2024年高考考前逆袭卷（新高考新题型）02

数 学

（考试时间：120 分钟　试卷满分：150 分）

全国新高考卷的题型会有所调整，考试题型为 8（单选题）＋3（多选题）＋3（填空题）＋5（解答题），其中最后一道试题是新高考地区新增加的题型，主要涉及集合、数列，导数等模块，以解答题的方式进行考查。

预测 2024 年新高考地区数列极有可能出现在概率与统计大题中，而结构不良型题型可能为集合或导数模块中的一个，出现在 19 题的可能性较大，难度中等偏上，例如本卷第 19 题。

第 I 卷（选择题）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的。

1．已知一组数据 m，4，2，5，3 的平均数为 n，且 m，n 是方程 $x^2-4x+3=0$ 的两根，则这组数据的方差为（　　）

A．10　　B．$\sqrt{10}$　　C．2　　D．$\sqrt{2}$

2．$P=\{\vec{\alpha}|\vec{\alpha}=(-1,1)+m(1,2),m\in R\}$，$Q=\{\vec{\beta}|\vec{\beta}=(1,-2)+n(2,3),n\in R\}$ 是两个向量集合，则 $P\cap Q$ 等于（　　）

A．$\{(1,-2)\}$　　B．$\{(-13,-23)\}$　　C．$\{(-2,1)\}$　　D．$\{(-23,-13)\}$

3．在 ΔABC 中，内角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，若 A、B、C 成等差数列，$3a$、$3b$、$3c$ 成等比数列，则 $\cos A\cos B$=（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{1}{6}$

4．在三棱锥 $S-ABC$ 中，底面 ABC 为边长为 3 的正三角形，侧棱 $SA\perp$ 底面 ABC，若三棱锥的外接球的体积为 36π，则该三棱锥的体积为（　　）

A．$9\sqrt{2}$　　B．$\frac{27\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{9\sqrt{2}}{2}$　　D．$27\sqrt{2}$

5．有一排 7 只发光二极管，每只二极管点亮时可发出红光或绿光，若每次恰有 3 只二极管点亮，且相邻的两只不能同时点亮，根据三只点亮的不同位置，或不同颜色来表示不同的信息，则这排二极管能表示的信息种数共有种

A．10　　B．48　　C．60　　D．80

6．设$a=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$，$b=\log_3\frac{1}{5}$，$2^c+c=0$，则(　)

A．$a<b<c$　　B．$c<b<a$　　C．$a<c<b$　　D．$b<c<a$

7．按照“碳达峰”、“碳中和”的实现路径，2030 年为碳达峰时期，2060 年实现碳中和，到 2060 年，纯电动汽车在整体汽车中的渗透率有望超过 70%，新型动力电池迎来了蓬勃发展的风口.*Peukert* 于 1898 年提出蓄电池的容量 C（单位：Ah），放电时间 t（单位：h）与放电电流 I（单位：A）之间关系的经验公式：$C=I^n\cdot t$，其中 n 为 *Peukert* 常数，为了测算某蓄电池的 *Peukert* 常数 n，在电池容量不变的条件下，当放电电流 $I=20\text{A}$ 时，放电时间 $t=20\text{h}$；当放电电流 $I=30\text{A}$ 时，放电时间 $t=10\text{h}$.则该蓄电池的 *Peukert* 常数 n 大约为（　）（参考数据：$\lg 2\approx 0.30$，$\lg 3\approx 0.48$）

A．$\frac{4}{3}$　　B．$\frac{5}{3}$　　C．$\frac{8}{3}$　　D．2

8．过双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点$F$作渐近线的垂线，设垂足为$P$（$P$为第一象限的点），延长$FP$交抛物线$y^2=2px(p>0)$于点$Q$，其中该双曲线与抛物线有一个共同的焦点，若$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OQ})$，则双曲线的离心率的平方为

A．$\sqrt{5}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　C．$\sqrt{5}+1$　　D．$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9．已知i为虚数单位，以下四个说法中正确的是（　）

