专题 24.3　垂径定理【十大题型】

【人教版】

题型先知

举一反三

【知识点 1　垂径定理及其推论】

（1）垂径定理

垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的两条弧．

（2）垂径定理的推论

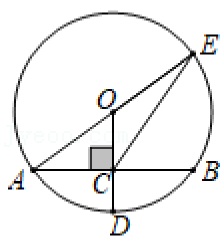
推论 1：平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧．

推论 2：弦的垂直平分线经过圆心，并且平分弦所对的两条弧．

推论 3：平分弦所对一条弧的直径，垂直平分弦，并且平分弦所对的另一条弧．

【题型 1　利用垂径定理求线段长度】

【例 1】（2022•雨花区校级开学）如图，⊙O 的半径 $OD\perp$弦 AB 交 AB 于点 C，连接 AO 并延长交⊙O 于点 E，连接 EC．若 $AB=8$，$EC=2\sqrt{13}$，则 CD 的长为（　　）



A．1　　　　B．3　　　　C．2　　　　D．4

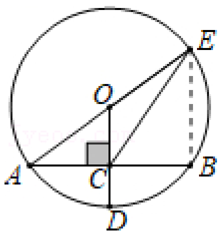
【分析】由垂径定理得出 $AC=BC=4$，连接 BE，由$\angle CBE=90^\circ$ 及 CE 长度求出 $BE=6$，在 Rt△ABE

中求出 $AE=10$，从而得出半径 $OA=OD=5$，再在 Rt△AOC 中求出 OC，从而得出答案．

【解答】解：∵$OD\perp AB$，$AB=8$，

∴$AC=BC=4$，

如图，连接 BE，



∵AE 是⊙O 的直径，

∴$\angle ABE=90°$，

∵$CE=2\sqrt{13}$，

∴$BE=\sqrt{CE^2-BC^2}=\sqrt{(2\sqrt{13})^2-4^2}=6$，

则 $AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$，

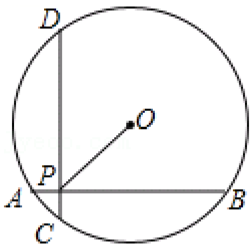
∴$AO=OD=5$，

在 Rt△AOC 中，$OC=\sqrt{AO^2-AC^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

则 $CD=OD-OC=2$，

故选：C．

【变式 1-1】（2022•宁津县二模）如图，已知圆 O 的半径为 10，$AB\perp CD$，垂足为 P，且 $AB=CD=16$，则 OP 的长为（　　）



A．6　　　　B．$6\sqrt{2}$　　　　C．8　　　　D．$8\sqrt{2}$

【分析】根据题意作出合适的辅助线，然后根据垂径定理、勾股定理即可求得 OP 的长，本题得以解决．

【解答】解：作 $OE\perp AB$ 交 AB 与点 E，作 $OF\perp CD$ 交 CD 于点 F，如右图所示，

则 $AE=BE$，$CF=DF$，$\angle OFP=\angle OEP=90°$，

又∵圆 O 的半径为 10，$AB\perp CD$，垂足为 P，且 $AB=CD=16$，

∴$\angle FPE$＝90°，OB＝10，BE＝8，

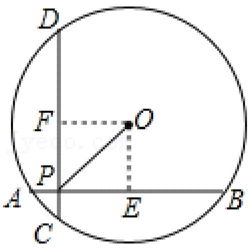
∴四边形 $OEPF$ 是矩形，OE＝6，

同理可得，OF＝6，

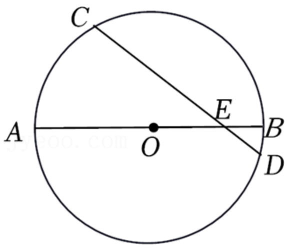
∴EP＝6，

∴$OP=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}$，

故选：B．



【变式 1-2】（2022•建华区二模）如图，⊙O 的直径 AB 与弦 CD 相交于点 E，若 AE＝5，EB＝1，$\angle AEC$＝30°，则 CD 的长为（　　）



A．5　　B．$2\sqrt{3}$　　C．$4\sqrt{2}$　　D．$2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1$

【分析】因为$\angle AED$＝30°，可过点 O 作 $OF\perp CD$ 于 F，构成直角三角形，先求得⊙O 的半径为 3，进而求得 OE＝3﹣1＝2，根据 30°角所对的直角边等于斜边的一半，得出 $OF=\frac{1}{2}OE$＝1，再根据勾股定理求得 DF 的长，然后由垂径定理求出 CD 的长．

