# 专题 向量综合

## ---等和线

引入：下列叙述：

①若 $f(x)=|x-1|+|x+a|$ 为区间 $[-3,b]$ 上的偶函数，则 $a+b=4$；

②若关于 $x$ 的方程 $x^2-(2k+1)x+k^2=0$ 有两个大于 1 的实数根，则 $k$ 的取值范围为 $(2,+\infty)$；

③已知函数 $f(x)=x|x|$，若对任意的 $x\in[t,t+2]$，不等式 $f(x+t)\geqslant 2f(x)$ 恒成立，则实数 $t$ 的取值范围是 $[\sqrt{2},+\infty)$；

④已知 $A$ 和 $B$ 是单位圆 $O$ 上的两点，$\angle AOB=\dfrac{2}{3}\pi$，点 $C$ 在劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上，若 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，其中 $x,y\in\mathbf{R}$，则 $x+y$ 的最大值是 2.

其中正确叙述的个数为

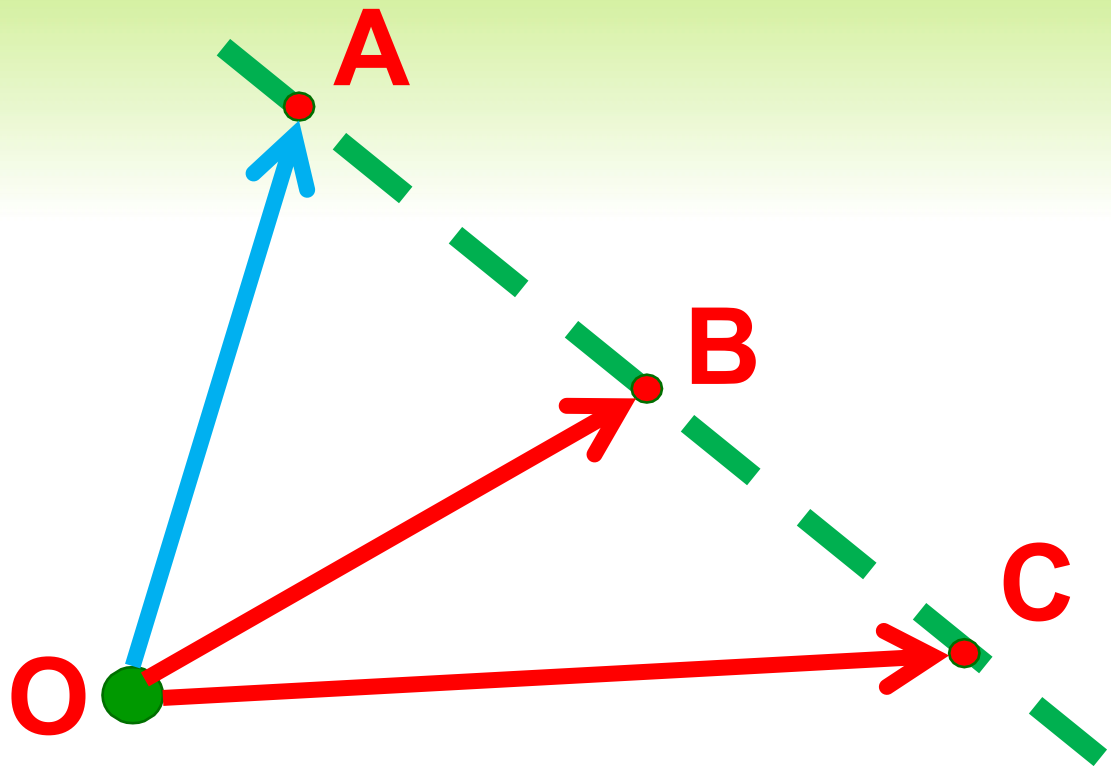
(A)1 个　　(B)2 个　　(C)3 个　　(D)4 个

答案：D

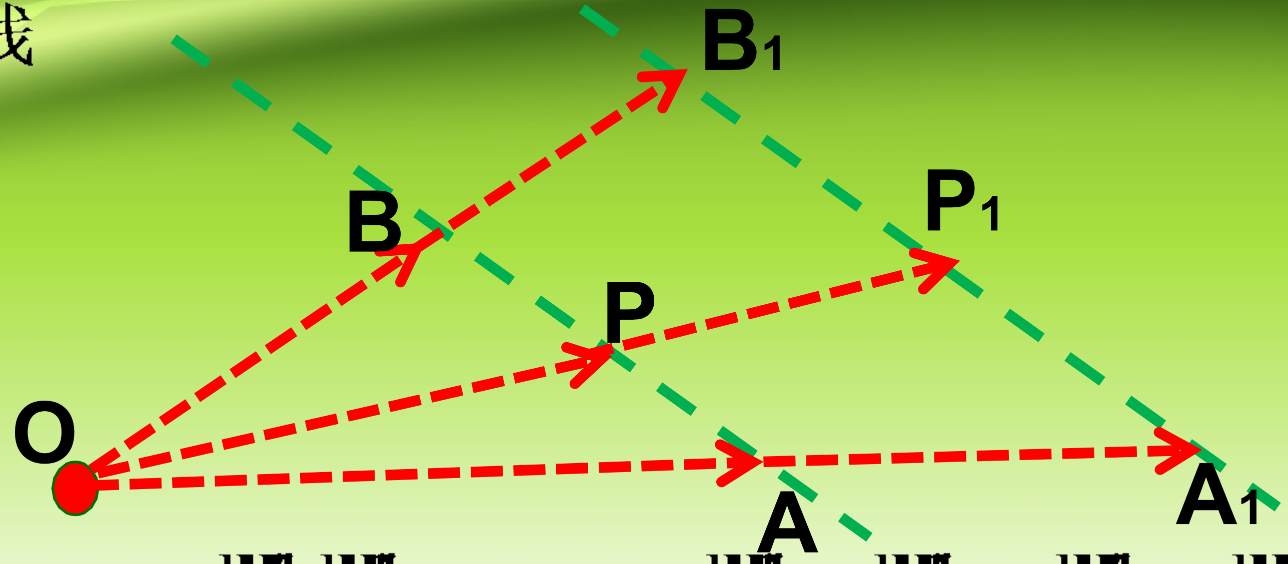
# 基础知识复习

## （一）平面向量共线定理

已知$\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{OC}$,若$\lambda+\mu=1$，则$A,B,C$三点共线反之亦然。



## （二）等和线




平面内一组基底$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$及任意向量$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(\lambda,\mu\in R)$,若点$P$在直线AB上，或者在平行于AB的直线上，则$\lambda+\mu=k$ 为定值，反之也成立，我们把直线AB以及与直线AB平行的直线称为等和线。

(1）当等和线恰为直线AB时，k=1.

