

2024-2025 学年江苏省无锡市九年级上学期期中数学检测试卷(一)

一、选择题(共 30 分)

1. (3 分) 下列关于 x 的方程中, 是一元二次方程的是 ()

A. $x^2+2x=0$

B. $x+1=0$

C. $ax^2+bx+c=0$

D. $x+\frac{1}{x}=2$

2. (3 分) 若 $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$, 则 $\frac{a}{a+b}=(\quad)$

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{5}{3}$

3. (3 分) 若圆 O 的半径是 5, 圆心的坐标是 $(0, 0)$, 点 P 的坐标是 $(-4, 3)$, 则点 P 与圆 O 的位置关系是 ()

A. 点 P 在圆外

B. 点 P 在圆上

C. 点 P 在圆内

D. 无法确定

4. (3 分) 已知点 P 是线段 AB 的黄金分割点 ($AP>PB$), 若 $AB=10$, 则 PB 的长约为 ()

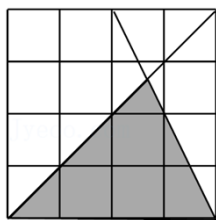
A. 0.382

B. 3.82

C. 0.618

D. 6.18

5. (3 分) 如图, 若方格纸中每个小正方形的边长均为 1, 则阴影部分的面积为 ()



A. 5

B. 6

C. $\frac{16}{3}$

D. $\frac{17}{3}$

6. (3 分) 以下命题: (1) 等弧所对的弦相等; (2) 相等的圆心角所对的弧相等; (3) 三点确定一个圆; (4) 圆的对称轴是直径; (5) 三角形的内心到三角形三边距离相等. 其中正确的命题的个数是 ()

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

7. (3 分) 实数 a 、 b 满足 $a^2+b-4a+1=0$, 则 b 的最大值为 ()

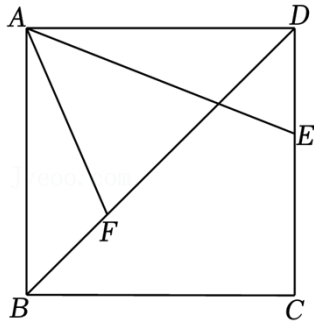
A. -1

B. -2

C. 3

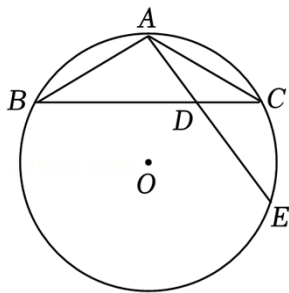
D. 2

8. (3 分) 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, $AB=5$, 点 E 是 CD 边上一点, 且 $\frac{DE}{CE}=\frac{2}{3}$, 点 F 是 BD 上一点, 若 $\angle FAE=45^\circ$, 则 AF 的长为 ()



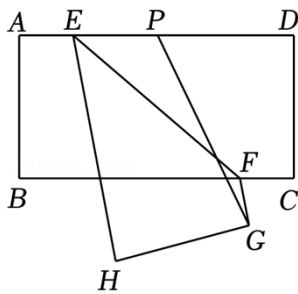
- A. $3\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{58}}{2}$ C. $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ D. $\frac{9}{2}$

9. (3分) 如图, $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形, $AB=AC$, $\angle BAC=120^\circ$, D 是 BC 边上一点, 连接 AD 并延长交 $\odot O$ 于点 E . 若 $AD=2$, $DE=3$, 则 $\odot O$ 的半径为 ()



- A. $\sqrt{10}$ B. $\frac{3}{2}\sqrt{10}$ C. $2\sqrt{10}$ D. $3\sqrt{10}$

10. (3分) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=3$, $BC=3\sqrt{3}$, 点 E 、 F 分别是 AB 、 BC 上的动点, 且 $AE=CF$, 连接 EF , 将矩形 $ABCD$ 沿 EF 折叠, 点 C 落在点 G 处, 点 D 落在 H 处. 在点 E 从 A 移动到 AD 中点 P 的过程中, 线段 PG 的最大值 ()