A．$\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^4=0$

B．$3+\mathrm{i}>1+\mathrm{i}$

C．若$z=(1+2\mathrm{i})^2$，则复数z对应的点位于第四象限

D．已知复数z满足$|z-2\mathrm{i}|=3$，则z在复平面内对应的点的轨迹为圆

10．设直线系M：$x\cos\theta+(y-2)\sin\theta=1(0\le\theta\le 2\pi)$，则下面四个命题正确的是（　）

A．点$(0,2)$到M中的所有直线的距离恒为定值

B．存在定点P不在M中的任意一条直线上

C．对于任意整数$n(n\ge 3)$，存在正n边形，其所有边均在M中的直线上

D．M中的直线所能围成的正三角形面积都相等

11．定义在R上的偶函数$f(x)$满足$f(x-3)=f(5-x)$，当$x\in[0,1]$时，$f(x)=x^2$.设函

数 $g(x)=\log_5|x-1|$，则下列结论正确的是（　　）

A．$f(x)$的图象关于直线$x=1$对称

B．$f(x)$的图象在$x=\frac{7}{2}$处的切线方程为$y=-x+\frac{17}{4}$

C．$f(2021)+f(2022)+f(2023)+f(2024)=2$

D．$f(x)$的图象与$g(x)$的图象所有交点的横坐标之和为10

第II卷（非选择题）

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.

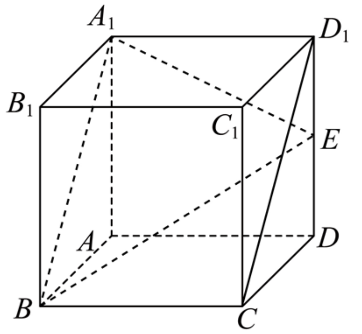
12．已知集合$A=\{x|1<x<3\}$，集合$B=\{x|2m<x<1-m\}$，命题p：$x\in A$，命题q：$x\in B$，若p是q的充分条件，则实数m的取值范围是_____.

13．已知多项式$(x+3)(x-1)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$，则

$a_2+a_3+a_4+a_5=$________.

14．正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E是棱DD_1的中点，F在侧面CDD_1C_1上运动，且满足

B_1F∥平面A_1BE.以下命题正确的有________.



①侧面CDD_1C_1上存在点F，使得$B_1F\perp CD_1$

②直线B_1F与直线BC所成角可能为$30°$

③平面A_1BE与平面CDD_1C_1所成锐二面角的正切值为$2\sqrt{2}$

④设正方体棱长为1，则过点E,F,A的平面截正方体所得的截面面积最大为$\frac{\sqrt{5}}{2}$

四、解答题：本题共5小题，共77分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15．（13分）已知$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且

$b=3$，$c=1$，$a=6\cos B$.

(1)求a的值；

(2)求证：$A=2B$；

(3) $\cos 2\left(B-\dfrac{\pi}{12}\right)$的值

16．（15 分）如图 1，在平面五边形 $ABCDE$ 中，$AE//BD$，且 $DE=2$，$\angle EDB=60°$，$CD=BC=\sqrt{7}$，$\cos\angle DCB=\dfrac{5}{7}$，将$\triangle BCD$ 沿 BD 折起，使点 C 到 P 的位置，且 $EP=\sqrt{3}$，得到如图 2 所示的四棱锥 $P-ABDE$．

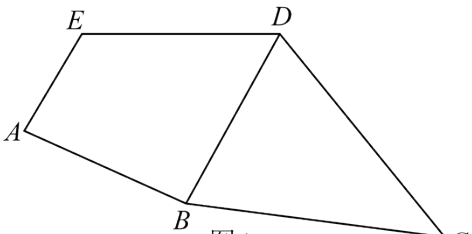


图1

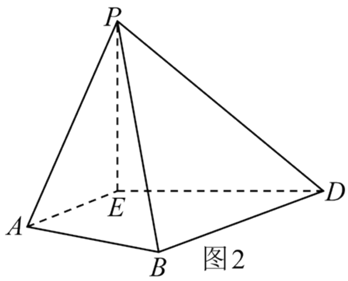


图2

(1)求证；$PE\perp$平面 $ABDE$；

(2)若 $AE=1$，求平面 PAB 与平面 PBD 所成锐二面角的余弦值．

17．（15 分）甲进行摸球跳格游戏．图上标有第 1 格，第 2 格，…，第 25 格，棋子开始在第 1 格．盒中有 5 个大小相同的小球，其中 3 个红球，2 个白球（5 个球除颜色外其他都相同）．每次甲在盒中随机摸出两球，记下颜色后放回盒中，若两球颜色相同，棋子向前跳 1 格；若两球颜色不同，棋子向前跳 2 格，直到棋子跳到第 24 格或第 25 格时，游戏结束．记棋子跳到第 n 格的概率为 $P_n\left(n=1,2,3,\cdots,25\right)$．

(1)甲在一次摸球中摸出红球的个数记为 X，求 X 的分布列和期望；

(2)证明：数列$\left\{P_n-P_{n-1}\right\}\left(n=2,3,\cdots,24\right)$为等比数列．

18．（17 分）焦点在x轴上的椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$的左顶点为$M$，$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，$C\left(x_3,y_3\right)$为椭圆上不同三点，且当$\overrightarrow{OB}=\lambda\overrightarrow{OC}$时，直线$MB$和直线$MC$的斜率之积为$-\frac{1}{4}$.

