

重难点突破 02 原函数与导函数混合还原问题

目录

01 方法技巧与总结	2
02 题型归纳总结	3
题型一：利用 $x^n f(x)$ 构造型	3
题型二：利用 $\frac{f(x)}{x^n}$ 构造型	4
题型三：利用 $e^{nx} f(x)$ 构造型	7
题型四：用 $\frac{f(x)}{e^{nx}}$ 构造型	9
题型五：利用 $\sin x$ 、 $\tan x$ 与 $f(x)$ 构造型	11
题型六：利用 $\cos x$ 与 $f(x)$ 构造型	14
题型七：复杂型： e^n 与 $af(x) + bg(x)$ 等构造型	16
题型八：复杂型： $(kx + b)$ 与 $f(x)$ 型	18
题型九：复杂型：与 $\ln(kx + b)$ 结合型	20
题型十：复杂型：基础型添加因式型	22
题型十一：复杂型：二次构造	24
题型十二：综合构造	26
题型十三：找出原函数	29
03 过关测试	33

01

// 方法技巧与总结 //

- 1、对于 $xf'(x) + f(x) > 0$ (< 0)，构造 $g(x) = x \cdot f(x)$ ，
- 2、对于 $xf'(x) + kf(x) > 0$ (< 0)，构造 $g(x) = x^k \cdot f(x)$
- 3、对于 $x \cdot f'(x) - f(x) > 0$ (< 0)，构造 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ，
- 4、对于 $x \cdot f'(x) - kf(x) > 0$ (< 0)，构造 $g(x) = \frac{f(x)}{x^k}$
- 5、对于 $f'(x) + f(x) > 0$ (< 0)，构造 $g(x) = e^x \cdot f(x)$ ，
- 6、对于 $f'(x) + kf(x) > 0$ (< 0)，构造 $g(x) = e^{kx} \cdot f(x)$
- 7、对于 $f'(x) - f(x) > 0$ (< 0)，构造 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ ，
- 8、对于 $f'(x) - kf(x) > 0$ (< 0)，构造 $g(x) = \frac{f(x)}{e^{bx}}$
- 9、对于 $\sin x \cdot f'(x) + \cos x \cdot f(x) > 0$ (< 0)，构造 $g(x) = f(x) \cdot \sin x$ ，
- 10、对于 $\sin x \cdot f'(x) - \cos x \cdot f(x) > 0$ (< 0)，构造 $g(x) = \frac{f(x)}{\sin x}$
- 11、对于 $\cos x \cdot f'(x) - \sin x \cdot f(x) > 0$ (< 0)，构造 $g(x) = f(x) \cdot \cos x$ ，
- 12、对于 $\cos x \cdot f'(x) + \sin x \cdot f(x) > 0$ (< 0)，构造 $g(x) = \frac{f(x)}{\cos x}$
- 13、对于 $f'(x) - f(x) > k$ (< 0)，构造 $g(x) = e^x [f(x) - k]$
- 14、对于 $f'(x) \ln x + \frac{f(x)}{x} > 0$ (< 0)，构造 $g(x) = \ln x \cdot f(x)$
- 15、 $f'(x) + c = [f(x) + cx]'$ ； $f'(x) + g'(x) = [f(x) + g(x)]'$ ； $f'(x) - g'(x) = [f(x) - g(x)]'$ ；
- 16、 $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = [f(x)g(x)]'$ ； $\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'$ 。

02 // 题型归纳与总结 //

题型一：利用 $x^n f(x)$ 构造型

【典例 1-1】函数 $f(x)$ 是定义在区间 $(0, +\infty)$ 上的可导函数，其导函数为 $f'(x)$ ，且满足 $f'(x) + \frac{2}{x}f(x) > 0$ ，则不等式 $\frac{(x+2023)f(x+2023)}{2} < \frac{2f(2)}{x+2023}$ 的解集为 ()

- A. $\{x | x > -2021\}$ B. $\{x | x < -2021\}$
C. $\{x | -2023 < x < 0\}$ D. $\{x | -2023 < x < -2021\}$

【答案】D

【解析】根据题意， $g(x) = x^2 f(x), x > 0$ ，则导函数 $g'(x) = x^2 f'(x) + 2xf(x)$ ，

函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上，满足 $f'(x) + \frac{2}{x}f(x) > 0$ ，则有 $x^2 f'(x) + 2xf(x) > 0$ ，

所以 $g'(x) > 0$ ，即函数 $g(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数，

$$\frac{(x+2023)f(x+2023)}{2} < \frac{2f(2)}{x+2023} \Rightarrow (x+2023)^2 f(x+2023) < 2^2 f(2),$$

所以 $g(x+2023) < g(2)$ ，

则有 $0 < x+2023 < 2$ ，

解得 $-2023 < x < -2021$ ，

即此不等式的解集为 $\{x | -2023 < x < -2021\}$ 。

故选：D

【典例 1-2】(2024·全国·模拟预测) 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数是 $f'(x)$ ， $3f(x) + xf'(x) < 0$ ，函数 $y = f(x+1) + 2022$ 为奇函数，则不等式 $x^3 f(x) + 2022 > 0$ 的解集为 ()

- A. $(-\infty, 1)$ B. $(-\infty, -1)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(-1, +\infty)$