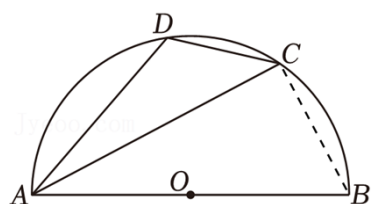


- A. $\frac{7}{2}$ B. 4 C. $\frac{9}{2}$ D. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$

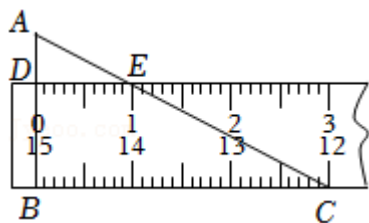
二、填空题 (共 24 分)

11. (3分) 在比例尺是 1: 的常州交通图上, 文化宫广场与恐龙园之间的距离为 4.6 厘米, 则它们之间的实际距离约为 _____ 千米.
12. (3分) 请写出一个二次项系数为 1, 且以 -1 为其中一个根的一元二次方程: _____.
13. (3分) 如图, AB 是半圆 O 的直径、 C 、 D 在半圆 O 上. 若 $\angle CAB=28^\circ$, 则 $\angle ADC$

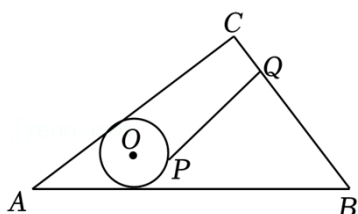
的度数为_____.



14. (3分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=90^\circ$, $\angle A=60^\circ$, 直尺的一边与 BC 重合, 另一边分别交 AB , AC 于点 D , E . 点 B , C , D , E 处的读数分别为 15, 12, 0, 1, 则直尺宽 BD 的长为_____.



15. (3分) 已知 a , b 是方程 $x^2 - 3x - 2 = 0$ 的两个实数根, 则 $(a-2)(b-2) =$ _____.
16. (3分) 已知 $\triangle ABC$, D 是 BC 边上的一点 (不与 BC 重合), E , F 分别是 $\triangle ABD$ 、 $\triangle ACD$ 的重心, 若 $\triangle ABC$ 的面积为 14, 则 $\triangle DEF$ 的面积为_____.
17. (3分) 已知, 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB=10$, $BC=6$, $AC=8$, 半径为 1 的 $\odot O$ 与三角形的边 AB 、 AC 都相切, 点 P 为 $\odot O$ 上一动点, 点 Q 为 BC 边上一动点, 则 PQ 的最大值与最小值的和为_____.



18. (3分) 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点 $A(n, 0)$ 、 $B(m, 0)$ 、 $C(0, 2n)$ ($m > n > 0$), 作 $\triangle ABC$ 关于直线 AC 的对称图形 $\triangle AB_1C$, B_1 恰好落在 y 轴上, 则 $\frac{m}{n}$ 的值为_____.

三、解答题 (共 96 分)

19. 解方程:

(1) $x^2 - 6x + 3 = 0$;

(2) $(x+1)(x-2) = (x-2)$.

20. 已知关于 x 的方程 $(x-2)(x-3) - k^2 = 0$.

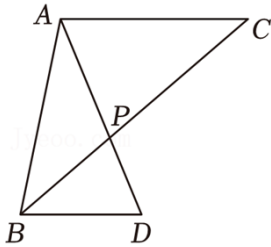
(1) 证明: 无论 k 取何值, 方程总有两个不相等的实数根;

(2) 设方程的两根分别为 x_1 , x_2 , 且 $x_1 > x_2$, 证明: $x_1 + 2x_2 \leq 7$.

