第3章 空间力系的简化与平衡

BACK

3.1 空间力系的简化

1. 空间力系向一点的简化

如图3.1(a)所示，设有一空间一般力系$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、…、$\boldsymbol{F}_n$分别作用于刚体上A_1、A_2、…、A_n点。在刚体上取任意点O为简化中心，根据力的平移定理，把各力分别向O点平移，于是得到一个作用在O点的空间汇交力系$\boldsymbol{F}_1'$、$\boldsymbol{F}_2'$、…$\boldsymbol{F}_n'$

及空间力偶系$\boldsymbol{m}_1$、$\boldsymbol{m}_2$、…、$\boldsymbol{m}_n$(如图3.1(b)所示)，即

$$\boldsymbol{F}_i' = F_i \quad i=1，2，\cdots，n \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{m}_i=\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_i) \quad i=1，2，\cdots，n \tag{3.2}$$

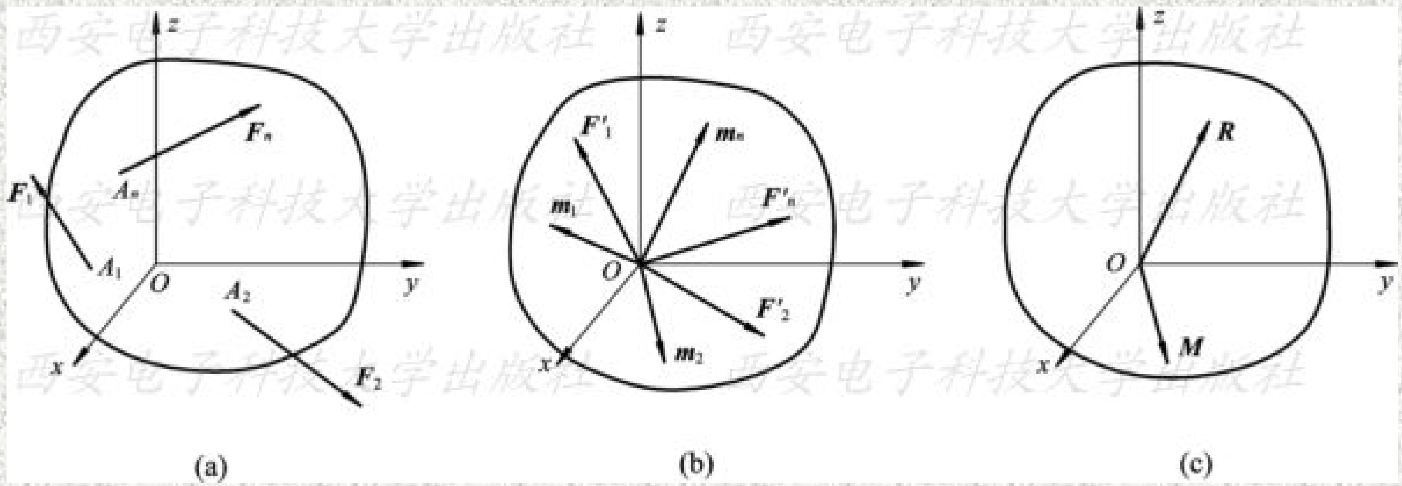

图3.1

上述空间汇交力系可进一步合成为作用在 O 点的一个力$\boldsymbol{R}$，即

$$R=\sum_{i=1}^{n} F_i' = \sum_{i=1}^{n} F_i = R' \qquad (3.3)$$

空间力偶系也可进一步合成为一个合力偶，其力偶矩为

$$M=\sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} m_O(F_i) = M_O \qquad (3.4)$$

力系中各力的矢量和$R'=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i$称为该力系的主矢；力系中各力对简化中心 O 点的力矩的矢量和$\boldsymbol{M}_O=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_i)$称为该力系对简化中心的主矩。