【解答】解：过点 O 作 $OF\perp CD$ 于 F，连接 DO，

∵AE＝5，BE＝1，

∴AB＝6，

∴⊙O 的半径为 3，

∴OE＝3﹣1＝2．

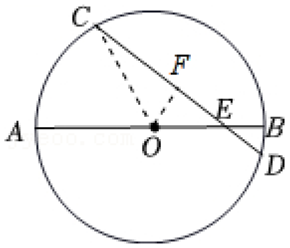
∵$\angle AEC$＝30°，

∴OF＝1，

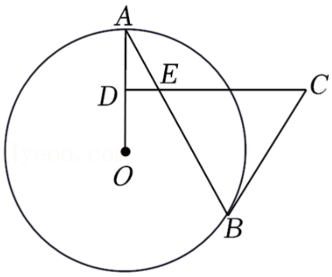
∴CF＝$2\sqrt{2}$，

∴CD＝$2CF$＝$4\sqrt{2}$，

故选：C.



【变式1-3】（2022春•徐汇区校级期中）如图，AB 是⊙O 的弦，D 为半径 OA 的中点，过 D 作 $CD\perp OA$ 交弦 AB 于点 E，且 $CE=CB$，若 $BE=2AE$，$CD=5$，那么⊙O 的半径为 $\underline{\quad 2\sqrt{3}\quad}$.



【分析】先证明△AFO 和△BCE 是等边三角形，设 $DE=x$，根据 $CD=5$ 列方程，求出 x 得到 $AD=\sqrt{3}$，从而得解.

【解答】解：如图，记 DC 与⊙O 交于点 F，连接 AF、OF、OB，过点 C 作 $CT\perp AB$ 于点 T，连接 OE，OT.

∵D 为半径 OA 的中点，$CD\perp OA$，

∴FD 垂直平分 AO，

∴$FA=FO$，

又∵$OA=OF$，

∴△AOF 是等边三角形，

∴$\angle OAF=\angle AOF=\angle AFO=60^\circ$，

∵$CE=CB$，$CT\perp EB$，

∴$ET=TB$，

∵$BE=2AE$，

∴$AE=ET=BT$，

∵$AD=OD$，

∴$DE\parallel OT$，

∴$\angle AOT=\angle ADE=90^\circ$，

∴$OE=AE=ET$，

∵$OA=OB$，

∴$\angle OAE=\angle OBT$，

∵$AO=BO$，$AE=BT$，

∴$\triangle AOE\cong\triangle BOT$（$SAS$），

∴$OE=OT$，

∴$OE=OT=ET$，

∴$\angle ETO=60^\circ$，

∴$\angle OAB=\angle OBA=30^\circ$，$\angle AED=\angle CEB=60^\circ$，

∴$\triangle CEB$是等边三角形，

∴$CE=CB=BE$，

设$DE=x$，

∴$AE=2x$，$BE=CE=4x$，

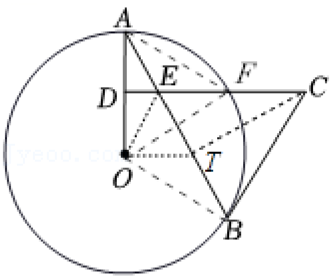
∴$CD=5x=5$，

∴$x=1$，

∴$AD=\sqrt{3}$，

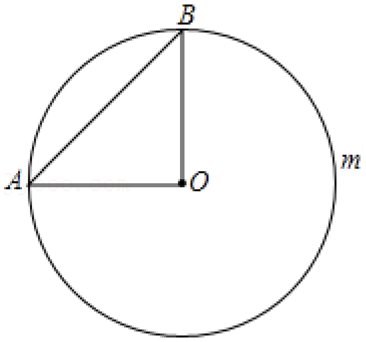
∴$AO=2\sqrt{3}$．

故答案为：$2\sqrt{3}$．



【题型2　利用垂径定理求角度】

【例2】（2022•泰安模拟）如图，⊙O的半径OA，OB，且$OA\perp OB$，连接AB．现在⊙O上找一点C，使$OA^2+AB^2=BC^2$，则$\angle OAC$的度数为（　　）



A．15°或 75°　　B．20°或 70°　　C．20°　　D．30°

【分析】设圆的半径是 r，作直径 BD，作 BC 关于直径 BD 的对称线段 BE，连接 EC，BE，ED，AC，再由直角三角形的性质即可解答．

【解答】解：如图，设圆的半径是 r，则 $AO=r$，$BO=r$，作直径 BD，作 BC⊙O 的弦 BC，使∠DBC=30°，作 BC 关于直径 BD 的对称线段 BE，