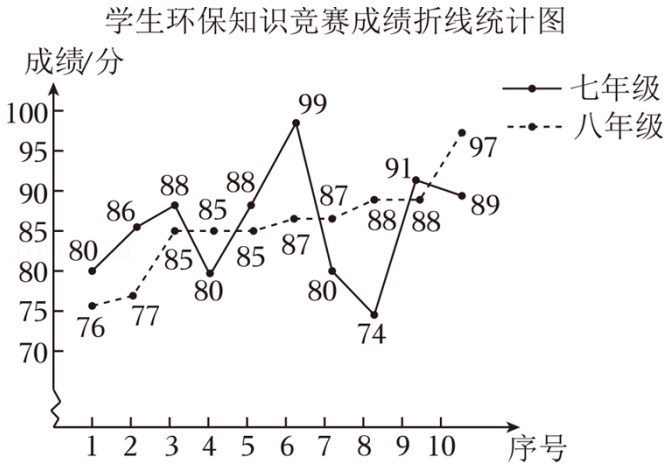
21. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， BC 恰好是 $\angle ABD$ 的角平分线.

(1) 求证： $\triangle APC \sim \triangle DPB$ ；

(2) 若 $AP=BP=1$ ， $AD=CP$ ，求 DP 的长.



22. (100 分) 某校为了普及环保知识，从七、八两个年级中各选出 10 名学生参加环保知识竞赛，并对成绩进行整理分析，得到如下信息：



	平均数	众数	中位数
七年级参赛学生成绩	85.5	m	87
八年级参赛学生成绩	85.5	85	n

根据以上信息，回答下列问题：

(1) 填空： $m=$ _____， $n=$ _____；

(2) 七、八年级参赛学生成绩的方差分别记为 S_1^2 和 S_2^2 ，请判断 S_1^2 _____ S_2^2 ；（填“>”、“<”或“=”）；

(3) 请你根据统计知识，利用数据对七、八年级的成绩进行比较与评价.

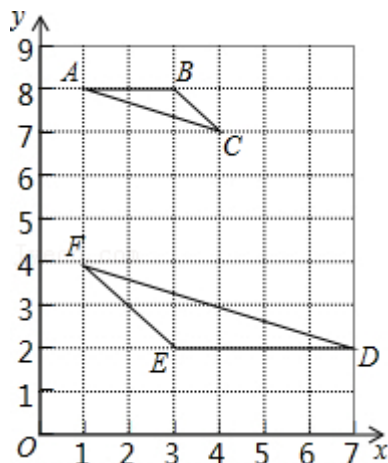
23. 如图，在平面直角坐标系中，每个小方格都是边长为 1 个单位的小正方形，点 A 、 B 、 C 都是格点（每个小方格的顶点叫格点），其中 $A(1, 8)$ ， $B(3, 8)$ ， $C(4, 7)$.

(1) $\triangle ABC$ 外接圆的圆心坐标是_____；

(2) $\triangle ABC$ 外接圆的半径是_____；

(3) 已知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ （点 D 、 E 、 F 都是格点）成位似图形，则位似中心 M 的坐标是

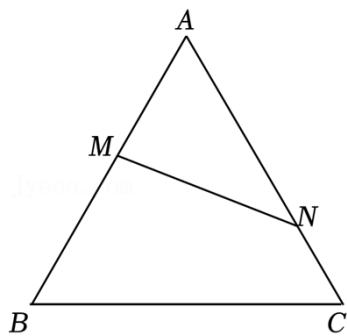
(4) 请在网格图中的空白处画一个格点 $\triangle A_1B_1C_1$ ，使 $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ ，且相似比为 $\sqrt{2}:1$ 。



24. 如图，在等边 $\triangle ABC$ 中，点 M 、 N 分别在 AB 、 AC 边上。

(1) 在 BC 边上求作点 P ，使 $\angle MPN=60^\circ$ ；（尺规作图，不写作法，保留作图痕迹，请找出所有满足条件的点。）

(2) 若 $AB=9$ ， $BM=5$ ，设 $CN=a$ ，若要使得(1)中只能作出唯一的点 P ，则 a 的值应该满足什么条件？请通过计算说明。



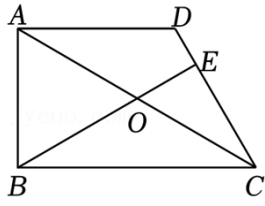
25. 如图， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ， CD 平分 $\angle ACB$ 交 $\odot O$ 于 D ，过点 D 作 $PQ \parallel AB$ 分别交 CA 、 CB 延长线于 P 、 Q ，连接 BD 。

(1) 求证： PQ 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 若 $AC=4$ ， $BQ=1$ ，求 BD 的长。

②若 $BE \perp CD$ ，求 $\frac{AD}{BC}$ 的值；

(2) 若 $DE=1$ ， $OE=2$ ，直接写出 CD 的长.