(1)求b的值；

(2)若$\triangle OAB$的面积为 1，求$x_1^2+x_2^2$和$y_1^2+y_2^2$的值；

(3)在（2）的条件下，设AB的中点为D，求$|OD|\cdot|AB|$的最大值.

19．（17 分）英国数学家泰勒发现了如下公式：$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$其中$n!=1\times2\times3\times4\times\cdots\times n$,e 为自然对数的底数，$\mathrm{e}=2.71828\cdots\cdots$.以上公式称为泰勒公式.设$f\left(x\right)=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2},g\left(x\right)=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$，根据以上信息，并结合高中所学的数学知识，解决如下问题.

(1)证明：$\mathrm{e}^x\geq1+x$；

(2)设$x\in\left(0,+\infty\right)$，证明：$\frac{f\left(x\right)}{x}<g\left(x\right)$；

(3)设$F\left(x\right)=g\left(x\right)-a\left(1+\frac{x^2}{2}\right)$，若$x=0$是$F\left(x\right)$的极小值点，求实数$a$的取值范围.

2024年高考考前逆袭卷（新高考新题型）02

数 学

（考试时间：120 分钟　试卷满分：150 分）

全国新高考卷的题型会有所调整，考试题型为 8（单选题）＋3（多选题）＋3（填空题）＋5（解答题），其中最后一道试题是新高考地区新增加的题型，主要涉及集合、数列，导数等模块，以解答题的方式进行考查。

预测 2024 年新高考地区数列极有可能出现在概率与统计大题中，而结构不良型题型可能为集合或导数模块中的一个，出现在 19 题的可能性较大，难度中等偏上，例如本卷第 19 题。

第 I 卷（选择题）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的。

1．已知一组数据 m，4，2，5，3 的平均数为 n，且 m，n 是方程 $x^2-4x+3=0$ 的两根，则这组数据的方差为（　　）

A．10　　B．$\sqrt{10}$　　C．2　　D．$\sqrt{2}$

【答案】C

【详解】解：方程 $x^2-4x+3=0$，即 $(x-3)(x-1)=0$，解得 $x=3$ 或 $x=1$，又这组数据的其它值都大于1，

$\therefore m=1$，$n=3$，显然 $\frac{1}{5}(1+4+2+5+3)=3$，符合题意.

所以 $s^2=\frac{1}{5}\left[(1-3)^2+(4-3)^2+(2-3)^2+(5-3)^2+(3-3)^2\right]=2$.

故选：C.

2．$P=\{\vec{\alpha}|\vec{\alpha}=(-1,1)+m(1,2),m\in R\}$，$Q=\{\vec{\beta}|\vec{\beta}=(1,-2)+n(2,3),n\in R\}$ 是两个向量集合，则 $P\cap Q$ 等于（　　）

A．$\{(1,-2)\}$　　B．$\{(-13,-23)\}$　　C．$\{(-2,1)\}$　　D．$\{(-23,-13)\}$

【答案】B

【详解】根据所给的两个集合的元素，表示出两个集合的交集，

在集合 P 中，$\vec{\alpha}=(-1+m,1+2m)$，

在集合 Q 中，$\vec{\beta}=(1+2n,-2+3n)$.

要求两个向量的交集，即找出两个向量集合中的相同元素，

$\because$ 元素是向量，要使的向量相等，只有横标和纵标分别相等，

$\therefore \begin{cases}-1+m=1+2n \\ 1+2m=-2+3n.\end{cases}$，解得 $\begin{cases}m=-12 \\ n=-7.\end{cases}$

此时 $\vec{\alpha}=\vec{\beta}=(-13,-23)$．

故选：B．

3．在 ΔABC 中，内角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，若 A、B、C 成等差数列，$3a$、$3b$、$3c$ 成等比数列，则 $\cos A\cos B$=（　）

