

哈工大附中 2024-2025 学年度第一学期 10 月考试
(高三数学) 试题

时间：120 分钟 分值：150 分

命题人：王大力 校对入：王大力

一、单选题 (共 8 小题，每题 5 分，共 40 分)

1. 已知数集 A 、 B 满足： $A \cap B = \{2, 3\}$ ， $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ ，若 $1 \notin A$ ，则一定有：()

- A. $1 \in B$ B. $1 \notin B$ C. $4 \in B$ D. $4 \notin A$

【答案】A

【解析】

【分析】利用交集、并集的概念及运算结合元素与集合的关系判定选项即可.

【详解】因为 $A \cap B = \{2, 3\}$ ， $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ ，且 $1 \notin A$ ，

所以必有 $1 \in B$ ，可能 $4 \in B$ 且 $4 \notin A$ ，也可能 $4 \in A$ 且 $4 \notin B$ ，

故 A 正确，B、C、D 错误.

故选：A.

2. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $a_2 + a_{10} = 24$ ，且 $a_3 = 6$ ，则 $S_8 =$ ()

- A. 60 B. 72 C. 120 D. 144

【答案】B

【解析】

【分析】根据给定条件，利用等差数列性质及前 n 项和公式计算即得.

【详解】在等差数列 $\{a_n\}$ 中， $2a_6 = a_2 + a_{10} = 24$ ，解得 $a_6 = 12$ ，

所以 $S_8 = \frac{8(a_1 + a_8)}{2} = 4(a_3 + a_6) = 4 \times (6 + 12) = 72$.

故选：B

3. 下列说法正确的是 ()

- A. “ $a < b$ ”是“ $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ”的必要不充分条件
- B. “ $x > 0$ ”是“ $x > 2$ ”的充分不必要条件
- C. 若不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 (x_1, x_2) ，则必有 $a < 0$
- D. 命题“ $\exists x \in \mathbf{R}$ ，使得 $x^2 + 1 = 0$.”的否定为“ $\forall x \notin \mathbf{R}$ ，使得 $x^2 + 1 \neq 0$.”

【答案】C

【解析】

【分析】根据充分、必要条件分析判断 A；若 $x = 1$ ，满足 $x > 0$ ，但不满足 $x > 2$ ，可得结论判断 B；根据分类讨论 a 的符号，结合一元二次不等式分析判断；根据存在量词命题的否定是全称量词命题可判断 D.

【详解】对于选项 A：例如 $a = -1, b = 1$ ，则 $\frac{1}{a} = -1, \frac{1}{b} = 1$ ，
即 $a < b$ ，满足题意，但 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ 不成立，即充分性不成立；
例如 $a = 1, b = -1$ ，则 $\frac{1}{a} = 1, \frac{1}{b} = -1$ ，
即 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ，满足题意，但 $a < b$ 不成立，即必要性不成立；
所以“ $a < b$ ”是“ $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ”的既不充分也不必要条件，故 A 不正确；

对于选项 B：若 $x = 1$ ，满足 $x > 0$ ，但不满足 $x > 2$ ，
故“ $x > 0$ ”是“ $x > 2$ ”的必要不充分条件，故 B 不正确；

对于选项 C：若 $a = 0$ ，则 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集不可能为两数之间，不合题意；

若 $a > 0$ ，则 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集不可能为两数之间，不合题意；

综上所述：若不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 (x_1, x_2) ，则必有 $a < 0$ ，故 C 正确；

对于选项 D：命题“ $\exists x \in \mathbf{R}$ ，使得 $x^2 + 1 = 0$.”的否定为“ $\forall x \in \mathbf{R}$ ，使得 $x^2 + 1 \neq 0$.”，故 D 不正确.

故选：C.

4. 已知函数 $f(x) = (2^x + a \cdot 2^{-x}) \cos x$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，则实数 $a = (\quad)$

- A. -1 B. 1 C. -2 D. 2

【答案】A

【解析】

【分析】根据奇函数性质 $f(0) = 0$ ，解得 $a = -1$ ，并代入检验即可.

【详解】因为函数 $f(x) = (2^x + a \cdot 2^{-x})\cos x$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，

则 $f(0) = 1 + a = 0$ ，解得 $a = -1$ ，

若 $a = -1$ ，则 $f(x) = (2^x - 2^{-x})\cos x$ ，且定义域为 $\mathbf{R}$ ，

则 $f(-x) = (2^{-x} - 2^x)\cos(-x) = -(2^x - 2^{-x})\cos x = -f(x)$ ，

所以函数 $f(x) = (2^x + a \cdot 2^{-x})\cos x$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，

综上所述： $a = -1$.