因此，空间一般力系向任意一点简化，可以得到一个力 $\boldsymbol{R}$ 和一个力偶 $\boldsymbol{M}$ (也可以说成空间一般力系与一个力和一个力偶等效)，如图3.1(c)所示。该力的作用点在简化中心，大小和方向与该力系的主矢相同，即 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}'$；该力偶的力偶矩等于该力系对简化中心的主矩，即 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_O$。

在实际计算时，一般采用解析法进行，即先求出各个矢量在三个正交坐标轴上的投影， 然后求出矢量的大小和方向。具体计算公式如下：

$$R_x' = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}, \quad R_y' = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}, \quad R_z' = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} \tag{3.5}$$

$$R' = \sqrt{R_x'^2 + R_y'^2 + R_z'^2} \tag{3.6}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos(R', x) &= \frac{R_x'}{R'} \\ \cos(R', y) &= \frac{R_y'}{R'} \\ \cos(R', z) &= \frac{R_z'}{R'} \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

$$M_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} m_x(F_i), \quad M_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} m_y(F_i), \quad M_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} m_z(F_i) \tag{3.8}$$

$$M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2} \tag{3.9}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos(M_O, x) &= \frac{M_{Ox}}{M_O} \\ \cos(M_O, y) &= \frac{M_{Oy}}{M_O} \\ \cos(M_O, z) &= \frac{M_{Oz}}{M_O}\end{aligned}\right\} \qquad (3.10)$$

2. 空间力系简化结果的讨论

空间一般力系向一点简化的最终结果有四种可能：一个合力、一个合力偶、一个力螺旋和平衡。这四种结果可由力系的主矢和力系对任意一点的主矩来判断，具体归纳如表3.1 所示。

表3.1 空间力系简化结果

<table>
<tr><th>主矢</th><th colspan="2">主　矩</th><th>最后结果</th><th>说　　明</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$\boldsymbol{R}'=0$</td><td colspan="2">$\boldsymbol{M}_O=0$</td><td>平衡</td><td>说明原力系和一个零力系等效</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\boldsymbol{M}_O\neq 0$</td><td>合力偶</td><td>此时主矩与简化中心的位置无关，即原力系与一个力偶等效</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\boldsymbol{R}'\neq 0$</td><td colspan="2">$\boldsymbol{M}_O\neq 0$</td><td>合力</td><td>原力系与一个力等效，称为合力，作用线通过简化中心 O</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{M}_O\neq 0$</td><td>$\boldsymbol{R}'\perp\boldsymbol{M}_O$</td><td>合力</td><td>原力系与一个力等效，称为合力，合力作用线离简化中心 O 的距离为：$d=\left|\frac{M_O}{R'}\right|$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\boldsymbol{M}_O\neq 0$</td><td>$\boldsymbol{R}'/\!/\boldsymbol{M}_O$</td><td>力螺旋</td><td>在这种情况下，不能进一步简化，称为力螺旋，力系的中心轴(力螺旋中心)通过简化中心</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{R}'$与$\boldsymbol{M}_O$成 α 角</td><td>力螺旋</td><td>$\boldsymbol{M}_O\perp\boldsymbol{R}'$的分量与$\boldsymbol{R}'$合成为一个力$\boldsymbol{R}''$，$\boldsymbol{R}''$作用线离简化中心 O 的距离为：$d=\left|\frac{M_O\sin\alpha}{R'}\right|$；$\boldsymbol{M}_O/\!/\boldsymbol{R}'$的分量与$\boldsymbol{R}''$构成一个力螺旋</td></tr>
</table>

3.2 空间力系的平衡

1. 空间一般力系的平衡条件

上面已经说明了空间一般力系向任意一点简化后，一般情况下等效于作用在简化中心的一个力和一个力偶，这个力的大小和方向与该力系的主矢相同，这个力偶的力偶矩等于该力系对简化中心的主矩。所以，空间一般力系平衡的充分与必要条件为：该力系的主矢和对任意点的主矩同时为零，即

$$\left.\begin{aligned} R' &= \sum_{i=1}^{n} F_i = 0 \\ M_O &= \sum_{i=1}^{n} m_O(F_i) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.11)$$

