

广东省广州市南海中学 2023-2024 学年高一下学期期中考试

数学试题

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

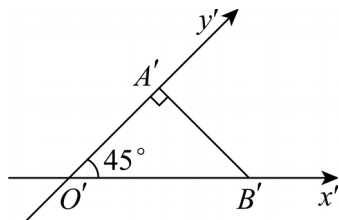
一、未知

1. 设复数 $z = i(1 + 2i)$ (其中 i 为虚数单位), 则复数 z 在复平面内对应的点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

2. 如图, 已知等腰直角三角形 $O'A'B'$ 是一个平面图形的直观图, $O'A' = A'B'$, 斜边 $O'B' = 2$,

则这个平面图形的面积是 ()



- A. $2\sqrt{2}$ B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 的中点, E 为 AC 边上的点, 且 $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{EC}$, 则 $\overrightarrow{ED} =$ ()

- A. $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ B. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ C. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ D. $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

4. 已知向量 $\vec{a} = (1, 1)$, $\vec{b} = (1, -1)$. 若 $(\vec{a} + \lambda\vec{b}) \perp (\vec{a} + \mu\vec{b})$, 则 ()

- A. $\lambda + \mu = 1$ B. $\lambda + \mu = -1$ C. $\lambda\mu = 1$ D. $\lambda\mu = -1$

5. 正四棱台的上、下底面的边长分别为 2, 4, 侧棱长为 2, 则其体积为 ()

- A. $20 + 12\sqrt{3}$ B. $28\sqrt{2}$ C. $\frac{56}{3}$ D. $\frac{28\sqrt{2}}{3}$

6. 在空间中, l, m 是不重合的直线, α, β 是不重合的平面, 则下列说法正确的是

()

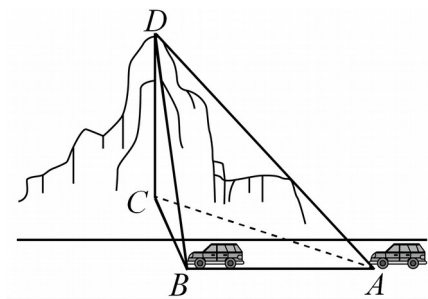
A. 若 $l \subset \alpha$, $m \subset \beta$, $\alpha // \beta$, 则 $l // m$ B. 若 $l // m$, $m \subset \beta$, 则 $l // \beta$

C. 若 $m // \beta$, $m // \alpha$, 则 $\alpha // \beta$ D. 若 $\alpha \cap \beta = l$, $m // \beta$, $m // \alpha$, 则 $l // m$

7. 如图, 一辆汽车在一条水平的公路上向正西方向行驶, 到 A 处时测得公路北侧远处一山

顶 D 在西偏北 30° 的方向上, 行驶 600m 后到达 B 处, 测得此山顶在西偏北 75° 的方向上,

仰角为 60° , 求此山的高度 $CD =$ ()



A. $300\sqrt{6}$ B. $100\sqrt{6}$ C. 100 D. 300

8. 已知四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形, $AB = 4$, $AD = 5$, $BD = 3$, 则 $ABCD$ 的周长取最大值

时, 四边形 $ABCD$ 的面积为 ()

A. $\frac{27}{4}$ B. $\frac{51}{4}$ C. $9 + 3\sqrt{10}$ D. $3 + 3\sqrt{10}$

9. 已知复数 z 满足 $(1-i)z = 2i$, 则下列关于复数 z 的结论正确的是 ()

A. $|z| = \sqrt{2}$

B. z 的虚部为 i

C. 复数 z 的共轭复数 $\bar{z} = -1 - i$

D. 复数 z 是方程 $x^2 + 2x + 2 = 0$ 的一个根

二、多选题

10. 已知函数 $f(x) = \cos^4 x - 2 \sin x \cos x - \sin^4 x$, 则 ()

A. 函数 $f(x)$ 的图象关于 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称

B. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{3\pi}{8}, 0)$ 对称

C. 函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}]$ 上单调递减

D. 函数 $f(x)$ 满足 $f(x + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{f(x)}$

三、未知

11. 中国南宋时期杰出数学家秦九韶在《数书九章》中提出了已知三角形三边求面积的公式, 其求法是: “以小斜幂并大斜幂减中斜幂, 余半之, 自乘于上, 以小斜幂乘大斜幂减上, 余四约之, 为实, 一为从隅, 开平方得积.” 若把以上这段文字写成公式, 即

$$S = \sqrt{\frac{1}{4} \left[c^2 a^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2} \right)^2 \right]}. \text{ 现有 } \triangle ABC \text{ 满足 } \sin A : \sin B : \sin C = 2 : 3 : \sqrt{7}, \text{ 且 } S_{\triangle ABC} = 6\sqrt{3},$$

请判断下列命题正确的是 ()

A. $\triangle ABC$ 周长为 $5 + \sqrt{7}$

B. $C = \frac{\pi}{3}$

C. $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 $\frac{2\sqrt{21}}{3}$

D. $\triangle ABC$ 中线 CD 的长为 $\frac{\sqrt{19}}{2}$

四、填空题

12. 若向量 $\vec{a} = (-4, 3)$, $\vec{b} = (1, 3)$, 则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影向量坐标为_____.