【答案】A

【解析】由题意知 $3f(x) + xf'(x) < 0$ ，

设 $g(x) = x^3 f(x) + 2022$ ，则 $g'(x) = 3x^2 f(x) + x^3 f'(x) = x^2 [3f(x) + xf'(x)] \leq 0$ ，

仅当 $x=0$ 时，等号成立，所以 $g(x)$ 单调递减。

又因为函数 $y = f(x+1) + 2022$ 为奇函数，所以 $f(1) + 2022 = 0$ ，即 $g(1) = 0$ ，

故由 $g(x) > g(1)$ 可得 $x < 1$ ，

所以不等式 $x^3 f(x) + 2022 > 0$ 的解集为 $(-\infty, 1)$ ，

故选：A

【变式 1-1】设函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, 0)$ 上的可导函数，其导函数为 $f'(x)$ ，且有 $2f(x) + xf'(x) > 0$ ，则不等式 $(x+2023)^2 f(x+2023) - 4f(-2) < 0$ 的解集为 ()

- A. $(-2023, -2021)$ B. $(-2025, 0)$
C. $(-2025, -2021)$ D. $(-2025, -2023)$

【答案】D

【解析】由 $2f(x) + xf'(x) > 0, (x < 0)$ ，得 $2xf'(x) + x^2 f'(x) < 0$ ，即 $[x^2 f(x)]' < 0$ ，

令 $g(x) = x^2 f(x)$ ，则当 $x < 0$ 时，得 $g'(x) < 0$ ，即 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数，

$\therefore g(x+2023) = (x+2023)^2 f(x+2023)$ ， $g(-2) = 4f(-2)$ ，

即不等式等价于 $g(x+2023) - g(-2) < 0$ ，

$\therefore g(x+2023) < g(-2)$ ，得 $x+2023 > -2$ ，即 $x > -2025$ ，

又 $x+2023 < 0$ ，解得 $x < -2023$ ，故 $-2025 < x < -2023$ 。

故选：D.

【变式 1-2】(2024·江西南昌·三模) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，且 $f(2) = -1$ ，对任意 $x \in \mathbf{R}$ ， $f(x) + xf'(x) < 0$ ，则不等式 $(x+1)f(x+1) > -2$ 的解集是 ()

- A. $(-\infty, 1)$ B. $(-\infty, 2)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(2, +\infty)$

【答案】A

【解析】设 $g(x) = xf'(x)$ ，则 $g(2) = 2f(2) = -2$ ，

Q 对任意 $x \in \mathbf{R}$ ， $f(x) + xf'(x) < 0$ ， $\therefore g'(x) = f(x) + xf'(x) < 0$ 恒成立，即 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，

由 $(x+1)f(x+1) > -2$ 可得 $g(x+1) > g(2)$ ， $\therefore x+1 < 2$ ，解得 $x < 1$ ，即解集为 $(-\infty, 1)$ 。

故选：A

题型二：利用 $\frac{f(x)}{x^n}$ 构造型

【典例 2-1】已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0)$ ， $f(-1) = -1$ ，其导函数 $f'(x)$ 满足 $xf'(x) - 2f(x) > 0$ ，则不等式 $f(x+2025) + (x+2025)^2 < 0$ 的解集为 ()

- A. $(-2026, 0)$ B. $(-2026, -2025)$
C. $(-\infty, -2026)$ D. $(-\infty, -2025)$

【答案】B

【解析】根据题意可令 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2} (x < 0) \Rightarrow g'(x) = \frac{xf'(x) - 2f(x)}{x^3} < 0$,

所以 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减,

则原不等式等价于 $\frac{f(x+2025)}{(x+2025)^2} < -1$,

由 $g(x+2025) = \frac{f(x+2025)}{(x+2025)^2} < -1 = g(-1) \Rightarrow 0 > x+2025 > -1$,

解之得 $x \in (-2026, -2025)$.

故选: B

【典例 2-2】已知函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 的奇函数, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $xf'(x) < f(x)$, 则不等式 $5f(2-x) + (x-2)f(5) < 0$ 的解集为 ()

A. $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

B. $(-3, 0) \cup (0, 3)$

C. $(-3, 0) \cup (0, 7)$

D. $(-\infty, -3) \cup (2, 7)$

【答案】D

【解析】令 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$,

Q 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $xf'(x) < f(x)$,

$\therefore$ 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} < 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

又 $f(x)$ 为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 的奇函数,

$\therefore g(-x) = \frac{f(-x)}{-x} = \frac{-f(x)}{-x} = \frac{f(x)}{x} = g(x)$, 即 $g(x)$ 为偶函数,

$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增;

又由不等式 $5f(2-x) + (x-2)f(5) < 0$ 得 $5f(2-x) < (2-x)f(5)$,

当 $2-x > 0$, 即 $x < 2$ 时, 不等式可化为 $\frac{f(2-x)}{2-x} < \frac{f(5)}{5}$, 即 $g(2-x) < g(5)$,

由 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减得 $2-x > 5$, 解得 $x < -3$, 故 $x < -3$;

当 $2-x < 0$, 即 $x > 2$ 时, 不等式可化为 $\frac{f(2-x)}{2-x} > \frac{f(5)}{5}$, 即 $g(2-x) > g(5) = g(-5)$,

由 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增得 $2-x > -5$, 解得 $x < 7$, 故 $2 < x < 7$;

综上所述, 不等式 $5f(2-x) + (x-2)f(5) < 0$ 的解集为: $(-\infty, -3) \cup (2, 7)$.