连接 EC，BE，ED，AC，

直角△BED 中，可以得∠EBD=30°，

∵线段 BE 与线段 BC 关于直线 BD 对称，

∴$BC=BE$，

∴BD 垂直平分线段 CE，

∴$\widehat{DE}=\widehat{CD}$，

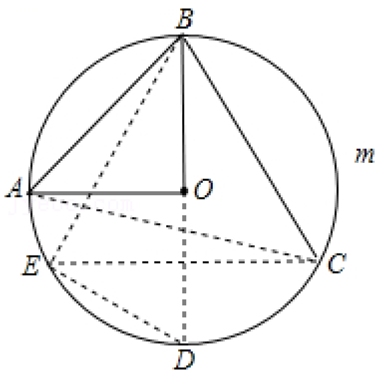
∴∠CBD=30°而∠$BCA=\frac{1}{2}$∠AOB=45°．

在△ABC 中，∠OAC=180°－∠ABO－∠CBD－∠ACB－∠BAO=15°．

同理，当 E 为 C 时，∠OAC=75°．

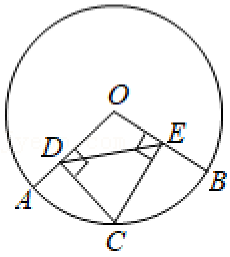
故∠OAC 的度数为 15°或 75°．

故选：A．



【变式 2-1】（2022 秋•天心区期中）如图，已知⊙O 半径 $OA=4$，点 B 为圆上的一点，点 C 为劣弧$\widehat{AB}$上

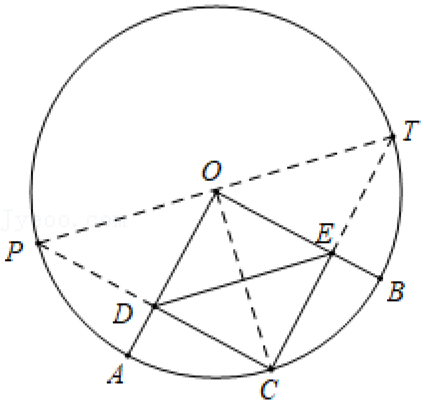
的一动点，$CD\perp OA$，$CE\perp OB$，连接 DE，要使 DE 取得最大值，则$\angle AOB$ 等于（　　）



A．60°　　　　B．90°　　　　C．120°　　　　D．135°

【分析】如图，延长 CD 交⊙O 于 P，延长 CE 交⊙O 于 T，连接 PT．根据垂径定理以及三角形的中位线定理，可得 $DE=\frac{1}{2}PT$，当 PT 是直径时，DE 的长最大，再证明$\angle AOB=90°$，即可解决问题．

【解答】解：如图，延长 CD 交⊙O 于 P，延长 CE 交⊙O 于 T，连接 PT．



∵$OA\perp PC$，$OB\perp CT$，

∴$CD=DP$，$CE=TE$，

∴$DE=\frac{1}{2}PT$，

∴当 PT 是直径时，DE 的长最大，

连接 OC，

∵$OP=OC=OT$，$OD\perp PC$，$OE\perp CT$，

∴$\angle COD=\angle POA$，$\angle COB=\angle BOT$，

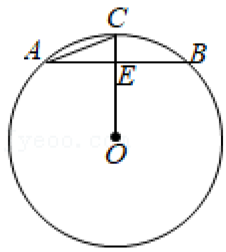
∴$\angle AOB=\angle COA+\angle COB=\frac{1}{2}\angle POT=90°$，

故选：B．

【变式 2-2】（2022 秋•青田县期末）如图，在⊙O 中，半径 OC 过弦 AB 的中点 E，$OC=2$，$OE=\sqrt{2}$．

（1）求弦 AB 的长；

（2）求$\angle CAB$ 的度数．



【分析】（1）连接 OB，先由垂径定理得 $OC\perp AB$，$AE=BE$，$OB=OC=2$，再由勾股定理求出 $BE=\sqrt{2}$，即可求解；

（2）先证△BOE 是等腰直角三角形，得∠BOC＝45°，再由圆周角定理即可求解．

【解答】解：（1）连接 OB，如图所示：

∵半径 OC 过弦 AB 的中点 E，

∴$OC\perp AB$，$AE=BE$，$OB=OC=2$，

∴$BE=\sqrt{OB^2-OE^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$，

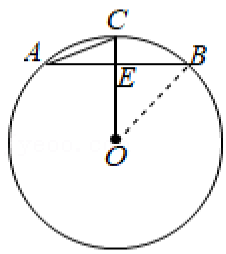
∴$AB=2BE=2\sqrt{2}$；

（2）由（1）得：$BE=OE$，$OC\perp AB$，

∴△BOE 是等腰直角三角形，

∴∠BOC＝45°，

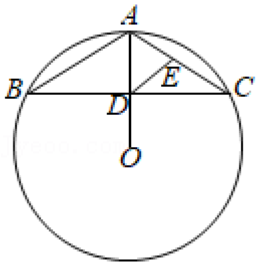
∴$\angle CAB=\frac{1}{2}\angle BOC=22.5°$．