13. 函数 $f(x) = 2\sin(\frac{\pi\pi}{3} + 4x) + \sin(4x - \frac{\pi}{6})$ 的最大值为_____.

14. 已知球 O 是圆锥 PO_1 的外接球, 圆锥 PO_1 的母线长是底面半径的 3 倍, 且球 O 的表面积

为 $\frac{81\pi}{8}$, 则圆锥 PO_1 的侧面积为_____.

五、解答题

15. 已知复数 $z_1 = 1 + ai$ (其中 $a \in R$ 且 $a < 0$, i 为应数单位), 且 z_1^2 为纯虚数.

(1)求实数 a 的值;

(2)若 $z_2 = \frac{z_1}{1+i} + 2$, 求复数 z_2 的模 $|z_2|$.

16. 已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 $\theta = \frac{2\pi}{3}$, 且 $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$.

(1)求 $|\vec{a} + \vec{b}|$;

(2) $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影向量;

(3)求向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 夹角的余弦值.

17. 在① $2a + b = 2c \cos B$, ② $\sqrt{3}c \cdot \cos A - a \sin C = \sqrt{3}b$ 这两个条件中任选一个, 补充在下面

问题中, 并求解 (1)、(2) 的答案. 问题: 在 $\triangle ABC$ 中, 三个内角 A, B, C 所对的边分别

是 a, b, c , 已知_____.

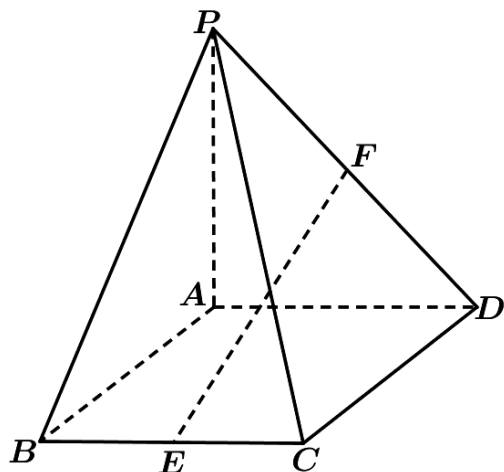
(1)求角 C ;

(2)若 $b = 4$, $\triangle ABC$ 的面积 $S = 2\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

(注: 如果选择两个条件分别解答, 则按第一个解答计分.)

18. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 是菱形， $\angle ABC = 60^\circ$ 。

点 E ， F 分别在棱 BC ， PD 的中点。

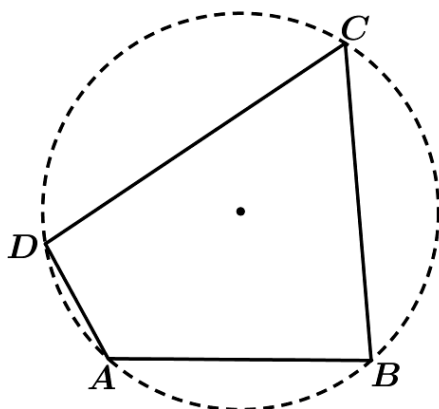


(1) 证明： $EF \parallel$ 平面 PAB 。

(2) 若 $AB = 2\sqrt{2}$ ，求点 F 到平面 PAB 的距离。

19. 如图，我国南海某处的一个圆形海域上有四个小岛，小岛 B 与小岛 A 、小岛 C 相距都

为 $5n$ mile，与小岛 D 相距为 $3\sqrt{5}n$ mile。小岛 A 对小岛 B 与 D 的视角为钝角，且 $\sin A = \frac{3}{5}$ 。



(I) 求小岛 A 与小岛 D 之间的距离和四个小岛所形成的四边形的面积；

(II) 记小岛 D 对小岛 B 与 C 的视角为 α ，小岛 B 对小岛 C 与 D 的视角为 β ，求

$\sin(2\alpha + \beta)$ 的值.

参考答案:

题号	10									
答案	BC									

1. B

【分析】根据复数的乘法运算求出复数 z ，再根据复数的几何意义即可得出答案.

【详解】解： $z = i(1 + 2i) = -2 + i$ ，

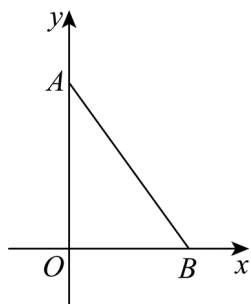
所以复数 z 在复平面内对应的点为 $(-2, 1)$ ，位于第二象限.