答案与试题解析

一、选择题（共 30 分）

1. （3 分）下列关于 x 的方程中，是一元二次方程的是（ ）

A. $x^2+2x=0$

B. $x+1=0$

C. $ax^2+bx+c=0$

D. $x+\frac{1}{x}=2$

【分析】利用定义：只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫一元二次方程判定即可．

解：A. $x^2+2x=0$ 是一元二次方程，故本选项符合题意；

B. $x+1=0$ 是一元一次方程，故本选项不符合题意；

C. 当 $a=0$ 时，该方程不是一元二次方程，故本选项不符合题意；

D. 该方程是分式方程，不是整式方程，不是一元二次方程，故本选项不符合题意．

故选：A．

【点评】本题主要考查了一元二次方程的定义，解题的关键是明确一元二次方程的定义．

2. （3 分）若 $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$ ，则 $\frac{a}{a+b}=(\quad)$

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{5}{3}$

【分析】根据比例的性质变形即可求解．

解： $\because \frac{a}{b}=\frac{3}{2}$ ，

$\therefore$ 设 $a=3k$ ， $b=2k$ ，

$\therefore \frac{a}{a+b}=\frac{3k}{3k+2k}=\frac{3}{5}$ ，

故选：C．

【点评】本题考查了比例的性质，熟知比例的性质是解题的关键．

3. （3 分）若圆 O 的半径是 5，圆心的坐标是 $(0, 0)$ ，点 P 的坐标是 $(-4, 3)$ ，则点 P 与圆 O 的位置关系是（ ）

A. 点 P 在圆外

B. 点 P 在圆上

C. 点 P 在圆内

D. 无法确定

【分析】先根据勾股定理求出 OP 的长，再与 $\odot O$ 的半径为 5 相比较即可．

解： $\because P$ 的坐标为 $(-4, 3)$ ，

$\therefore OP=\sqrt{4^2+3^2}=5$ ．

$\because \odot O$ 的半径为 5，

∴点 P 在 $\odot O$ 上.

故选: B .

【点评】本题考查的是点与圆的位置关系, 坐标与图形性质, 熟知点与圆的位置关系有 3 种. 设 $\odot O$ 的半径为 r , 点 P 到圆心的距离 $OP=d$, 则有: 点 P 在圆外 $\Leftrightarrow d>r$; 点 P 在圆上 $\Leftrightarrow d=r$; 点 P 在圆内 $\Leftrightarrow d<r$ 是解题的关键.

4. (3 分) 已知点 P 是线段 AB 的黄金分割点 ($AP>PB$), 若 $AB=10$, 则 PB 的长约为 ()
- A. 0.382 B. 3.82 C. 0.618 D. 6.18

【分析】设 $PB=x$, 则 $PA=10-x$, 根据黄金分割的定义得到 $\frac{PB}{PA}=\frac{PA}{AB}$, 即 $\frac{x}{10-x}=\frac{10-x}{10}$,

解方程即可得到答案.

解: 设 $PB=x$, 则 $PA=10-x$,

∵点 P 是线段 AB 的黄金分割点 ($AP>PB$),

$$\therefore \frac{PB}{PA} = \frac{PA}{AB}, \text{ 即 } \frac{x}{10-x} = \frac{10-x}{10},$$

$$\therefore 100 - 20x + x^2 = 10x, \text{ 即 } x^2 - 30x + 100 = 0,$$

$$\text{解得 } x = 15 - 5\sqrt{5} \approx 3.82 \text{ 或 } x = 15 + 5\sqrt{5} \text{ (舍去)},$$

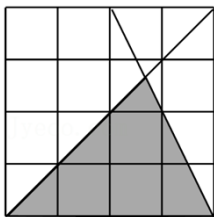
经检验, $x = 15 - 5\sqrt{5} \approx 3.82$ 是原方程的解,

∴ PB 的长约为 3.82,

故选: B .