【变式 2-3】（2022 秋•开州区期末）如图，在⊙O 中，弦 BC 与半径 OA 垂直于点 D，连接 AB、AC．点 E 为 AC 的中点，连接 DE．

（1）若 $AB=6$，求 DE 的长；

（2）若∠BAC＝100°，求∠CDE 的度数．



【分析】（1）根据垂径定理得到$\widehat{AB}=\widehat{AC}$，则 $AC=AB=6$，然后根据直角三角形斜边上的中线性质得到 DE 的长；

（2）利用等腰三角形的性质和三角形的内角和计算出$\angle C=40°$，然后利用 $ED=EC$ 得到$\angle CDE=\angle C=40°$．

【解答】解：（1）∵$BC\perp OA$，

∴$\widehat{AB}=\widehat{AC}$，$\angle ADC=90°$，

∴$AC=AB=6$，

∵点 E 为 AC 的中点，

∴$DE=\frac{1}{2}AC=3$；

（2）∵$AB=AC$，

∴$\angle B=\angle C$，

∵$\angle BAC=100°$，

∴$\angle C=\frac{1}{2}(180°-100°)=40°$，

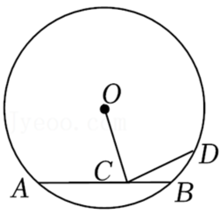
∵点 E 为 AC 的中点，

∴$ED=EC$，

∴$\angle CDE=\angle C=40°$．

【题型 3　利用垂径定理求最值】

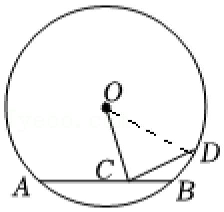
【例 3】（2022•威海模拟）⊙O 中，点 C 为弦 AB 上一点，$AB=1$，$CD\perp OC$ 交⊙O 于点 D，则线段 CD 的最大值是（　　）



A．$\frac{1}{2}$　　　B．1　　　C．$\frac{3}{2}$　　　D．2

【分析】因为 $CD\perp OC$ 交⊙O 于点 D，连接 OD，△OCD 是直角三角形，则 $CD=\sqrt{OD^2-OC^2}$，因为半径 OD 是定值，当 OC 取得最小值时线段 CD 取得最大值．

【解答】解：连接 OD，



∵$CD\perp OC$ 交⊙O 于点 D，

∴△OCD 是直角三角形，

根据勾股定理得 $CD=\sqrt{OD^2-OC^2}$，

∵半径 OD 是定值，

∴当 $OC\perp AB$ 时，线段 OC 最小，此时 D 与 B 重合，$CD=\sqrt{OB^2-OC^2}$，

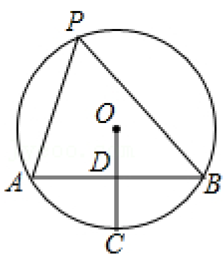
∵$OC\perp AB$，

∴$AC=BC=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}$，

∴$CD=\sqrt{OB^2-OC^2}=BC=\frac{1}{2}$.

故选：A．

【变式 3-1】（2022•河北模拟）如图所示，在⊙O 中，AB 为弦，$OC\perp AB$ 交 AB 于点 D．且 $OD=DC$．P 为⊙O 上任意一点，连接 PA，PB，若⊙O 的半径为 1，则 $S_{\triangle PAB}$ 的最大值为（　　）



A．1　　B．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　D．$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

【分析】连接 OA，如图，利用垂径定理得到 $AD=BD$，$\widehat{AC}=\widehat{BC}$，再根据 $OD=DC$ 可得到 $OD=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2}$，所以 $AD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，由勾股定理，则 $AB=\sqrt{3}$．△PAB 底 AB 不变，当高越大时面积越大，即 P 点到 AB 距离最大时，△APB 的面积最大．则当点 P 为 AB 所在优弧的中点时，此时 $PD=PO+OD=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，△$APB$ 的面积最大，然后根据三角形的面积公式计算即可．

【解答】解：连接 OA，如图，

∵$OC\perp AB$，

∴$AD=BD$，

∵$OD=DC$，

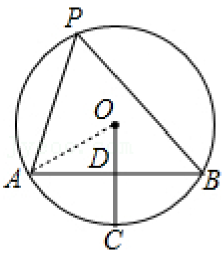
∴$OD=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2}$，

∴$AD=\sqrt{OA^2-OD^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$AB=2AD=\sqrt{3}$.