故选：A.

5. 已知向量 $\vec{a} = (\cos \theta, \sin \theta)$ ， $\vec{b} = (2, -1)$ ，若 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，则 $\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta + 3 \cos \theta}$ 的值为 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{2}{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】由向量垂直的坐标表示得 $\tan \theta = 2$ ，再应用齐次式运算，由弦化切求目标式的值.

【详解】由题设 $2 \cos \theta - \sin \theta = 0 \Rightarrow \tan \theta = 2$ ，

$$\text{而 } \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta + 3 \cos \theta} = \frac{\tan \theta + 1}{\tan \theta + 3} = \frac{2 + 1}{2 + 3} = \frac{3}{5}.$$

故选：B

6. 当阳光射入海水后，海水中的光照强度随着深度增加而减弱，可用 $I_D = I_0 e^{-KD}$ 表示其总衰减规律，其中 K 是消光系数， D （单位：米）是海水深度， I_D （单位：坎德拉）和 I_0 （单位：坎德拉）分别表示在深度 D 处和海面的光强. 已知某海域 5 米深处的光强是海面光强的 40%，则该海域消光系数 K 的值约为 ()

(参考数据： $\ln 2 \approx 0.7, \ln 5 \approx 1.6$)

A. 0.2

B. 0.18

C. 0.1

D. 0.14

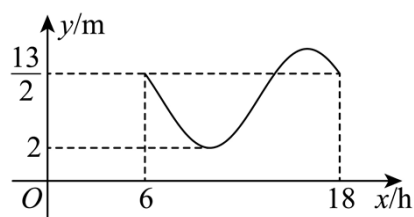
【答案】B

【解析】

【分析】理解题意，代值后，将指数式化成对数式，取近似值计算即得.

【详解】依题意得， $\frac{I_D}{I_0} = 40\% = e^{-5K}$ ，化成对数式， $-5K = \ln \frac{2}{5} = \ln 2 - \ln 5 \approx -0.9$ ，解得， $K \approx 0.18$.

故选：B.

7. 如图，某港口某天从 6h 到 18h 的水深 y (单位：m) 与时间 x (单位：h) 之间的关系可用函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) + 5 \left(A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2} \right)$ 近似刻画，据此可估计当天 12h 的水深为 ()A. $\frac{7}{2}$ m

B. 4m

C. $\left(5 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ mD. $\left(5 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ m

【答案】A

【解析】

【分析】根据函数图象可确定周期，即可求解 $\omega = \frac{\pi}{6}$ ，根据最低点得 $A = 3$ ，即可代入 $\left(6, \frac{13}{2}\right)$ 求解 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ ，从而根据解析式代入 $x = 12$ 即可得解.【详解】由题图可得 $\frac{2\pi}{\omega} = 18 - 6 = 12$ ，则 $\omega = \frac{\pi}{6}$ ，当 $\sin(\omega x + \varphi) = -1$ 时， y 取得最小值，为 $-A + 5 = 2$ ，得 $A = 3$ ， $\therefore$ 函数 $y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{6}x + \varphi\right) + 5$ 的图象过点 $\left(6, \frac{13}{2}\right)$ ，

$$\therefore 3\sin\left(\frac{\pi}{6}\times 6+\varphi\right)+5=\frac{13}{2}, \text{ 即 } \sin\varphi=-\frac{1}{2}, \text{ 又 } |\varphi|<\frac{\pi}{2}, \therefore \varphi=-\frac{\pi}{6}, \therefore y=3\sin\left(\frac{\pi}{6}x-\frac{\pi}{6}\right)+5.$$

$$\text{当 } x=12 \text{ 时, } y=3\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)+5=-\frac{3}{2}+5=\frac{7}{2}.$$

故选：A.

8. 设 $a = \ln 1.02$, $b = \sin 0.02$, $c = \frac{1}{51}$, 则 a, b, c 大小关系为 ()

A. $c < b < a$

B. $c < a < b$

C. $a < b < c$

D. $a < c < b$

【答案】B

【解析】

【分析】构造函数 $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$, $x \in (0,1)$, 求导利用函数的单调性比较 a, c 的大小, 构造函数 $g(x) = \sin x - \ln(1+x)$, $x \in (0,1)$, 求导利用函数的单调性比较 a, b 的大小, 从而确定 a, b, c 的大小关系.

