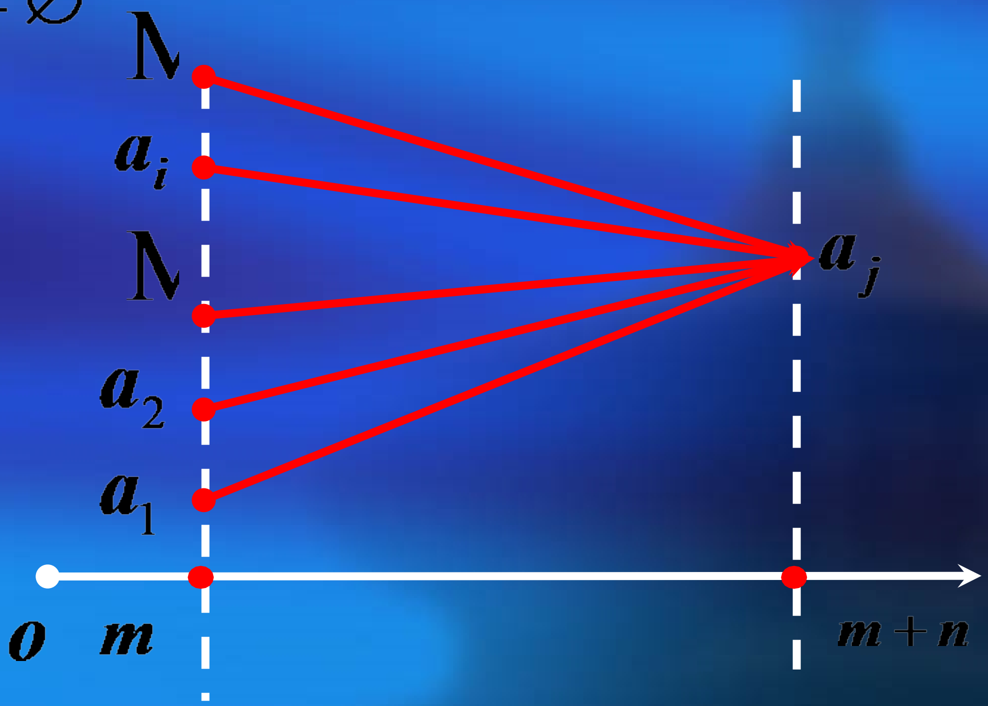
2. 马尔可夫链的概率分布

$$P\{X_{m+n}=a_j\}$$

$$\{X_m=a_i\}\cup\{X_m=a_j\}=\varnothing$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\{X_m=a_i\}=S$$

事件组$\{X_m=a_i\}$是样本空间S的一种完备事件组.



二、马尔可夫链

1. 马尔可夫链的概念

2. 马尔可夫链的概率分布

$$P\{X_{m+n}=a_j\}=P\{(X_{m+n}=a_j)\cap S\}$$

$$=P\{(X_{m+n}=a_j)\cap \sum_{i=1}^{+\infty}\boxed{(X_m=a_i)}\}$$

它们是样本空间S的一种完备事件组.

$$=P\{\sum_{i=1}^{+\infty}[\boxed{(X_{m+n}=a_j)\cap(X_m=a_i)}]\}$$

两两互不相容

$$=\sum_{i=1}^{+\infty}P\{(X_{m+n}=a_j)\cap(X_m=a_i)\}$$

$$=\sum_{i=1}^{+\infty}P\{X_m=a_i\}\cdot P\{X_{m+n}=a_j\mid X_m=a_i\}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/745320241310011303