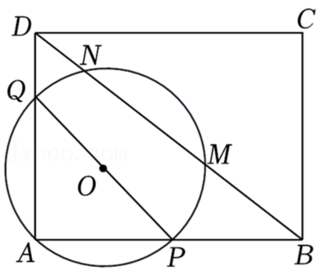
当点 P 为 AB 所对的优弧的中点时，△APB 的面积最大，此时 $PD=PO+OD=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

∴△APB 的面积的最大值为 $=\frac{1}{2}AB\cdot PD=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{3}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

故选：C.



【变式 3-2】（2022 秋•龙凤区校级期末）如图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=20$，$AD=15$，P，Q 分别是 AB，AD 边上的动点，$PQ=16$，以 PQ 为直径的⊙O 与 BD 交于点 M，N，则 MN 的最大值为 __$8\sqrt{3}$__.



【分析】过 A 点作 $AH\perp BD$ 于 H，连接 OM，如图，先利用勾股定理计算出 $BD=25$，则利用面积法可计算出 $AH=36$，再证明点 O 在 AH 上时，OH 最短，此时 HM 有最大值，最大值为 $4\sqrt{3}$，然后根据垂径定理可判断 MN 的最大值.

【解答】解：过 A 点作 $AH\perp BD$ 于 H，连接 OM，如图：

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$\angle BAD=90°$，

在 Rt△ABD 中，$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{20^2+15^2}=25$，

∵$\frac{1}{2}\times AH\times BD=\frac{1}{2}\times AD\times AB$，

$\therefore AH=\frac{20\times15}{25}=12$，

$\because \odot O$ 的直径为 16，

$\therefore \odot O$ 的半径为 8，

∴点 O 在 AH 上时，OH 最短，

$\because HM=\sqrt{OM^2-OH^2}$，

∴此时 HM 有最大值，$OH=AH-OA=4$，

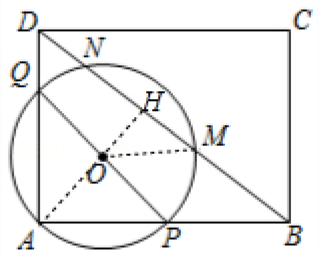
则最大值为$\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$，

$\because OH\perp MN$，

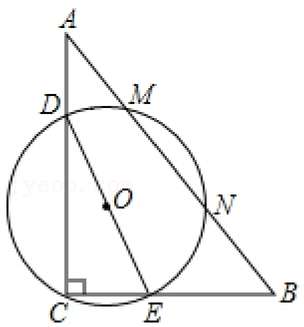
$\therefore MN=2MH$，

$\therefore MN$ 的最大值为 $2\times4\sqrt{3}=8\sqrt{3}$.

故答案为：$8\sqrt{3}$.



【变式 3-3】（2022 秋•延平区校级期末）在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$BC=3$，$AC=4$，D、E 分别是 AC、BC 上的一点，且 $DE=3$，若以 DE 为直径的圆与斜边 AB 相交于 M、N，则 MN 的最大值为（　　）



A．$\frac{9}{10}$　　B．$\frac{6}{5}$　　C．$\frac{8}{5}$　　D．$\frac{12}{5}$

【分析】由题意可知，C、O、G 三点在一条直线上 OG 最小，MN 最大，再由勾股定理求得 AB，然后由三角形面积求得 CF，最后由垂径定理和勾股定理即可求得 MN 的最大值．

【解答】解：过 O 作 $OG\perp AB$ 于 G，连接 OC、OM，

$\because DE=3$，$\angle ACB=90°$，$OD=OE$，

∴$OC=\frac{1}{2}DE=\frac{3}{2}$，

只有 C、O、G 三点在一条直线上 OG 最小，

∵$OM=\frac{3}{2}$，

∴只有 OG 最小，GM 才能最大，从而 MN 有最大值，

过 C 作 $CF\perp AB$ 于 F，

∴G 和 F 重合时，MN 有最大值，

∵$\angle ACB=90°$，$BC=3$，$AC=4$，

∴$AB=\sqrt{BC^2+AC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

∵$\frac{1}{2}AC\bullet BC=\frac{1}{2}AB\bullet CF$，

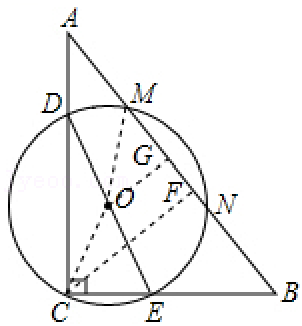
∴$CF=\frac{AC\times BC}{AB}=\frac{4\times 3}{5}=\frac{12}{5}$，