故选：D.

【变式 2-1】(多选题) 已知函数 $f(x)$ 为定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的奇函数，若当 $x < 0$ 时， $xf'(x) - f(x) < 0$ ，且 $f(1) = 0$ ，则 ()

A. $2f(e) > ef(2)$

B. 当 $m < 2$ 时， $f(m) > mf(1)$

C. $3f(-\pi) + \pi f(3) < 0$

D. 不等式 $f(x) > 0$ 解集为 $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

【答案】ACD

【解析】构造函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ，其中 $x \neq 0$ ，

因为函数 $f(x)$ 为定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的奇函数，则 $f(-x) = -f(x)$ ，

所以 $g(-x) = \frac{f(-x)}{-x} = \frac{f(x)}{x} = g(x)$ ，故函数 $g(x)$ 为偶函数，

当 $x < 0$ 时， $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} < 0$ ，

所以函数 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

因为 $f(1) = 0$ ，则 $g(1) = \frac{f(1)}{1} = 0$ ，则 $g(-1) = g(1) = 0$ 。

因为 $e > 2$ ，所以 $g(e) > g(2)$ ，即 $\frac{f(e)}{e} > \frac{f(2)}{2}$ ， $2f(e) > ef(2)$ ，故 A 正确；

不妨取 $m = 1$ ，则 $f(1) = 0$ ， $mf(1) = 0$ ，B 错误；

因为偶函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，则 $g(-\pi) = g(\pi) > g(3)$ ，

即 $\frac{f(-\pi)}{-\pi} > \frac{f(3)}{3}$ ，整理可得 $3f(-\pi) + \pi f(3) < 0$ ，C 正确；

当 $x < 0$ 时，由 $f(x) > 0$ 可得 $g(x) = \frac{f(x)}{x} < 0 = g(-1)$ ，解得 $-1 < x < 0$ ，

当 $x > 0$ 时，由 $f(x) > 0$ 可得 $g(x) = \frac{f(x)}{x} > 0 = g(1)$ ，解得 $x > 1$ 。

综上所述，不等式 $f(x) > 0$ 解集为 $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ ，D 正确。

故选：ACD.

【变式 2-2】已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足： $xf'(x) - f(x) > 0$ ，且 $f(1) = 2$ ，则 $f(e^x) > 2e^x$ 的解集为 ()

A. $(0, +\infty)$

B. $(\ln 2, +\infty)$

C. $(1, +\infty)$

D. $(0, 1)$

【答案】A

【解析】设 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ， $x > 0$ ，

因为 $xf'(x) - f(x) > 0$,

所以 $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

因为 $f(1) = 2$,

所以 $g(1) = \frac{f(1)}{1} = 2$,

由 $f(e^x) > 2e^x$, 且 $e^x > 0$ 得 $\frac{f(e^x)}{e^x} > 2$,

则 $g(e^x) = \frac{f(e^x)}{e^x} > 2 = g(1)$,

所以 $e^x > 1 = e^0$, 又 $y = e^x$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

所以 $x \in (0, +\infty)$,

故选: A.

题型三: 利用 $e^{nx}f(x)$ 构造型

【典例 3-1】设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f'(x)$ 是其导函数, 若 $f(x) + f'(x) > 0$, $f(1) = 1$, 则不等式 $f(x) > e^{1-x}$ 的解集是 ()

A. $(0, +\infty)$

B. $(1, +\infty)$

C. $(-\infty, 0)$

D. $(0, 1)$

【答案】B

【解析】构造函数 $g(x) = f(x) \cdot e^x$, 则 $g'(x) = [f'(x) + f(x)] \cdot e^x > 0$,

故 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, $g(1) = e$,

$f(x) > e^{1-x}$ 可化为 $g(x) > e = g(1)$,

故原不等式的解集为 $(1, +\infty)$,

故选: B

【典例 3-2】已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $h(x)$ 满足 $2h(x) + h'(x) > 0$ 且 $h(1) = \frac{1}{e^2}$, 则不等式 $h(x) > \frac{1}{e^{2x}}$ 的解集为 () .

A. $(-\infty, e^2)$

B. $(e^2, +\infty)$

C. $(-\infty, 1)$

D. $(1, +\infty)$

【答案】D

【解析】构造函数 $H(x) = h(x) \cdot e^{2x}$,

则 $H'(x) = h'(x) \cdot e^{2x} + 2h(x) \cdot e^{2x} = e^{2x} [h'(x) + 2h(x)]$,

因为定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $h(x)$ 满足 $2h(x) + h'(x) > 0$, 所以 $H'(x) > 0$,

所以 $H(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 且 $H(1) = h(1)e^2 = 1$,

所以不等式 $h(x) > \frac{1}{e^{2x}}$ 可化为 $h(x) \cdot e^{2x} > 1$, 即 $H(x) > H(1)$, 所以 $x > 1$,

即不等式 $h(x) > \frac{1}{e^{2x}}$ 的解集为 $(1, +\infty)$.

故选: D.