A．$\frac{1}{2}$　　　B．$\frac{1}{4}$　　　C．$\frac{2}{3}$　　　D．$\frac{1}{6}$

【答案】B

【详解】解：由 A，B，C 成等差数列，有 $2B=A+C$（1）

$\because A$，B，C 为 ΔABC 的内角，$\therefore A+B+C=\pi$（2）．

由（1）（2）得 $B=\frac{\pi}{3}$．

由 $3a$，$3b$，$3c$ 成等比数列，得 $b^2=ac$，

由余弦定理得，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

把 $B=\frac{\pi}{3}$、$b^2=ac$ 代入得，$a^2+c^2-ac=ac$，

即 $(a-c)^2=0$，则 $a=c$，从而 $A=C=B=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore \cos A\cos B=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，

故选：B．

4．在三棱锥 $S-ABC$ 中，底面 ABC 为边长为 3 的正三角形，侧棱 $SA\perp$ 底面 ABC，若三棱锥的外接球的体积为 36π，则该三棱锥的体积为（　）

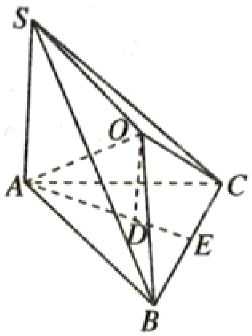
A．$9\sqrt{2}$　　　B．$\frac{27\sqrt{2}}{2}$　　　C．$\frac{9\sqrt{2}}{2}$　　　D．$27\sqrt{2}$

【答案】C

【详解】如图，设外接球的球心为 O．$\because$ 在三棱锥 $S-ABC$ 中，底面 ABC 是边长为 3 的正三角形，侧棱 $SA\perp$ 底面 ABC，三棱锥的外接球的体积为 36π，$\therefore$ 三棱锥的外接球的半径 $R=OS=3$．

过 A 作 $AE\perp BC$，交 BC 于 E，过球心 O 作 $OD\perp$ 平面 ABC 于 D，则 $D\in AE$，且 D 是 $\triangle ABC$ 的重心，$\therefore AD=\frac{2}{3}AE=\frac{2}{3}\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{3}$，$\therefore OD=\sqrt{OA^2-AD^2}=\sqrt{6}$．$\because O$ 到 SA 的距离为 $AD=\sqrt{3}$，$\therefore SA=OD+\sqrt{OS^2-AD^2}=2\sqrt{6}$，$\therefore$ 该三棱锥的体积

$$V=\frac{1}{3}\times SA\times S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}\times 2\sqrt{6}\times\left(\frac{1}{2}\times 3\times 3\times\sin 60^{\circ}\right)=\frac{9\sqrt{2}}{2}.$$



5．有一排 7 只发光二极管，每只二极管点亮时可发出红光或绿光，若每次恰有 3 只二极管点亮，且相邻的两只不能同时点亮，根据三只点亮的不同位置，或不同颜色来表示不同的信息，则这排二极管能表示的信息种数共有种

A．10　　B．48　　C．60　　D．80

【答案】D

【详解】解：先选出三个孔来：

1）　若任意选择三个孔，则有 C73=35 种选法

2）　若三个孔相邻，则有 5 种选法

3）　若只有二个孔相邻，

相邻孔为 1、2 两孔时，第三孔可以选 4、5、6、7，有 4 种选法

相邻孔为 2、3 两孔时，第三孔可以选 5、6、7，有 3 种选法

相邻孔为 3、4 两孔时，第三孔可以选 1、6、7，有 3 种选法

相邻孔为 4、5 两孔时，第三孔可以选 1、2、7，有 3 种选法

相邻孔为 5、6 两孔时，第三孔可以选 1、2、3，有 3 种选法

相邻孔为 6、7 两孔时，第三孔可以选 1、2、3、4，有 4 种选法

即共有 4+3+3+3+3+4=20 种选法

∴选出三个不相邻的孔，有 35-5-20=10 种选法

对于已选定的三个孔，每个孔都有两种显示信号，

则这三个孔可显示的信号数为 2×2×2=8 种

∴一共可以显示的信号数为 8*10=80 种

故选 D

6．设 $a=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$，$b=\log_3\frac{1}{5}$，$2^c+c=0$，则(　　)

A．$a<b<c$　　B．$c<b<a$　　C．$a<c<b$　　D．$b<c<a$

【答案】D

【详解】 $a=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$，则 $0<a<1$；

$b=-\log_3 5$， $1=\log_3 3<\log_3 5<\log_3 9=2$， 则 $-2<b<-1$；

$c=-2^c<0$ 且 $-c=2^c<1$， 则 $-1<c<0$；

故 $b<c<a$.

故选：D.