∴$OG=CF-OC=\frac{12}{5}-\frac{3}{2}=\frac{9}{10}$，

∴$MG=\sqrt{OM^2-OG^2}=\sqrt{(\frac{3}{2})^2-(\frac{9}{10})^2}=\frac{6}{5}$，

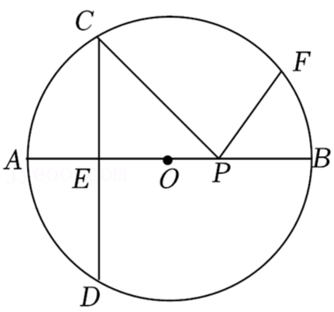
∴$MN=2MG=\frac{12}{5}$，

故选：D．



【题型 4　利用垂径定理求取值范围】

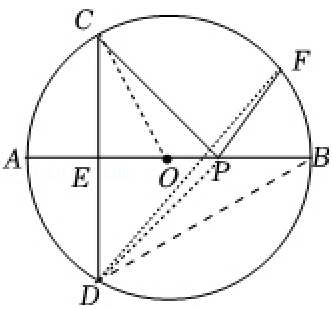
【例 4】（2022•包河区校级二模）如图，在⊙O 中，直径 $AB=10$，$CD\perp AB$ 于点 E，$CD=8$．点 F 是弧 BC 上动点，且与点 B、C 不重合，P 是直径 AB 上的动点，设 $m=PC+PF$，则 m 的取值范围是（　　）



A．$8<m\leqslant 4\sqrt{5}$　　B．$4\sqrt{5}<m\leqslant 10$　　C．$8<m\leqslant 10$　　D．$6<m<10$

【分析】连接 PD，DF，OC，BD，利用垂径定理可得 AB 是 CD 的垂直平分线，则 $PC=PD$；利用三角形的任意两边之和大于第三边，可得不等式 $PD+PF\geqslant DF$（当 D，P，F 在一条直线上时取等号），结合图形即可得出结论．

【解答】解：连接 PD，DF，OC，BD，如图，



∵$CD\perp AB$，BA 为⊙O 的直径，

∴$CE=ED=\frac{1}{2}CD=4$，

∵$OC=\frac{1}{2}AB=5$，

∴$OE=\sqrt{OC^2-CE^2}=3$，

∴$BE=OE+OB=8$．

∴$BD=\sqrt{BE^2+DE^2}=4\sqrt{5}$．

∵P 是直径 AB 上的动点，$CD\perp AB$，

∴AB 是 CD 的垂直平分线，

∴$PC=PD$．

∵$m=PC+PF$，

∴$m=PD+PF$，

由图形可知：$PD+PF\geqslant DF$（当 D，P，F 在一条直线上时取等号），

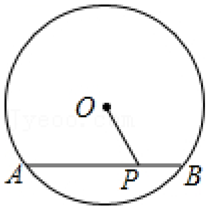
∵点 F 是弧 BC 上动点，且与点 B、C 不重合，

∴$DC<DF\leqslant$直径，

∴$8<m\leqslant10$.

故选：C.

【变式4-1】（2022•佛山）如图，⊙O的直径为$10cm$，弦$AB=8cm$，P是弦AB上的一个动点，求OP的长度范围.



【分析】过点O作$OE\perp AB$于点E，连接OB，由垂径定理可知$AE=BE=\frac{1}{2}AB$，再根据勾股定理求出OE的长，由此可得出结论.

【解答】解：过点O作$OE\perp AB$于点E，连接OB，

∵$AB=8cm$，

∴$AE=BE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times8=4cm$，

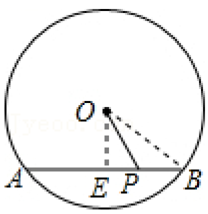
∵⊙O的直径为$10cm$，

∴$OB=\frac{1}{2}\times10=5cm$，

∴$OE=\sqrt{OB^2-BE^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3cm$，

∵垂线段最短，半径最长，

∴$3cm\leqslant OP\leqslant5cm$.



