几个概念

- 直接观测量(direct observation)
- 非直接观测量---观测值的函数

  水准测量　　导线测量　三角形内角平差值
- 独立观测值(**independent observation)**
- 非独立观测值----相关观测值**(correlation observation)**

  独立观测值各个函数之间不一定独立
- 误差传播律(spread of covariance)
- 协方差传播律 (spread of covariance)

一、观测值线性函数的方差

设观测向量L $L_1 \ldots L_n$

其期望 $E(L_1)\cdots E(L_n)$

方差为：$D_L = E\{[L-E(L)][L-E(L)]^T = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \ldots & \sigma_{i,n} \\ \ldots & & \\ \sigma_{n,1} & \ldots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$

函数：$x = KL + K^0$

函数的期望：$E(x) = KE(L) + K^0$

函数的方差：$D(x) = E\{[x-E(x)][x-E(x)]^T\} = KD_L K^T$

二、多个观测值线性函数的方差-协方差阵

观测向量的多个线性函数为

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= k_{11}X_1 + k_{12}X_2 + \cdots\cdots + k_{1n}X_n + k_{10} \\
Z_2 &= k_{21}X_1 + k_{22}X_2 + \cdots\cdots + k_{2n}X_n + k_{20} \\
&\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
Z_t &= k_{t1}X_1 + k_{t2}X_2 + \cdots\cdots + k_{tn}X_n + k_{t0}
\end{aligned}
$$

令：

$$
\underset{t\times 1}{Z} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_t \end{pmatrix}, \quad \underset{t\times n}{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{t1} & k_{t2} & \cdots & k_{tn} \end{pmatrix}, \quad \underset{t\times 1}{K_0} = \begin{pmatrix} k_{10} \\ k_{20} \\ \vdots \\ k_{t0} \end{pmatrix}
$$

于是，观测向量的多个线性函数的方差可写为

$$D_{ZZ} = KD_{XX}K^T$$

若还有观测向量的另外**r**个线性函数

$$\begin{aligned} Y_1 &= f_{11}X_1 + f_{12}X_2 + \cdots\cdots + f_{1n}X_n + f_{10} \\ Y_2 &= f_{21}X_1 + f_{22}X_2 + \cdots\cdots + f_{2n}X_n + f_{20} \\ &\cdots\ \cdots\cdots\ \cdots\ \cdots \\ Y_r &= f_{r1}X_1 + f_{r2}X_2 + \cdots\cdots + f_{rn}X_n + f_{r0} \end{aligned}$$

其矩阵形式为： $Y = FX + F_0$

则有： $$\underset{r\times r}{D_{YY}} = FD_{XX}F^T = D_{YY}^T$$

例1 已知 $L_1 \ldots L_3$

$$\underset{3,3}{D_L} = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 4 \end{bmatrix}$$

求函数 $x = 5L_1 - L_2 + 2L_3 - 7$ 的方差。

例2 已知 $L_1 \ldots L_3$

$$\underset{3,3}{D_L} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

函数 $x_1 = 2L_1 - L_2 + 5,\quad x_2 = -L_2 + 3L_3 - 2$

求函数向量 $x = [x_1 \quad x_2]^T$ 的方差。

三、两个函数 $\underset{r,1}{y}$，$\underset{t,1}{z}$ 的互协方差阵

$$\underset{r,t}{D_{YZ}} = FD_{XX}K^T$$

*例3*设有观测向量L，已知其协方差阵为，$\underset{3,3}{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

求下列函数的协方差。

$$F_1 = L_1 + 2L_2 - 3L_3$$

$$F_2 = L_1 + 3L_3$$

四、非线性函数的情况

五、多个观测向量非线性函数的方差—协方差矩阵

设观测向量的*t*个非线性函数为：

$$Z_1 = f_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$
$$Z_2 = f_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$Z_t = f_t(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

对上式求全微分，得

$$dZ_1 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial X_1}\right)dX_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial X_2}\right)dX_2 + \cdots\cdots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial X_n}\right)dX_n$$
$$dZ_2 = \left(\frac{\partial f_2}{\partial X_1}\right)dX_1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial X_2}\right)dX_2 + \cdots\cdots + \left(\frac{\partial f_2}{\partial X_n}\right)dX_n$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$dZ_t = \left(\frac{\partial f_t}{\partial X_1}\right)dX_1 + \left(\frac{\partial f_t}{\partial X_2}\right)dX_2 + \cdots\cdots + \left(\frac{\partial f_t}{\partial X_n}\right)dX_n$$