【变式 3-1】(2024 · 云南楚雄 · 一模) 已知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 均有

$f(x) + \frac{f'(x)}{\ln 3} > 0$ 成立. 若 $f(-1) = -1$, 则不等式 $f(x) < 3^{1-x}$ 的解集为 ()

- A. $(-\infty, -1)$ B. $(-\infty, 1)$ C. $(-1, +\infty)$ D. $(1, +\infty)$

【答案】B

【解析】由 $f(x) + \frac{f'(x)}{\ln 3} > 0$ 得 $f'(x) + f(x)\ln 3 > 0$.

令 $g(x) = 3^x f(x)$, 则 $g'(x) = 3^x (\ln 3 \cdot f(x) + f'(x)) > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

又 $f(-1) = -1$, $f(x)$ 为奇函数,

所以 $f(1) = 1$, $g(1) = 3f(1) = 3$,

则 $f(x) < 3^{1-x} \Leftrightarrow 3^x f(x) < 3 \Leftrightarrow g(x) < g(1) \Leftrightarrow x < 1$.

故选: B.

【变式 3-2】已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的可导函数 $f(x)$, 其导函数为 $f'(x)$, 若 $2f(x) + f'(x) > 0$, 且 $f(1) = e$, 则

不等式 $e^{2x} f(x) - e^3 > 0$ 的解集为 ()

- A. $(1, +\infty)$ B. $(e, +\infty)$ C. $(-\infty, 1)$ D. $(-\infty, e)$

【答案】A

【解析】构造函数 $g(x) = e^{2x} f(x)$, 该函数的定义域为 $\mathbf{R}$,

则 $g'(x) = 2e^{2x} f(x) + e^{2x} f'(x) = e^{2x} [2f(x) + f'(x)] > 0$,

所以, 函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数, 且 $g(1) = e^2 f(1) = e^3$,

由 $e^{2x} f(x) - e^3 > 0$ 可得 $e^{2x} f(x) > e^3$, 即 $g(x) > g(1)$, 解得 $x > 1$.

所以, 不等式 $e^{2x} f(x) - e^3 > 0$ 的解集为 $(1, +\infty)$.

故选: A.

题型四：用 $\frac{f(x)}{e^{nx}}$ 构造型

【典例 4-1】(2024 · 广东广州 · 三模) 已知可导函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ，若对任意的 $x \in \mathbf{R}$ ，都有 $f(x) > f'(x) + 1$ ，且 $f(x) - 2024$ 为奇函数，则不等式 $f(x) - 2023e^x < 1$ 的解集为 ()

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(-\infty, e)$ C. $(e, +\infty)$ D. $(0, +\infty)$

【答案】D

【解析】设 $g(x) = \frac{f(x)-1}{e^x}$ ，由题设条件，得 $g'(x) = \frac{f'(x) \cdot e^x - [f(x)-1]e^x}{(e^x)^2} = \frac{f'(x) - f(x) + 1}{e^x} < 0$ ，

故函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

由 $f(x) - 2024$ 为奇函数，得 $f(0) - 2024 = 0$ ，得 $f(0) = 2024$ ，

所以 $g(0) = f(0) - 1 = 2023$ ，

不等式 $f(x) - 2023e^x < 1$ 等价于 $\frac{f(x)-1}{e^x} < 2023$ ，即 $g(x) < g(0)$ ，

又函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，所以 $x > 0$ ，

故不等式 $f(x) - 2023e^x < 1$ 的解集是 $(0, +\infty)$.

故选：D.

【典例 4-2】(2024 · 辽宁鞍山 · 二模) 已知定义在 $(-2, 2)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + e^{4x}f(-x) = 0$ ，且 $f(1) = e^2$ ， $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，当 $x \in [0, 2)$ 时， $f'(x) > 2f(x)$ ，则不等式 $e^{2x}f(2-x) < e^4$ 的解集为 ()

- A. $(1, +\infty)$ B. $(1, 2)$ C. $(0, 1)$ D. $(1, 4)$

【答案】D

【解析】设 $g(x) = \frac{f(x)}{e^{2x}}$ ， $2 < x < 2$ ，

$$g(x) + g(-x) = \frac{f(x)}{e^{2x}} + \frac{f(-x)}{e^{-2x}} = \frac{1}{e^{2x}} [f(x) + e^{4x}f(-x)] = 0,$$

所以 $g(x)$ 是奇函数.

当 $x \in [0, 2)$ 时， $f'(x) > 2f(x)$ ，

$$\text{则 } g'(x) = \frac{f'(x) \cdot e^{2x} - f(x) \cdot 2e^{2x}}{e^{4x}} = \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}} > 0,$$

所以 $g(x)$ 在 $[0, 2)$ 上单调递增，则 $g(x)$ 在 $(-2, 2)$ 上单调递增，

$$\text{不等式 } e^{2x}f(2-x) < e^4 \text{ 即 } \frac{f(2-x)}{e^{4-2x}} < 1 = \frac{f(1)}{e^2},$$

由 $f(x) > xe^x$ 可得 $\frac{f(x)}{e^x} - x > 0$, 即 $g(x) > g(1)$, 解得 $x < 1$,

所以不等式 $f(x) > xe^x$ 的解集是 $(-\infty, 1)$.

故选: A.