【详解】令 $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$, $x \in (0,1)$,

$$\text{由 } f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} > 0,$$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,

所以 $f(x) > f(0) = 0$, 即 $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$, $x \in (0,1)$,

$$\therefore \ln(1+0.02) > \frac{0.02}{1+0.02} = \frac{1}{51}, \text{ 所以 } a > c;$$

令 $g(x) = \sin x - \ln(1+x)$, $x \in (0,1)$,

$$\text{由 } g'(x) = \cos x - \frac{1}{1+x},$$

$$\text{令 } h(x) = g'(x) = \cos x - \frac{1}{1+x}, x \in (0,1), h'(x) = -\sin x + \frac{1}{(1+x)^2},$$

$$\text{令 } y = h'(x), \text{ 则 } y' = -\cos x - \frac{2}{(1+x)^3} < 0,$$

所以 $h'(x)$ 在 $x \in (0,1)$ 上单调递减,

$$\text{又 } h'(0)=1>0, \quad h'(1)=-\sin 1+\frac{1}{4}<-\sin \frac{\pi}{6}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}<0,$$

所以存在唯一 $x_0 \in (0,1)$, 使得 $h'(x_0)=0$,

即当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h'(x) > 0$, 当 $x \in (x_0, 1)$ 时, $h'(x) < 0$,

即 $h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增, 在 $(x_0, 1)$ 上单调递减,

所以 $h(x)$ 的最小值为 $h(0)$, $h(1)$ 中一个, 而 $h(0)=0$, $h(1)=\cos 1-\frac{1}{2}>\cos \frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}=0$,

所以 $h(x) > h(0)=0$, 即 $g'(x) > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增, 所以 $g(x) > g(0)=0$,

即 $\sin x > \ln(1+x)$, $x \in (0,1)$, 所以 $\sin 0.02 > \ln 1.02$, 即 $b > a$.

所以 $b > a > c$.

故选 : B.

【点睛】关键点点睛：本题主要考查构造函数结合导数比较大小问题，解决本题的关键是构造函数，给定定义域求导确定函数单调性最后比较函数值大小即可判断，

例如比较 $a = \ln 1.02$, $c = \frac{1}{51}$ 的大小时，转换 $a = \ln 1.02 = \ln(1+0.02)$, $c = \frac{0.02}{1+0.02}$, 可构造差函数

$$f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}, \quad x \in (0,1),$$

求导数 $f'(x)$ 结合导函数的性质即可确定 $f(x)$ 在 $x \in (0,1)$ 的单调性，从而可得函数值大小，即可判断 a, c 大小关系.

二 . 多选题 (共 3 小题 , 每题 6 分 , 共 18 分 , 部分正确得部分 , 有错的得 0 分)

9. 已知向量 $\vec{a} = (x, 1)$, $\vec{b} = (4, 2)$, 则下列结论正确的是 ()

A. 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 $x = 2$

B. 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $x = \frac{1}{2}$

C. 若 $x = 3$, 则向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 的夹角的余弦值为 $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

D. 若 $x = -1$, 则向量 $\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}$ 上的投影向量为 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

【答案】 AC

【解析】

【分析】 根据给定条件, 利用共线向量的坐标表示判断 A ; 利用向量垂直的坐标表示判断 B ; 求出向量夹角的余弦判断 C ; 求出投影向量判断 D.

【详解】 对于 A , 由 $\vec{a} // \vec{b}$, 得 $2x - 4 = 0$, 解得 $x = 2$, A 正确 ;

对于 B , 由 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 得 $4x + 2 = 0$, 解得 $x = -\frac{1}{2}$, B 错误 ;

对于 C , 若 $x = 3$, 则 $\vec{a} = (3, 1)$, 又 $\vec{b} = (4, 2)$, 则 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{12 + 2}{\sqrt{10} \times 2\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$, C 正确 ;

对于 D , 若 $x = -1$, 则 $\vec{a} = (-1, 1)$, 又 $\vec{b} = (4, 2)$, 于是 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1 \times 4 + 1 \times 2 = -2$,

则向量 $\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}$ 上的投影向量为 $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{-2(-1, 1)}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = (1, -1)$, D 错误.

故选 : AC

10. 已知复数 z 满足 $zi = \sqrt{3}i - 1$, 则下列说法正确的是 ()

A. z 的虚部为 i

B. $|z - 2i| = |z|$

C. 若复数 z_1 , z_2 满足 $|z_1| = |z_2| = \sqrt{2}$, 且 $z_1 - z_2 = z$, 则 $|z_1 + z_2| = 2\sqrt{3}$

D. 若复数 z_3 满足 $|z - z_3| \leq \sqrt{2}$, 则 z_3 在复平面内对应的点构成图形的面积为 2π

【答案】 BD

【解析】

【分析】 由复数的计算先化简出复数 z 的值, 判断 A 选项 ; 利用模长公式计算出对应复数的模长, 判断 BC 选项 ; 复数模长的几何意义点到点的距离, 从而得出 $|z - z_3| \leq \sqrt{2}$ 表示一个圆, 计算出圆的面积判断 D 选项.