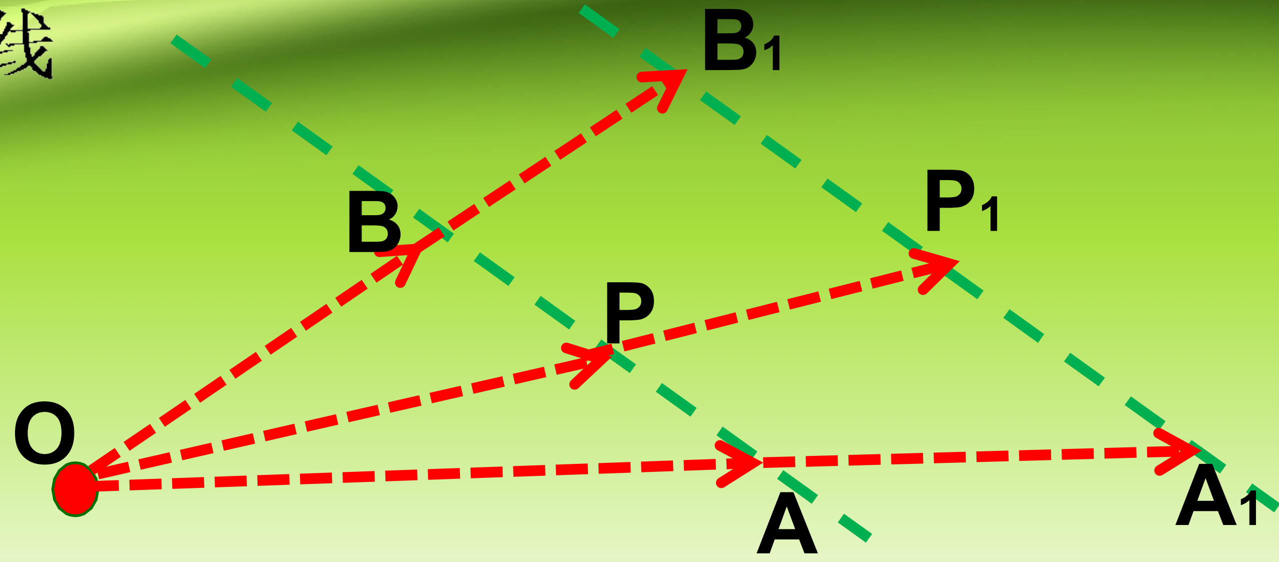
(2）当等和线在$O$点和直线AB之间时，$k\in(0,1)$

(3）当直线AB在$O$点和等和线之间时，$k\in(1,+\infty)$

(4）当等和线过$O$点时，k=0.

(5）当两等和线关于$O$点对称时，则定值k 互为相反数。

## （二）等和线




平面内一组基底$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$及任意向量$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(\lambda,\mu\in R)$

若点$P$在直线AB上，或者在平行于AB的直线上，则$\lambda+\mu=k$ 为定值，反之也成立，我们把直线AB以及与直线AB平行的直线称为等和线。

证明：$\Delta OAB$和$\Delta OA_1B_1$相似，即存在k，$\overrightarrow{OP_1}=k\,\overrightarrow{OP}\Rightarrow$

令：$\overrightarrow{OP_1}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}=k\,\overrightarrow{OP}=k\,(x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB})=kx\overrightarrow{OA}+ky\overrightarrow{OB}$

而A, P, B三点共线，x+y=1,而$\lambda=kx;\mu=ky\Rightarrow\lambda+\mu=k$

## （三）等差线

平面内一组基底$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$及任一向量$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(\lambda,\mu\in R)$，$C$为线段$AB$的中点，若点$P$在直线$OC$上或在平行于$OC$的直线上，则$\lambda-\mu=k$(定值)，反之也成立，我们把直线$OC$以及与直线$OC$平行的直线称为等差线。

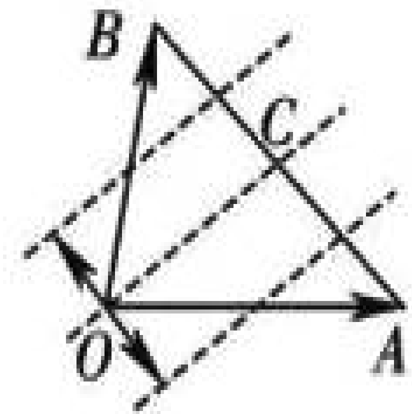
（1）当等差线恰为直线$OC$时，$k=0$；

（2）当等差线过$A$点时，$k=1$；

（3）当等差线在直线$OC$与点$A$之间时，$k\in(0,1)$；

（4）当等差线与$BA$延长线相交时，$k\in(1,+\infty)$；

（5）若两等差线关于直线$OC$对称，则两定值$k$互为相反数；



## （四）等积线

平面内一组基底$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$及任一向量$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(\lambda,\mu\in R)$，若点$P$在以直线$OA,OB$为渐近线的双曲线上，则$\lambda\mu$为定值$k$，反之也成立，我们把以直线$OA,OB$为渐近线的双曲线称为等积线

（1）当双曲线有一支在$\angle AOB$内时，$k>0$；

（2）当双曲线的两支都不在$\angle AOB$内时，$k<0$；

（3）特别的，若$\overrightarrow{OA}=(a,b),\overrightarrow{OB}=(a,-b)$，点$P$在双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$时，$k=\frac{1}{4}$；

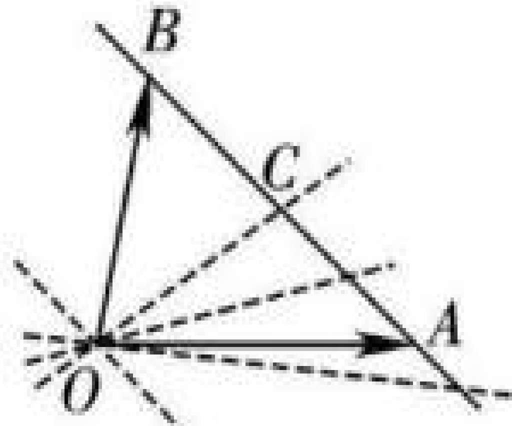
## （五）等商线

平面内一组基底$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$及任一向量$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(\lambda,\mu\in R)$，若点$P$在过$O$点（不与$OA$重合）的直线上，则$\dfrac{\lambda}{\mu}=k$(定值)，反之也成立。我们把过点$O$的直线（除$OA$外）称为等商线。