【变式 4-3】(2024 · 高三 · 山东菏泽 · 期中) 已知函数 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数, $f(1) = \frac{1}{e}$, 对任意实

数 x 都有 $f(x) - f'(x) > 0$, 设 $F(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 则不等式 $F(x) < \frac{1}{e^2}$ 的解集为 ()

A. $(-\infty, 1)$

B. $(1, +\infty)$

C. $(1, e)$

D. $(e, +\infty)$

【答案】B

【解析】由 $F(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 得 $F'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$,

因为 $f(x) - f'(x) > 0$, 则 $F'(x) < 0$, 可知 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 且 $F(1) = \frac{f(1)}{e} = \frac{1}{e^2}$,

由不等式 $F(x) < \frac{1}{e^2}$ 可得 $F(x) < F(1)$, 解得 $x > 1$,

所以不等式 $F(x) < \frac{1}{e^2}$ 的解集为 $(1, +\infty)$.

故选: B

题型五: 利用 $\sin x$ 、 $\tan x$ 与 $f(x)$ 构造型

【典例 5-1】(2024 · 贵州遵义 · 模拟预测) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 其导函数为 $f'(x)$, 若

$\frac{f(-x) - f(x)}{2} = \sin \frac{x}{2}$, 且当 $x \leq 0$ 时, $2f'(x) + \cos \frac{x}{2} > 0$, 则 $f(2x + \pi) + 1 > f(x) + \sin \frac{x}{2} \left(2 \sin \frac{x}{2} + 1 \right)$ 的解集为 ()

A. $\left(-\pi, \frac{\pi}{3} \right)$

B. $(-\infty, -\pi) \cup \left(\frac{\pi}{3}, +\infty \right)$

C. $\left(-\pi, -\frac{\pi}{3} \right)$

D. $(-\infty, -\pi) \cup \left(-\frac{\pi}{3}, +\infty \right)$

【答案】C

【解析】由已知可推得, $f(x) - f(-x) = -2 \sin \frac{x}{2}$.

令 $g(x) = f(x) + \sin \frac{x}{2}$, 则 $g(-x) = f(-x) + \sin \frac{-x}{2} = f(-x) - \sin \frac{x}{2}$,

所以 $g(x) - g(-x) = f(x) + \sin \frac{x}{2} - f(-x) + \sin \frac{x}{2} = f(x) - f(-x) + 2 \sin \frac{x}{2} = 0$,

所以, $g(x)$ 为偶函数.

又 $g'(x) = f'(x) + \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \left(2f'(x) + \cos \frac{x}{2} \right)$,

因为当 $x \leq 0$ 时, $2f'(x) + \cos \frac{x}{2} > 0$,

所以, $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递增.

又 $g(x)$ 为偶函数, 所以 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减.

由 $f(2x + \pi) + 1 > f(x) + \sin \frac{x}{2} \left(2 \sin \frac{x}{2} + 1 \right)$ 可得,

$f(2x + \pi) + 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} > f(x) + \sin \frac{x}{2}$.

因为 $g(2x + \pi) = f(2x + \pi) + \sin \frac{2x + \pi}{2} = f(2x + \pi) + \cos x = f(2x + \pi) + 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$,

所以, $g(2x + \pi) > g(x)$.

因为 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, $g(x)$ 为偶函数,

所以有 $|2x + \pi| < |x|$,

平方整理可得, $3x^2 + 4\pi x + \pi^2 < 0$,

解得 $-\pi < x < -\frac{\pi}{3}$.

故选: C.

【典例 5-2】 (2024 · 高三 · 黑龙江齐齐哈尔 · 期末) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, \pi)$, 其导函数是 $f'(x)$.

若对任意的 $x \in (0, \pi)$ 有 $f'(x) \sin x - f(x) \cos x < 0$, 则关于 x 的不等式 $f(x) > 2f(\frac{\pi}{6}) \sin x$ 的解集为 ()

A. $(0, \frac{\pi}{3})$

B. $(0, \frac{\pi}{6})$

C. $(\frac{\pi}{3}, \pi)$

D. $(\frac{\pi}{6}, \pi)$

【答案】 B

【解析】 令函数 $g(x) = \frac{f(x)}{\sin x}$, $x \in (0, \pi)$, 求导得 $g'(x) = \frac{f'(x) \sin x - f(x) \cos x}{\sin^2 x} < 0$,

因此函数 $g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递减, 不等式 $f(x) > 2f(\frac{\pi}{6}) \sin x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\sin x} > \frac{f(\frac{\pi}{6})}{\sin \frac{\pi}{6}}$,

即 $g(x) > g(\frac{\pi}{6})$, 解得 $0 < x < \frac{\pi}{6}$,

所以原不等式的解集为 $(0, \frac{\pi}{6})$.

故选: B

【变式 5-1】已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$, 满足 $f(x) = f(-x) - 2\sin x$, 且任意 $0 \leq x_1 < x_2$ 时, 有

$\frac{f(x_1) + \sin x_1 - f(x_2) - \sin x_2}{x_1 - x_2} > 0$ 成立, 则不等式 $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) > f(x) + \sin x - \cos x$ 的解集为 ()

- A. $\left(-\infty, \frac{\pi}{2}\right)$ B. $\left(\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$ C. $\left(-\infty, \frac{\pi}{4}\right)$ D. $\left(-\frac{\pi}{4}, +\infty\right)$

【答案】D

【解析】设 $g(x) = f(x) + \sin x$, 则 $g(-x) = f(-x) + \sin(-x)$.