令：

$$dZ=\begin{pmatrix} dZ_1 \\ dZ_2 \\ \vdots \\ dZ_t \end{pmatrix},\quad dX=\begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ \vdots \\ dX_n \end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial X_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_t}{\partial X_1} & \frac{\partial f_t}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_t}{\partial X_n} \end{pmatrix}$$

则：　$$dZ=kdX$$

由误差传播定律得：　$$D_{ZZ}=KD_{XX}K^T$$

例4 测量一矩形的边长，其边长 L_1， L_2 的数值和精度为

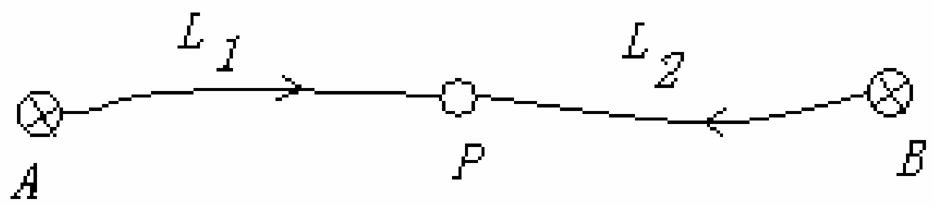
$$25.68cm \pm 0.8mm, \quad 41.76cm \pm 0.6mm$$

求对角线的长度**D**和矩形面积**S**及其精度。

六、协方差传播律的应用

1 水准测量的精度

例5 在单一水准路线**AB**上，为求待定点 **P**的高程，观测了高差L_1， L_2，其相应的路线长度 $S_1=4km, S_2=2km$ 已知每公里观测高差中误差为$\sigma_{km}=1cm$，求高差平差值的协方差阵。



2 距离丈量的精度

3 同精度独立观测值算术平均值的精度

七、应用协方差传播律时应注意的问题

（1）根据测量实际，正确地列出函数式；

（2）全微分所列函数式，并用观测值计算 偏导数值；

（3）计算时注意各项的单位要统一；

（4）将微分关系写成矩阵形式；

（5）直接应用协方差传播律，得出所求问题的方差-协方差矩阵。

八、权及定权的常用方法

➢权的概念

权是权衡轻重的意思，其应用比较广泛，应用到测量上可作为衡量精度的标准。如有一组观测值时等精度的，那么，在平差时，应该将它们同等对待，因此说这组观测值是等权的，而对于一组不等精度的观测值，在平差时，就不能等同处理，容易理解，精度高的观测值在平差结果中应占较大的比重，或者说，应占较大的权，所以平差时，对于一组不等精度的观测值应给予不同的权。

➢权的定义

权的意义，不在于其数值的大小，重要的是它们之间的比例关系。

是表征精度的相对的数字指标。

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$$

例1 量AB间距离，得两组观测值 L_1， L_2 ，已知它们的中误差 $\sigma_1 = 3mm,\quad \sigma_2 = 2mm$，求 L_1， L_2 的权。

例2 测D点高程，有观测值 h_1， h_2， h_3，已知 $\sigma_1 = 3mm$， $\sigma_2 = 4mm$ $\sigma_3 = 5mm$ ， 求各观测值的权。

例3 在水准网中，已知各条路线的距离为 $S_1 = 1.5km, S_2 = 2.5km, S_3 = 2.0km$ 求各观测值的权。

2 单位权中误差

- 比例因子
- 权为1的观测值对应的中误差

3 测量中常用的方法

（1）水准测量的权

（2）同精度观测值的算术平均值的权

（3）距离丈量的权

（4）三角高程测量的权

九、协因数和协因数传播律

1. 协因数
2. 协因数阵
3. 协因数阵的特点
4. 互协因数阵
5. 权阵

➢当观测值互不相关时，权阵为对角阵，主对角线上的元素为观测值的权。

$$L=[L_1 \ldots\ldots L_n]^T$$

$$Q_{LL}=\frac{1}{\sigma_0^2}D_L=\begin{bmatrix}\frac{\sigma_{L_1}^2}{\sigma_0^2} & \ldots\ldots & 0\\ \cdots & \ldots\ldots & \cdots\\ 0 & \ldots\ldots & \frac{\sigma_{L_r}^2}{\sigma_0^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{p_1} & & \\ & & \\ & & \frac{1}{p_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_{11} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & Q_{nn_r}\end{bmatrix}$$