7．按照"碳达峰"、"碳中和"的实现路径，2030 年为碳达峰时期，2060 年实现碳中和，到 2060 年，纯电动汽车在整体汽车中的渗透率有望超过 70%，新型动力电池迎来了蓬勃发展的风口.*Peukert* 于 1898 年提出蓄电池的容量 C（单位： Ah），放电时间 t（单位：h）与放电电流 I（单位： A）之间关系的经验公式： $C=I^n\cdot t$，其中 n 为 *Peukert* 常数，为了测算某蓄电池的 *Peukert* 常数 n，在电池容量不变的条件下，当放电电流 $I=20\mathrm{A}$ 时，放电时间 $t=20\mathrm{h}$；当放电电流 $I=30\mathrm{A}$ 时，放电时间 $t=10\mathrm{h}$.则该蓄电池的 *Peukert* 常数 n 大约为（　　）（参考数据： $\lg 2\approx 0.30$， $\lg 3\approx 0.48$）

A． $\frac{4}{3}$　　　　B． $\frac{5}{3}$　　　　C． $\frac{8}{3}$　　　　D．2

【答案】B

【详解】解：根据题意可得 $C=20^n\cdot 20$， $C=30^n\cdot 10$，

两式相比得 $\frac{20^n\cdot 20}{30^n\cdot 10}=1$， 即 $\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{1}{2}$，

所以 $n=\log_{\frac{2}{3}}\frac{1}{2}=\log_{\frac{3}{2}}2=\frac{\lg 2}{\lg\frac{3}{2}}=\frac{\lg 2}{\lg 3-\lg 2}\approx\frac{0.3}{0.48-0.3}=\frac{5}{3}$.

故选：B.

8．过双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点 F 作渐近线的垂线，设垂足为 P（P 为第一象限的点），延长 FP 交抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 于点 Q，其中该双曲线与抛物线有一个共同的焦点，若 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OQ})$，则双曲线的离心率的平方为

A． $\sqrt{5}$　　　　B． $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　　　C． $\sqrt{5}+1$　　　　D． $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

【答案】D

【详解】试题分析： $c=\frac{p}{2}$，渐近线方程 $y=\pm\frac{b}{a}x$，因为 $|OP|^2=|x_P|\cdot|OF|$，所以 $x_P=\frac{a^2}{c}$，

$PF=\frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}}=b$， 因为 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OQ})$， 所以 P 为 FQ 中点， 所以 $x_Q=\frac{2a^2}{c}-c$,

由抛物线定义得 $FQ=2b\Rightarrow x_Q=2b-c$，

因此 $2\dfrac{a^2}{c}=c+2b-c\Rightarrow a^2=bc\Rightarrow a^4=(c^2-a^2)c^2\Rightarrow e^4-e^2-1=0$，又 $e>1$，所以

$e^2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，选 D.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9．已知 i 为虚数单位，以下四个说法中正确的是（　）

A． $\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^4=0$

B． $3+\mathrm{i}>1+\mathrm{i}$

C．若 $z=(1+2\mathrm{i})^2$，则复数 z 对应的点位于第四象限

D．已知复数 z 满足 $|z-2\mathrm{i}|=3$，则 z 在复平面内对应的点的轨迹为圆

【答案】AD

【详解】A： $\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^4=\mathrm{i}-1-\mathrm{i}+1=0$，本选项正确；

B：因为两个复数不能比较大小，所以本选项不正确；

C：因为 $z=(1+2\mathrm{i})^2=1+4\mathrm{i}-4=-3+4\mathrm{i}$，

所以复数 z 对应的点位于第二象限，因此本选项不正确；

D：因为 $|z-2\mathrm{i}|=3$，

所以 z 在复平面内对应的点的轨迹为圆心为 $(0,2)$，半径为 3 的圆，因此本选项正确，

故选：AD

10．设直线系 M： $x\cos\theta+(y-2)\sin\theta=1(0\le\theta\le2\pi)$，则下面四个命题正确的是（　）

A．点 $(0,2)$ 到 M 中的所有直线的距离恒为定值

B．存在定点 P 不在 M 中的任意一条直线上

C．对于任意整数 $n(n\ge3)$，存在正 n 边形，其所有边均在 M 中的直线上

D． M 中的直线所能围成的正三角形面积都相等

【答案】ABC

【详解】点 $(0,2)$ 到 M 中的直线 $x\cos\theta+(y-2)\sin\theta=1(0\le\theta\le2\pi)$ 的距离设为 d，则

$d=\dfrac{|-1|}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=1$ 为定值，故直线系 M： $x\cos\theta+(y-2)\sin\theta=1(0\le\theta\le2\pi)$ 表示圆

$x^2+(y-2)^2=1$ 的切线的集合.