2. 空间一般力系的平衡方程

根据公式(3.5)、(3.6)、(3.8)、(3.9)，将公式(3.11)表示为解析式，得

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}F_{ix}=0,\quad \sum_{i=1}^{n}F_{iy}=0,\quad \sum_{i=1}^{n}F_{iz}=0\\&\sum_{i=1}^{n}m_x(F_i)=0,\quad \sum_{i=1}^{n}m_y(F_i)=0,\quad \sum_{i=1}^{n}m_z(F_i)=0\end{aligned}\right\}\tag{3.12}$$

于是可知，空间一般力系平衡的解析条件是：力系中所有各力在三个正交坐标轴上投影的代数和分别等于零，并且各力对于每一个坐标轴力矩的代数和也分别等于零。公式(3.12)称为空间一般力系的平衡方程。

3. 几种特殊空间力系的平衡方程

1) 空间汇交力系的平衡方程

将汇交力系的汇交点取为坐标原点，容易看出：

$\sum_{i=1}^{n} m_x(F_i)$、$\sum_{i=1}^{n} m_y(F_i)$和$\sum_{i=1}^{n} m_z(F_i)$ 都恒等于零。所以，空间汇交力系的平衡方程为

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0 \qquad (3.13)$$

空间汇交力系有三个独立的平衡方程，可以求解三个未知量。

2) 空间平行力系的平衡方程

由于平行力系各力的作用线相互平行，因此取坐标轴z平行各力，容易看出：$\sum_{i=1}^{n} F_{ix}$、$\sum_{i=1}^{n} F_{iy}$ 和 $\sum_{i=1}^{n} m_z(F_i)$ 都恒等于零。所以，空间平行力系的平衡方程为

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} m_x(F_i) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} m_y(F_i) = 0 \tag{3.14}$$

空间平行力系有三个独立的平衡方程，可以求解三个未知量。

4. 空间力系平衡方程的应用

【例3.1】 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}3$、$\boldsymbol{F}_4$各力在空间的位置如图3.2所示。已知四个力的大小相等，数值为10 kN。求各力在三个坐标轴上的投影。

解

$$\begin{cases} F_{1x} = F_{1y} = 0 \\ F_{1z} = F_1 = 10\ \text{kN} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{2x} = F_2 = 10\ \text{kN} \\ F_{2y} = F_{2z} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{3x} = -F_3 \sin 30^{\circ} = -5\ \text{kN} \\ F_{3y} = -F_3 \cos 30^{\circ} = 8.66\ \text{kN} \\ F_{3z} = 0 \end{cases}$$