由 $f(x) = f(-x) - 2\sin x$, 得 $f(x) + \sin x = f(-x) + \sin(-x)$, 所以 $g(x)$ 为偶函数.

因为当 $x \geq 0$ 时, 有任意 $0 \leq x_1 < x_2$ 时, 有 $\frac{f(x_1) + \sin x_1 - f(x_2) - \sin x_2}{x_1 - x_2} > 0$ 成立,

所以 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

又 $g(x)$ 为偶函数, 所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减,

因为 $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos x = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) > f(x) + \sin x$, 即 $g\left(x + \frac{\pi}{2}\right) > g(x)$,

所以 $\left|x + \frac{\pi}{2}\right| > |x|$, 解得 $x > -\frac{\pi}{4}$.

故选: D.

【变式 5-2】已知函数 $f(x) = f(-x) + 2\sin 2x$, 又当 $x \geq 0$ 时, $f'(x) \geq 2$, 则关于 x 的不等式

$f(x) \geq f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的解集为 ().

- A. $\left[\frac{\pi}{8}, +\infty\right)$ B. $\left[-\frac{\pi}{8}, +\infty\right)$
C. $\left[\frac{\pi}{4}, +\infty\right)$ D. $\left[-\frac{\pi}{4}, +\infty\right)$

【答案】A

【解析】由 $f(x) = f(-x) + 2\sin 2x$,

$f(x) - \sin 2x = f(-x) - \sin(-2x)$,

设 $g(x) = f(x) - \sin 2x$

所以 $g(x) = g(-x)$, 即 $g(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的偶函数

当 $x \geq 0$ 时, $g'(x) = f'(x) - 2\cos 2x$,

因为 $f'(x) \geq 2$, 所以 $g'(x) \geq 0$

则 $g(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增

$$\text{所以 } f(x) \geq f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{即 } f(x) \geq f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin 2x - \cos 2x$$

$$\text{即 } f(x) - \sin 2x \geq f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin 2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$\text{等价于 } g(x) \geq g\left(\frac{\pi}{4} - x\right),$$

$$\text{即 } |x| \geq \left|\frac{\pi}{4} - x\right|$$

$$\text{解得 } x \geq \frac{\pi}{8}.$$

故选: A.

题型六: 利用 $\cos x$ 与 $f(x)$ 构造型

【典例 6-1】(2024 · 安徽淮南 · 二模) 定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) + f(x) + 2\cos x = 0$, 当 $x \geq 0$ 时, $f'(x) > \sin x$, 则不等式 $f(x) + 2\cos x > f(\pi - x)$ 的解集为 ()

- A. $\left(\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$ B. $\left(-\infty, \frac{\pi}{2}\right)$ C. $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ D. $(-\infty, \pi)$

【答案】A

【解析】 $\because f(-x) + f(x) + 2\cos x = 0$,

$$\therefore f(-x) = -f(x) - 2\cos x,$$

$$\text{令 } g(x) = f(x) + \cos x, \text{ 则 } g(-x) = f(-x) + \cos(-x) = -f(x) - 2\cos x + \cos x = -f(x) - \cos x = -g(x),$$

$\therefore g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上为奇函数,

又 $\because$ 当 $x \geq 0$ 时, $f'(x) > \sin x$,

$$\therefore \text{当 } x \geq 0 \text{ 时, } g'(x) = f'(x) - \sin x > 0,$$

$\therefore g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

又 $\because g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上为奇函数,

$\therefore g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增,

$$\text{又 } \because f(x) + 2\cos x > f(\pi - x),$$

$$\therefore f(x) + \cos x > f(\pi - x) - \cos x,$$

$$\text{又 } \because f(\pi - x) - \cos x = f(\pi - x) + \cos(\pi - x),$$

$$\therefore g(x) > g(\pi - x),$$

$\therefore g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增,

$\therefore x > \pi - x$ ，解得： $x > \frac{\pi}{2}$ 。

故选：A。

【典例 6-2】偶函数 $f(x)$ 定义域为 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ，其导函数为 $f'(x)$ ，若对 $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，有

$f'(x)\cos x < f(x)\sin x$ 成立，则关于 x 的不等式 $2f(x) < \frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos x}$ 的解集为_____。

【答案】 $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$

【解析】令 $F(x) = \cos x \cdot f(x)$ ， $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ，因为 $f(x)$ 定义域为 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的偶函数，

所以 $f(-x) = f(x)$ ，则 $F(-x) = \cos(-x) \cdot f(-x) = \cos x \cdot f(x) = F(x)$ ，即 $F(x)$ 为偶函数，

又 $F'(x) = \cos x \cdot f'(x) - \sin x \cdot f(x)$ ，

因为对 $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，有 $f'(x)\cos x < f(x)\sin x$ 成立，所以当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时 $F'(x) < 0$ ，

即 $F(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，则 $F(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 上单调递增，

又 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ，所以 $\cos x > 0$ ，则不等式 $2f(x) < \frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos x}$ 等价于 $\cos x \cdot f(x) < \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ，

即 $F(x) < F\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ，即 $F(|x|) < F\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ，所以 $\begin{cases} |x| > \frac{\pi}{3} \\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ ，解得 $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$ ，

所以不等式的解集为 $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ 。

故答案为： $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$

【变式 6-1】(2024·四川成都·模拟预测) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ，其导函数是 $f'(x)$ 。有