（1）当等商线过$AB$中点时，$k=1$；

（2）当等商线与线段$AC$（除端点）相交时，$k\in(1,+\infty)$；

（3）当等商线与线段$BC$（除端点）相交时，$k\in(0,1)$；




（4）当等商线即为$OB$时，$k=0$；

（5）当等商线与线段$BA$延长线相交时，$k\in(-\infty,-1)$；

（6）当等商线与线段$AB$延长线相交时，$k\in(-1,0)$；

（7）当等商线与直线$AB$平行时，$k=-1$；

## （六）等平方和线

平面内一组基底$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$及任一向量$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(\lambda,\mu\in R)$，且$\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|$，若点$P$在以$\angle AOB$角平分线为半长轴的椭圆上，则$\lambda^2+\mu^2$为定值$k$，反之也成立，我们把以以$\angle AOB$角平分线为半长轴的椭圆称为等平方和线。

特别的，若$\overrightarrow{OA}=(a,b),\overrightarrow{OB}=(a,-b)$，点$P$在双椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$时，$k=\dfrac{1}{2}$；

## 三、解题步骤

1、确定等值线为 1 的线；

2、平移（旋转或伸缩）该线，结合动点的可行域，分析何处取得最大值和最小值；

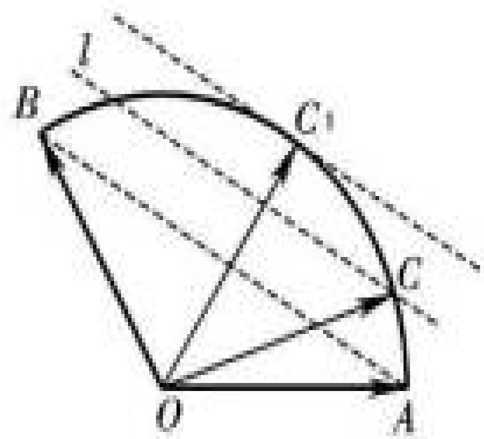
3、从长度比或者点的位置两个角度，计算最大值和最小值；

## 四、几点补充

1、平面向量共线定理的表达式中的三个向量的起点务必一致，若不一致，本着少数服从多数的原则，优先平移固定的向量；

2、若需要研究的是两系数的线性关系，则需要通过变换基底向量，使得需要研究的代数式为基底的系数和或差；

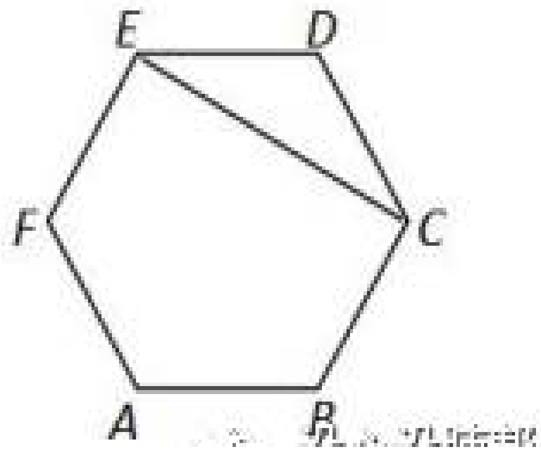
**例1** 两个长度为 1 的平面向量$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$，它们的夹角为 $120°$，如图所示，点 C 在以 O 为圆心的圆弧$\overset{\frown}{AB}$上变动.若$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，其中$x$，$y\in R$，则$x+y$的最大值是________.