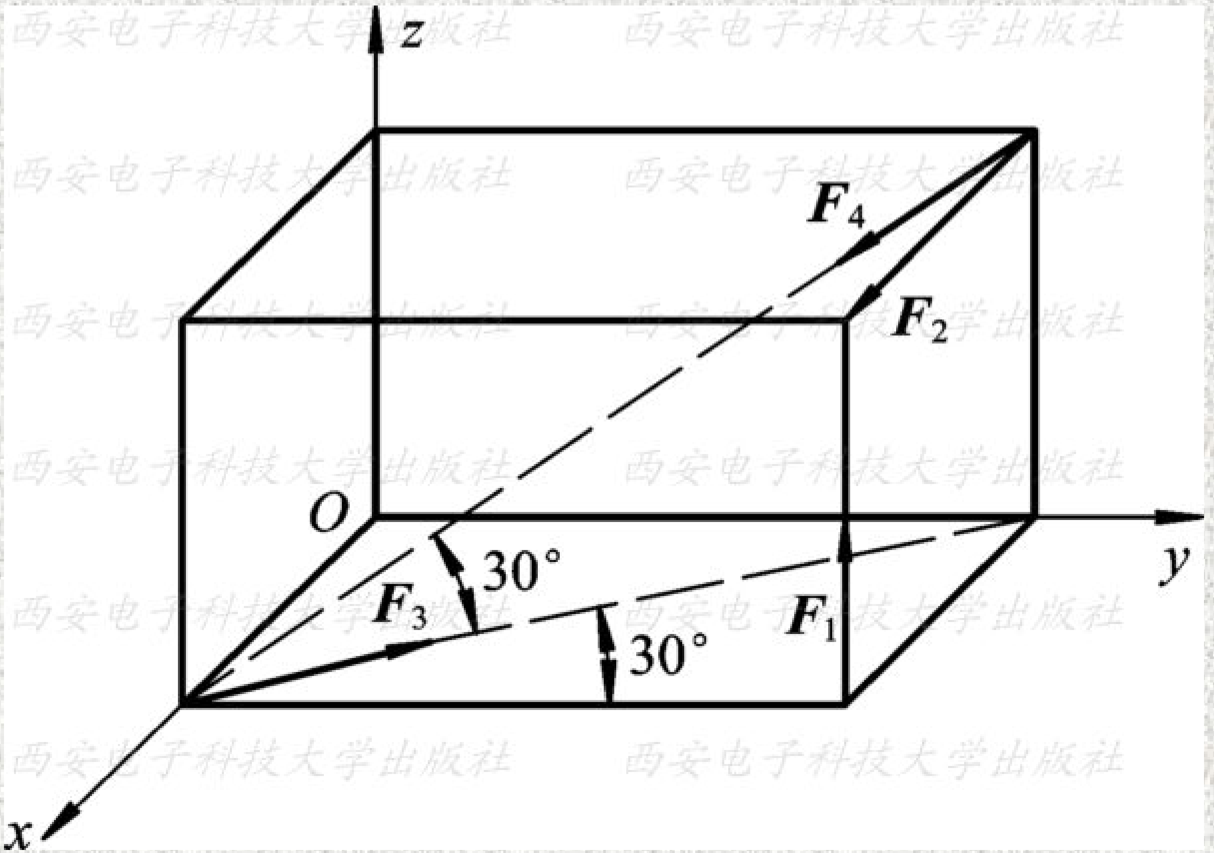

图3.2

由于 $\boldsymbol{F}_4$与 x 轴和 y 轴的夹角不容易确定，不宜直接按照公式$F_x=F\cos(\boldsymbol{F},x)$、$F_y=F\cos(\boldsymbol{F},y)$来求解。这时，可以先将力 $\boldsymbol{F}_4$ 投影到Oxy平面上，得到分力$\boldsymbol{F}_{4xy}$，然后将$\boldsymbol{F}_{4xy}$向 x 轴和 y 轴投影。这种求投影的方法称之为二次投影法。于是得到：

$$
\begin{cases}
F_{4x}=F_4\cos 30^{\mathrm{o}}\times\sin 30^{\mathrm{o}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 10=4.33\ \mathrm{kN} \\
F_{4y}=-F_4\cos 30^{\mathrm{o}}\times\cos 30^{\mathrm{o}}=\dfrac{3}{4}\times 10=-7.5\ \mathrm{kN} \\
F_{4z}=-F_4\sin 30^{\mathrm{o}}=-5\ \mathrm{kN}
\end{cases}
$$

【例3.2】 挂物架如图3.3所示，三根杆子用铰链连接于 O 点。平面 BOC 是水平面，且 $OB=OC$，平面 OAC 是铅垂面，其它角度如图所示。如果 O 点悬挂重物的重量为 $P=1\ \text{kN}$，不计三根杆子的重量，求三根杆子所受的力。