$f'(x)\cos x + f(x)\sin x < 0$ ，则关于 x 的不等式 $f(x) > 2f\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos x$ 的解集为_____。

【答案】 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$

【解析】依题意令 $F(x) = \frac{f(x)}{\cos x}$ ， $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ，

则 $F'(x) = \frac{f'(x)\cos x + f(x)\sin x}{\cos^2 x}$ ，

因为当 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $f'(x)\cos x + f(x)\sin x < 0$,

所以当 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $F'(x) < 0$,

$\therefore F(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减,

则 $f(x) > 2f\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos x$ 等价于 $\frac{f(x)}{\cos x} > \frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos \frac{\pi}{3}}$, 即 $F(x) > F\left(\frac{\pi}{3}\right)$,

$\therefore \begin{cases} x < \frac{\pi}{3} \\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$, 解得 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{3}$, 所以所求不等式的解集为 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$.

故答案为: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$

题型七: 复杂型: e^n 与 $af(x) + bg(x)$ 等构造型

【典例 7-1】已知可导函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 若对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $f(x) - f'(x) > 1$. 且 $f(x) - 2022$ 为奇函数, 则不等式 $f(x) - 2021e^x > 1$ 的解集为 ()

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(-\infty, e)$ D. $(e, +\infty)$

【答案】A

【解析】根据题意, 构造 $F(x) = \frac{f(x) - 1}{e^x}$, 则 $f(x) = F(x)e^x + 1$,

且 $F'(x) = \frac{f'(x) - f(x) + 1}{e^x} < 0$, 故 $F(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减;

又 $f(x) - 2022$ 为 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 故可得 $f(0) - 2022 = 0$,

即 $f(0) = 2022$, 则 $F(0) = 2021$.

则不等式 $f(x) - 2021e^x > 1$ 等价于 $F(x) > 2021 = F(0)$,

又因为 $F(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的单调减函数, 故解得 $x < 0$.

故选: A.

【典例 7-2】已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 若对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $f(x) > f'(x) + 2$, 且 $f(1) = 2022$, 则不等式 $f(x) - 2020e^{x-1} < 2$ 的解集为 ()

- A. $(0, +\infty)$ B. $\left(-\infty, \frac{1}{e}\right)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(-\infty, 1)$

【答案】C

【解析】设函数 $g(x) = \frac{f(x)-2}{e^x}$,

所以 $g'(x) = \frac{f'(x) \times e^x - [f(x)-2] \times e^x}{e^{2x}} = \frac{f'(x) - f(x) + 2}{e^x}$, 因为 $f(x) > f'(x) + 2$,

所以 $f'(x) - f(x) + 2 < 0$, 即 $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减, 因为 $f(1) = 2022$,

所以 $g(1) = \frac{f(1)-2}{e} = \frac{2020}{e}$, 因为 $f(x) - 2020e^{x-1} < 2$, 整理得 $\frac{f(x)-2}{e^x} < \frac{2020}{e}$,

所以 $g(x) < g(1)$, 因为 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减, 所以 $x > 1$.

故选: C.

【变式 7-1】已知函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 定义域都为 $\mathbb{R}$, 满足 $f(x) = \frac{(x+1)g(x)}{e^x}$, 且有

$g'(x) + xg'(x) - xg(x) < 0$, $g(1) = 2e$, 则不等式 $f(x) < 4$ 的解集为 ()

- A. $(1, 4)$ B. $(0, 2)$ C. $(-\infty, 2)$ D. $(1, +\infty)$

【答案】D

【解析】由 $f(x) = \frac{(x+1)g(x)}{e^x}$ 可得 $f'(x) = \frac{g(x)e^x + (x+1)g'(x)e^x - (x+1)g(x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{xg'(x) + g'(x) - xg(x)}{e^x}$.

而 $g'(x) + xg'(x) - xg(x) < 0$, $\therefore f'(x) < 0$, $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减,

又 $g(1) = 2e$, 则 $f(1) = \frac{2 \times g(1)}{e^1} = \frac{4e}{e} = 4$,

所以 $f(x) < 4 = f(1)$, 则 $x > 1$,

故不等式 $f(x) < 4$ 的解集为 $(1, +\infty)$.

故选: D.

【变式 7-2】已知定义在 $(-3, 3)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + e^{4x}f(-x) = 0$, $f(1) = e^2$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 当 $x \in [0, 3)$ 时, $f'(x) > 2f(x)$, 则不等式 $e^{2x}f(2-x) < e^4$ 的解集为 ()

- A. $(-2, 1)$ B. $(1, 5)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(0, 1)$

【答案】B

【解析】令 $g(x) = \frac{f(x)}{e^{2x}}$, 所以 $f(x) = e^{2x}g(x)$, 因为 $f(x) + e^{4x}f(-x) = 0$, 所以

$e^{2x} \cdot g(x) + e^{4x} \cdot e^{-2x}g(-x) = 0$, 化简得 $g(x) + g(-x) = 0$,

所以 $g(x)$ 是 $(-3, 3)$ 上的奇函数;

$g'(x) = \frac{f'(x)e^{2x} - 2e^{2x}f(x)}{e^{4x}} = \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}}$,