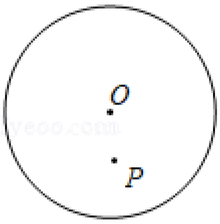
【变式4-2】（2022秋•盐都区校级月考）如图，点P是⊙O内一定点.

（1）过点P作弦AB，使点P是AB的中点（不写作法，保留作图痕迹）；

（2）若⊙O的半径为13，$OP=5$，

①求过点P的弦的长度m范围；

②过点P的弦中，长度为整数的弦有__4__条.



【分析】（1）连接 OP 并延长，过点 P 作 $AB\perp OP$ 即可；

（2）①过点 P 的所有弦中，直径最长为 26，与 OP 垂直的弦最短，由垂径定理和勾股定理求出 $AB=24$，即可得出答案；

②过 P 点最长的弦为直径 26，最短的弦 24，长度为 25 的弦有 2 条，即可得出结论．

【解答】解：（1）如图 1，连接 OP 并延长，过点 P 作 $AB\perp OP$，

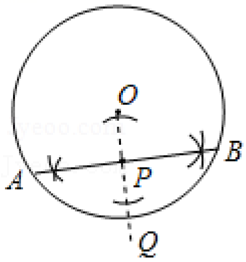


图 1

则弦 AB 即为所求；

（2）①过点 P 的所有弦中，直径最长为 26，与 OP 垂直的弦最短，

连接 OA，如图 2 所示：

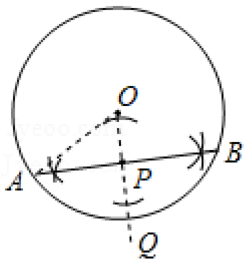


图 2

∵$OP\perp AB$，

∴$AP=BP=\sqrt{OA^2-OP^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$，

∴$AB=2AP=24$，

∴过点 P 的弦的长度 m 范围为 $24\leqslant m\leqslant 26$；

②∵过 P 点最长的弦为直径 26，最短的弦 24，

∴长度为 25 的弦有两条，

∴过点 P 的弦中，长度为整数的弦共有 4 条，

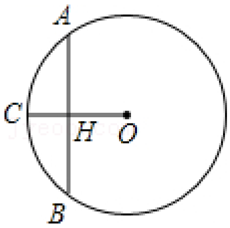
故答案为：4．

【变式 4-3】（2022 秋•天河区校级期中）已知⊙O 的半径为 5，点 O 到弦 AB 的距离 $OH=3$，点 P 是圆上一动点，设过点 P 且与 AB 平行的直线为 l，记直线 AB 到直线 l 的距离为 d．