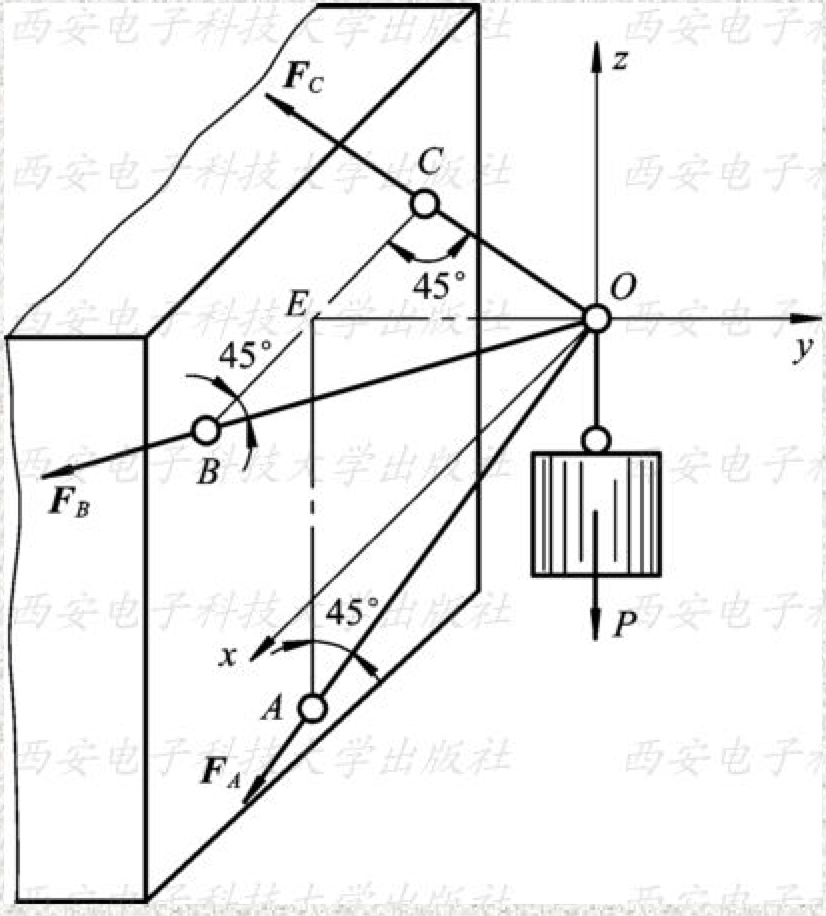

图3.3

解 (1) 研究对象：挂物架。

(2) 受力分析：因为不计杆子的重量，所以杆子都是二力杆，力系是一个空间汇交力系，可以写出三个独立的平衡方程。其受力图如图3.3所示。

(3) 列平衡方程：取坐标系$Oxyz$如图所示，Ox、Oy轴位于水平面BOC内，且Ox轴平行于BC，Oy轴垂直于BC，Oz轴铅垂向上。

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0: \quad F_B \cos 45^\circ - F_C \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0: \quad -F_B \sin 45^\circ - F_C \sin 45^\circ - F_A \sin 45^\circ = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0: \quad -F_A \cos 45^\circ - P = 0$$

联立求解上面三个方程，得F_A=－1.414 kN，负号表示$\boldsymbol{F}_A$的实际方向与图中所假设方向相反，即*OA*杆实际受压力作用。

F_B=F_C=0.707 kN，$\boldsymbol{F}_B$、$\boldsymbol{F}_C$的实际方向与图中所假设方向相同，即这两个杆实际受拉力作用。

【例3.3】 三轮小车$O_1O_2O_3$静止于水平面上， 如图3.4所示。已知 D 点是线段O_1O_2的中点，$EM \perp O_1O_2$。O_1O_2=1 m，O_3D=1.6 m，O_1E=0.4 m， EM=0.6 m。在三轮车上的 M 点放置一个重为 P=10 kN的货物。求地面作用于三轮车三个轮子O_1、O_2、O_3上的铅直反力。