**答案：2**

# 变式1：

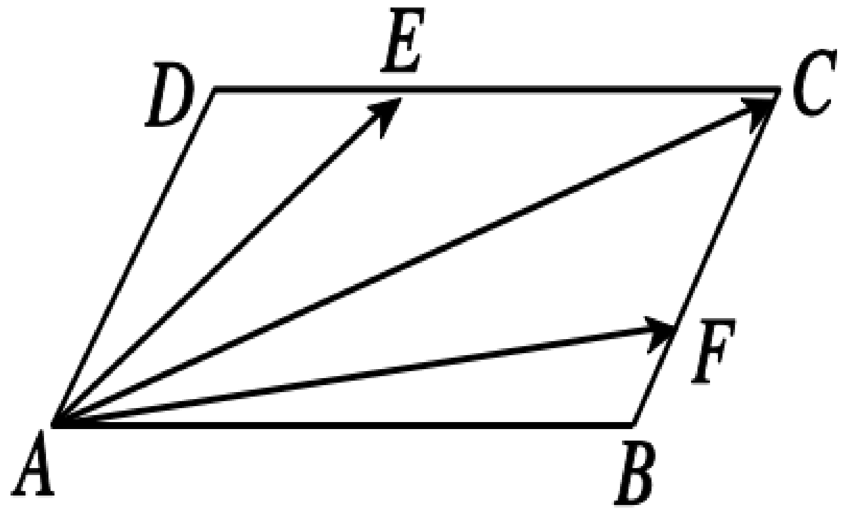
在正六边形 $ABCDEF$ 中，$P$ 是三角形 $CDE$ 内（包括边界）的动点，设 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AF}$，则 $x+y$ 的取值范围__________




**答案：[3,4]**

## 变式2：

如图所示，在平行四边形 $ABCD$ 中，$E$ 和 $F$ 分别在边 $CD$ 和 $BC$ 上，且 $\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BF}$，若 $\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AE}+n\overrightarrow{AF}$，其中 $m$，$n\in\mathbf{R}$，则 $m+n=$________________.




答案：$\dfrac{3}{2}$

**例2:** 已知$O$为$\Delta ABC$的外心，若$A(0,0),B(2,0),AC=1,\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$，且$\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则$\lambda+\mu=$______

答案：$\lambda=\frac{5}{6}$，$\mu=\frac{4}{3}$

答案：$\frac{13}{6}$

**变式1:** $O$为$\Delta ABC$的外心，若$\cos\angle BAC=\dfrac{1}{3}$, $\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$则$(\lambda+\mu)_{\max}=$______

答案：$\dfrac{3}{4}$

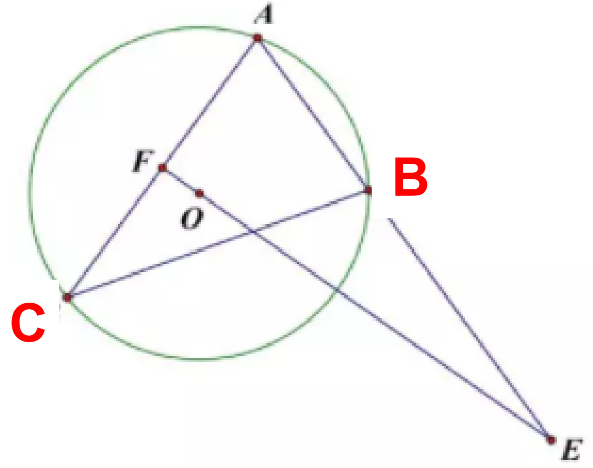
**变式2.** $\Delta ABC$ 的外心 $O$ 满足 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ ．若 $AB=6, AC=10$,且$2x+10y=5$,则$\cos\angle BAC=$________.

**解:**当$x=0$时,$y=\dfrac{1}{2}$.此时,由$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$

可得$\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

故$\Delta ABC$是以$AC$为斜边的直角三角形,

则$\cos\angle BAC=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{3}{5}$.




当$x\neq 0$时,由$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$得$\overrightarrow{AO}=\dfrac{2x}{5}(\dfrac{5}{2}\overrightarrow{AB})+2y(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC})$.

如图,设$\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AE}$,$\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AF}$,则$|\overrightarrow{AE}|=15$,$|\overrightarrow{AF}|=5$.

由$\overrightarrow{AO}=\frac{2x}{5}\overrightarrow{AE}+2y\overrightarrow{AF}$,及$\frac{2x}{5}+2y=1$知点$E,O,F$共线.

又由$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$知$F$为$AC$中点,故$OF\perp AC$.

所以,$\cos\angle BAC=\frac{AF}{AE}=\frac{1}{3}$.

综上可知,$\cos\angle BAC=\frac{3}{5}$,或$\cos\angle BAC=\frac{1}{3}$.