【详解】 $z = \frac{\sqrt{3}i-1}{i} = \sqrt{3} + i$ ，虚部为 1，选项 A 不正确；

$|z-2i| = |\sqrt{3}-i| = 2$ ， $|z| = |\sqrt{3}+i| = 2$ ， $\therefore$ 选项 B 正确；

$z_1 - z_2 = z$ ，则 $|z_1 - z_2| = |z| = 2$ ，设 $z_1 = a_1 + b_1i$ ， $z_2 = a_2 + b_2i$ ， $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ ，

则 $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ ，

$\therefore |z_1 + z_2| = 2$ ， $\therefore$ 选项 C 错误；

$\because |z - z_3| \leq \sqrt{2}$ ， $\therefore z_3$ 在复平面内对应的点是以 z 在复平面内对应的点为圆心，半径 $r = \sqrt{2}$ 的圆，

$\therefore z_3$ 在复平面内对应的点构成图形的面积为 2π ，选项 D 正确.

故选：BD

11. 已知函数 $f(x) = 2\sin x \cos x - 2\sqrt{3}\sin^2 x + \sqrt{3}$ ，则 ()

A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π

B. 直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 是函数 $f(x)$ 的图象的一条对称轴

C. 若 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时， $m < f(x)$ 恒成立，则实数 m 的取值范围为 $(-\infty, -\sqrt{3})$

D. 将函数 $f(x)$ 的图象上的所有点的横坐标缩小为原来的 $\frac{1}{2}$ ，再将所得的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，得到

函数 $g(x)$ 的图象，若 $x \in [0, t]$ 时，函数 $g(x)$ 有且仅有 5 个零点，则实数 t 的取值范围为 $\left[\frac{13\pi}{12}, \frac{4\pi}{3}\right)$.

【答案】ACD

【解析】

【分析】利用二倍角公式和辅助角公式对 $f(x)$ 进行化简，再求最小正周期可判断 A，代入检验法可判断 B，利用三角函数的性质可判断 C，利用三角函数的图象变换和性质可判断 D.

【详解】因为 $f(x) = 2\sin x \cos x - 2\sqrt{3}\sin^2 x + \sqrt{3} = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ ，故 A 正确；

又由 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\frac{2\pi}{3} = \sqrt{3} \neq 2$, 故 B 错误 ;

当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时 , 可得 $2x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$,

当 $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$, 即 $x = \frac{\pi}{2}$ 时 , $f(x)$ 取得最小值 $2\sin\frac{4\pi}{3} = -\sqrt{3}$,

因为 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $m < f(x)$ 恒成立 , 所以 $m < -\sqrt{3}$,

即实数 m 的取值范围为 $(-\infty, -\sqrt{3})$, 故 C 正确 ;

由题意得函数 $g(x) = 2\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$, 因为 $x \in [0, t]$,

所以 $4x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}, 4t - \frac{\pi}{3}\right]$, 又因为函数 $g(x)$ 有且仅有 5 个零点 ,

则满足 $4\pi \leq 4t - \frac{\pi}{3} < 5\pi$, 解得 $\frac{13\pi}{12} \leq t < \frac{4\pi}{3}$,

所以实数 t 的取值范围是 $\left[\frac{13\pi}{12}, \frac{4\pi}{3}\right)$, 故 D 正确.

故选 : ACD.

三.填空题 (共 3 小题 , 每小题 5 分 , 共 15 分)

12. 已知 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$, 求 $|\vec{a} + \vec{b}|$ 的值_____.

【答案】 $\sqrt{7}$

【解析】

【分析】注意到 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2\vec{a}^2 + 2\vec{b}^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2}$, 从而直接代入求解即可.

【详解】 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{2\vec{a}^2 + 2\vec{b}^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2} = \sqrt{2 \times 2^2 + 2 \times 1^2 - 3} = \sqrt{7}$.

故答案为 : $\sqrt{7}$.

13. 化简 : $\left(\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} - \frac{1}{\sin 10^\circ}\right) \cdot \left(\frac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}\right)$ _____.

【答案】 $-4\sqrt{3}$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/746105111000011013>