（1）求 AB 的长；

（2）如果点 P 只有两个时，求 d 的取值范围；

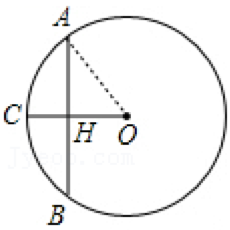
（3）如果点 P 有且只有三个时，求连接这三个点所得到的三角形的面积．



【分析】（1）连接 OA，根据勾股定理求出 AH，根据垂径定理得出即可；

（2）求出 HC 和 HD 的值，结合图形得出即可；

（3）先找出符合条件时的位置，求出三角形的高和底边，根据三角形的面积公式求出即可．



【解答】解：（1）

图1

连接 OA，如图 1，

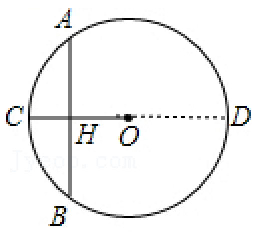
∵点 O 到弦 AB 的距离 $OH=3$，

∴$AB\perp OC$，

∴$\angle OHA=90^\circ$，$AB=2AH$，

在 Rt△AHO 中，$OA=5$，$OH=3$，由勾股定理得：$AH=4$，

∴$AB=2AH=8$；

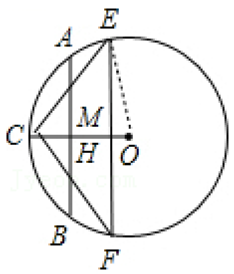


（2）　　　图2

延长 CO 交⊙O 于 D，如图 2，

∵$CH=5-3=2$，$HD=5+3=8$，

∴点 P 只有两个时 d 的取值范围是 $2<d<8$；



（3）　　　图3

如图 3，∵$CH=5-3=2$，$HD=5+3=8$，

∴点 P 有且只有三个时，$d=2$，

如图，P 在 C、E、F 处，连接 OE，

∵$OC\perp AB$，$AB\parallel EF$，

∴$OC\perp EF$，

∴$EF=2EM$，

∵$OE=5$，$OM=5-2-2=1$，$CM=2+2=4$，

∴由勾股定理得：$EM=\sqrt{5^2-1^2}=2\sqrt{6}$；

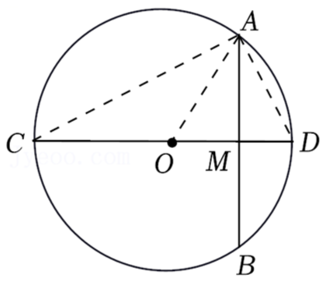
∴$EF=2EM=4\sqrt{6}$，

∴$S_{\triangle CEF}=\frac{1}{2}\times EF\times CM=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{6}\times 4=8\sqrt{6}$

即点 P 有且只有三个时，连接这三个点所得到的三角形的面积是 $8\sqrt{6}$.

【题型 5　利用垂径定理求整点】

【例 5】（2022•山海关区一模）已知⊙O 的直径 $CD=10$，CD 与⊙O 的弦 AB 垂直，垂足为 M，且 $AM=4.8$，则直径 CD 上的点（包含端点）与 A 点的距离为整数的点有（　　）



A．1 个　　B．3 个　　C．6 个　　D．7 个

【分析】利用勾股定理得出线段 AD 和 AC 的长，根据垂线段的性质结合图形判断即可．

【解答】解：∵CD 是直径，

∴$OC=OD=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}\times 10=5$，

∵$AB\perp CD$，

∴$\angle AMC=\angle AMD=90^\circ$，

∵$AM=4.8$，

∴$OM=\sqrt{5^2-4.8^2}=1.4$，

∴$CM=5+1.4=6.4$，$MD=5-1.4=3.6$，

∴$AC=\sqrt{4.8^2+6.4^2}=8$，$AD=\sqrt{4.8^2+3.6^2}=6$，

∵$AM=4.8$，

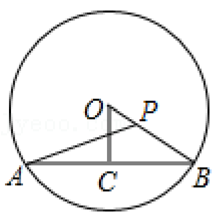
∴A 点到线段 MD 的最小距离为 4.8，最大距离为 6，则 A 点到线段 MD 的整数距离有 5，6，

A 点到线段 MC 的最小距离为 4.8，最大距离为 8，则 A 点到线段 MC 的整数距离有 5，6，7，8，

直径 CD 上的点（包含端点）与 A 点的距离为整数的点有 6 个，

故选：C．

【变式 5-1】（2022 秋•新昌县期末）如图，AB 是⊙O 的弦，$OC\perp AB$ 于点 C，连接 OB，点 P 是半径 OB 上任意一点，连接 AP，若 $OB=5$，$OC=3$，则 AP 的长不可能是（　　）

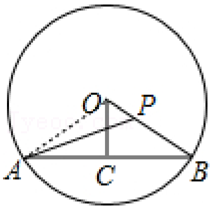


A．6　　B．7　　C．8　　D．9

【分析】首先利用勾股定理得出 AC 的长，求出 AB 长，再利用三角形边之间的关系进而得出 $AO\leqslant AP\leqslant$

AB，即可得出答案．

【解答】解：连接 OA，



∵$OC\perp AB$ 于点 C，$OB=5$，$OC=3$，

∴$BC=\sqrt{5^2-3^2}=4$，

∴$AB=2\times4=8$，

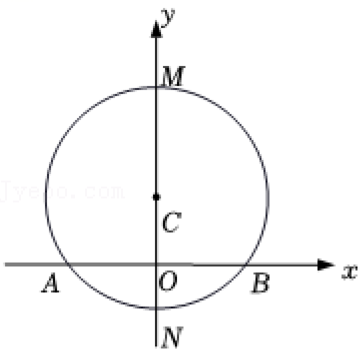
∵$AO\leqslant AP\leqslant AB$，

∴$5\leqslant AP\leqslant8$，

∴AP 的长度不可能是：9（答案不唯一）．

故选：D．

【变式 5-2】（2022•桥西区校级模拟）如图，AB 是⊙C 的弦，直径 $MN\perp AB$ 于点 O，$MN=10$，$AB=8$，如图以 O 为原点建立坐标系．我们把横纵坐标都是整数的点叫做整数点，则线段 OC 长是 __3__，⊙C 上的整数点有 __12__ 个．



【分析】过 C 作直径 $UL\parallel x$ 轴，连接 AC，根据垂径定理求出 $AO=BO=4$，根据勾股定理求出 OC，再得出答案即可．

【解答】解：过 C 作直径 $UL\parallel x$ 轴，