故选：B.

2. A

【分析】根据斜二测画法的定义，画出平面图形，求得原三角形的直角边，从而面积可得.

【详解】利用斜二测画法的定义，画出原图形，



由 $\text{Rt}\triangle O'A'B'$ 是等腰直角三角形， $O'A' = A'B'$ ，斜边 $O'B' = 2$ ，得 $O'A' = \frac{\sqrt{2}}{2} O'B' = \sqrt{2}$ ，

因此 $OB = O'B' = 2$ ， $OA = 2O'A' = 2\sqrt{2}$ ， $\angle AOB = 90^\circ$ ，

所以原平面图形的面积是 $\frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

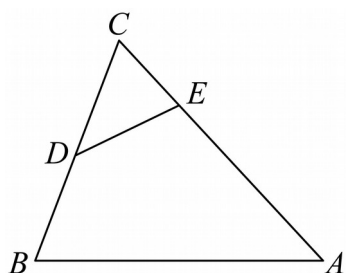
故选：A

3. C

【分析】根据平面向量的线性运算结合图形即可得解.

【详解】由 D 为 BC 的中点， E 为 AC 边上的点，且 $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{EC}$ ，

$$\text{得 } \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.$$



故选：C

4. D

【分析】根据向量的坐标运算求出 $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ ， $\vec{a} + \mu\vec{b}$ ，再根据向量垂直的坐标表示即可求出．

【详解】由向量 $\vec{a} = (1, 1)$ ， $\vec{b} = (1, -1)$ ，得 $\vec{a} + \lambda\vec{b} = (1 + \lambda, 1 - \lambda)$ ， $\vec{a} + \mu\vec{b} = (1 + \mu, 1 - \mu)$ ，

由 $(\vec{a} + \lambda\vec{b}) \perp (\vec{a} + \mu\vec{b})$ ，得 $(\vec{a} + \lambda\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \mu\vec{b}) = 0$ ，

即 $(1 + \lambda)(1 + \mu) + (1 - \lambda)(1 - \mu) = 0$ ，所以 $\lambda\mu = -1$ ．

故选：D

5. D

【分析】利用正棱台的体积公式计算得解．

【详解】正四棱台的上、下底面的边长分别为 2，4，侧棱长为 2，则该棱台的高

$$h = \sqrt{2^2 - (2\sqrt{2} - \sqrt{2})^2} = \sqrt{2},$$

$$\text{所以该棱台的体积 } V = \frac{1}{3}(2^2 + \sqrt{2^2 \times 4^2} + 4^2) \times \sqrt{2} = \frac{28\sqrt{2}}{3}.$$

故选：D

6. D

【分析】根据给定条件，利用面面平行、线面平行的关系，逐项判断即可．

【详解】对于 A，由 $l \subset \alpha$ ， $m \subset \beta$ ， $\alpha \parallel \beta$ ，得 $l \parallel m$ 或 l, m 是异面直线，A 错误；

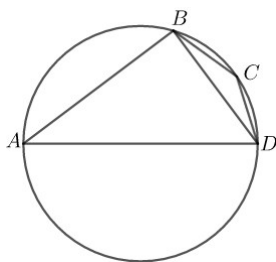
故选：A

8. A

【分析】由 $\triangle ABD$ 求出 A 的余弦，再由圆内接四边形性质求出 C 的余弦， $\triangle BCD$ 中借助余弦定理建立起关于 BC ， CD 的关系，探讨其最值即可得解.

【详解】 $\triangle ABD$ 中，因 $AB^2 + BD^2 = 25 = AD^2$ ，则 $\angle ABD = 90^\circ$ ， $\cos A = \frac{4}{5}$ ，

而四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形，如图：



则 $A + C = \pi$ ， $\cos C = -\cos A = -\frac{4}{5}$ ， $\sin C = \frac{3}{5}$ ，

在 $\triangle BCD$ 中，由余弦定理 $BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cos C = BD^2$ 得 $BC^2 + CD^2 + \frac{8}{5}BC \cdot CD = 9$ ，

$(BC + CD)^2 = 9 + \frac{2}{5}BC \cdot CD \leq 9 + \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{BC + CD}{2}\right)^2$ ，即 $(BC + CD)^2 \leq 10$ ，当且仅当

$BC = CD = \frac{\sqrt{10}}{2}$ 时取 “=”，

而 $BC + CD > 3$ ，所以 $BC = CD = \frac{\sqrt{10}}{2}$ 时，四边形 $ABCD$ 的周长取最大值，

四边形 $ABCD$ 的面积 $S = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}AB \cdot BD + \frac{1}{2}BC \cdot CD \sin \angle BCD$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{27}{4}.$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/747066052146010011>