解：(1) 研究对象：三轮车。

(2) 受力分析：三轮车共受到四个铅直方向的力作用，该力系是一个空间平行力系，

可以写出三个独立的平衡方程。其受力图如图3.4所示。

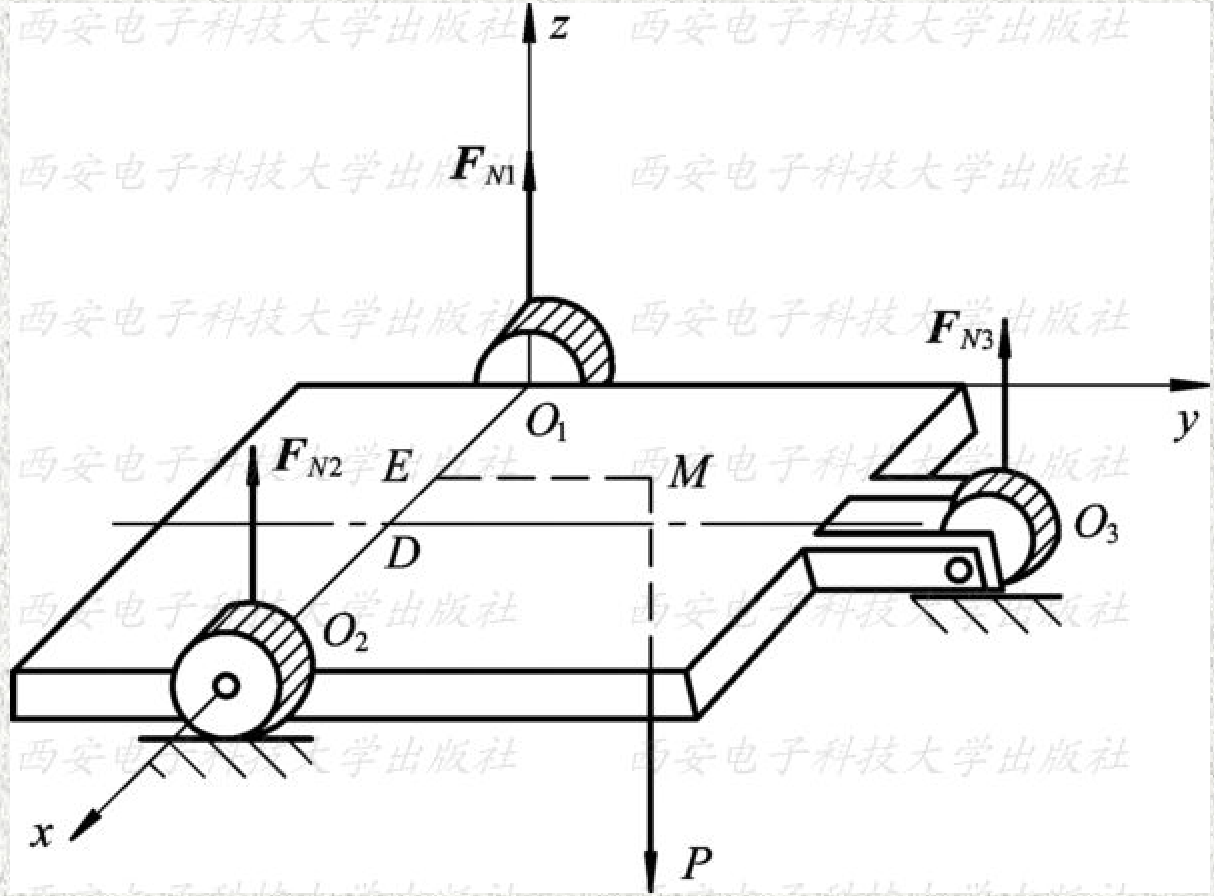

图3.4

(3) 列平衡方程：取坐标系 O_1xyz如图所示，O_1x、O_1y轴位于水平底板面$O_1O_2O_3$上，O_1z轴铅垂向上。

$$\sum_{i=1}^{n} m_x(F_i)=0 \quad F_{N3}\times\overline{O_3D}-P\times\overline{EM}=0$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_y(F_i)=0 \quad P\times\overline{O_1E}-F_{N2}\times\overline{O_1O_2}-F_{N3}\times\overline{O_1D}=0$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz}=0 \quad F_{N1}+F_{N2}+F_{N3}-P=0$$

联立求解上面三个方程，得

F_{N1}=4.12 kN，　F_{N2}=2.13 kN，　F_{N3}=3.75 kN