因为当 $0 \leq x < 3$ 时, $f'(x) > 2f(x)$,

所以当 $x \in [0, 3]$ 时, $g'(x) > 0$, 从而 $g(x)$ 在 $[0, 3]$ 上单调递增, 又 $g(x)$ 是 $(-3, 3)$ 上的奇函数, 所以 $g(x)$ 在 $(-3, 3)$ 上单调递增;

考虑到 $g(1) = \frac{f(1)}{e^2} = \frac{e^2}{e^2} = 1$, 由 $e^{2x} f(2-x) < e^4$,

得 $e^{2x} e^{2(2-x)} g(2-x) < e^4$, 即 $g(2-x) < 1 = g(1)$,

由 $g(x)$ 在 $(-3, 3)$ 上单调递增, 得 $\begin{cases} -3 < 2-x < 3, \\ 2-x < 1, \end{cases}$ 解得 $1 < x < 5$,

所以不等式 $e^{2x} f(2-x) < e^4$ 的解集为 $(1, 5)$,

故选: B.

题型八: 复杂型: $(kx+b)$ 与 $f(x)$ 型

【典例 8-1】已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-5, 5)$, 其导函数为 $f'(x)$, 且 $f(x) + xf'(x) > 2$, 则不等式 $(2x-3)f(2x-3) - (x-1)f(x-1) > 2x-4$ 的解集是_____.

【答案】 $(2, 4)$

【解析】 设 $g(x) = xf'(x) - 2x$,

则 $g'(x) = f(x) + xf'(x) - 2$.

因为 $f(x) + xf'(x) > 2$,

所以 $g'(x) > 0$,

则 $g(x)$ 是 $(-5, 5)$ 上的增函数.

不等式 $(2x-3)f(2x-3) - (x-1)f(x-1) > 2x-4$ 等价于,

$(2x-3)f(2x-3) - 2(2x-3) > (x-1)f(x-1) - 2(x-1)$,

即 $g(2x-3) > g(x-1)$, 则 $\begin{cases} -5 < 2x-3 < 5, \\ -5 < x-1 < 5, \\ 2x-3 > x-1, \end{cases}$

解得 $2 < x < 4$.

故答案为: $(2, 4)$

【典例 8-2】已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$, 若对于任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f'(x) + 4x > 0$, 则当

$\alpha \in (0, 2\pi)$ 时, 则关于 α 的不等式 $f(\sin \alpha) - \cos 2\alpha < 0$ 的解集为 ()

A. $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right)$

B. $\left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}\pi, 2\pi\right)$

C. $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi\right)$

D. $\left(0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5}{6}\pi, 2\pi\right)$

【答案】B

【解析】由题意构造函数 $g(x) = f(x) + 2x^2 - 1$ ，则 $g'(x) = f'(x) + 4x > 0$ ，

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}, \therefore g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 1 = 0,$$

$$\text{又 } f(\sin \alpha) - \cos 2\alpha < 0,$$

$$\therefore g(\sin \alpha) = f(\sin \alpha) + 2\sin^2 \alpha - 1 = f(\sin \alpha) - \cos 2\alpha < 0 = g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\therefore \sin \alpha < \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 由 } \alpha \in (0, 2\pi), \therefore \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}\pi, 2\pi\right)$$

故选：B.

【变式 8-1】(2024 · 辽宁 · 模拟预测) 已知函数 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，当 $x \in (0, +\infty)$ 时，

$f'(x) > 2x$ ， $f(2) = 4$ ，则不等式 $xf(x-1) + 2x^2 > x^3 + x$ 的解集为 ()

A. $(-1, 0) \cup (3, +\infty)$

B. $(-1, 1) \cup (3, +\infty)$

C. $(-\infty, -1) \cup (0, 3)$

D. $(-1, 3)$

【答案】A

【解析】因为 $f'(x) > 2x$ ，所以 $f'(x) - 2x > 0$ ，

构造函数 $F(x) = f(x) - x^2$ ，当 $x \in (0, +\infty)$ 时， $F'(x) = f'(x) - 2x > 0$ ，

所以函数 $F(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递增，且 $F(2) = 0$ ，

又 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，所以 $F(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，

所以 $F(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 内单调递减，且 $F(-2) = 0$ 。

不等式 $xf(x-1) + 2x^2 > x^3 + x$ 整理可得： $xf(x-1) + 2x^2 - x^3 - x > 0$ ，

即 $x[f(x-1) - (x-1)^2] > 0$ ，当 $x > 0$ 时， $f(x-1) - (x-1)^2 > 0$ ，则 $x-1 > 2$ ，解得 $x > 3$ ；当 $x < 0$ 时，

$f(x-1) - (x-1)^2 < 0$ ，则 $-2 < x-1 < 0$ ，

解得 $-1 < x < 1$ ，又 $x < 0$ ，所以 $-1 < x < 0$ 。

综上，不等式 $xf(x-1) + 2x^2 > x^3 + x$ 的解集为 $(-1, 0) \cup (3, +\infty)$ 。

故选：A.

【变式 8-2】已知定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ，若 $f'(x) < 2$ ，且 $f(4) = 5$ ，则不等式

$f(2^x) > 2^{x+1} - 3$ 的解集是 ()

A. $(0, 2)$

B. $(0, 4)$

C. $(-\infty, 2)$

D. $(-\infty, 4)$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/747056060106006154>