【点评】本题主要考查了黄金分割, 熟记黄金分割的定义是解题的关键.

5. (3 分) 如图, 若方格纸中每个小正方形的边长均为 1, 则阴影部分的面积为 ()



- A. 5 B. 6 C. $\frac{16}{3}$ D. $\frac{17}{3}$

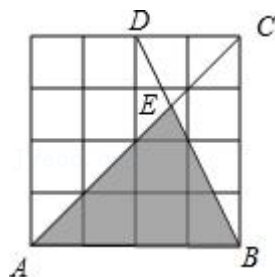
【分析】证明 $\triangle ABE \sim \triangle CDE$, 求得 $AE:CE$, 再根据三角形的面积关系求得结果.

解: ∵ $CD \parallel AB$,

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle CDE,$$

$$\therefore \frac{AE}{CE} = \frac{AB}{CD} = \frac{4}{2} = 2,$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = \frac{2}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = \frac{16}{3},$$



故选：C.

【点评】本题主要考查了相似三角形的性质与判定，三角形的面积公式，关键在于证明三角形相似.

6. (3分) 以下命题：(1) 等弧所对的弦相等；(2) 相等的圆心角所对的弧相等；(3) 三点确定一个圆；(4) 圆的对称轴是直径；(5) 三角形的内心到三角形三边距离相等. 其中正确的命题的个数是 ()

A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

【分析】利用圆的有关定义及性质分别判断后即可确定正确的选项.

解：(1) 等弧所对的弦相等，正确，符合题意；

(2) 同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，故原命题错误，不符合题意；

(3) 不在同一直线上的三点确定一个圆，故原命题错误，不符合题意；

(4) 圆的对称轴是直径所在的直线，故原命题错误，不符合题意；

(5) 三角形的内心到三角形三边距离相等，正确，符合题意；

正确的命题有2个，

故选：B.

【点评】本题考查了命题与定理的知识，解题的关键是了解圆的有关定义及性质.

7. (3分) 实数 a 、 b 满足 $a^2 + b - 4a + 1 = 0$ ，则 b 的最大值为 ()

A. -1 B. -2 C. 3 D. 2

【分析】把 $a^2 + b - 4a + 1 = 0$ 看作关于 a 的一元二次方程，则利用根的判别式的意义得到 $\Delta = (-4)^2 - 4(b+1) \geq 0$ ，解关于 b 的不等式得到 b 的最大值.

解： $\because$ 实数 a 、 b 满足 $a^2 + b - 4a + 1 = 0$ ，

$\therefore$ 关于 a 的一元二次方程 $a^2 + b - 4a + 1 = 0$ 有实数根，

$\therefore \Delta = (-4)^2 - 4(b+1) \geq 0$ ，

$\therefore b \leq 3$ ，

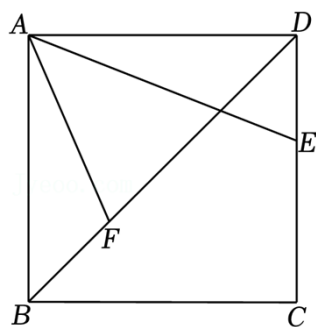
$\therefore b$ 的最大值为 3,

故选: C.

【点评】本题考查了根的判别式: 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的根与 $\Delta=b^2-4ac$ 有如下关系, 当 $\Delta>0$ 时, 方程有两个不相等的两个实数根; 当 $\Delta=0$ 时, 方程有两个相等的两个实数根; 当 $\Delta<0$ 时, 方程无实数根.

8. (3 分) 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, $AB=5$, 点 E 是 CD 边上一点, 且 $\frac{DE}{CE}=\frac{2}{3}$, 点 F 是 BD

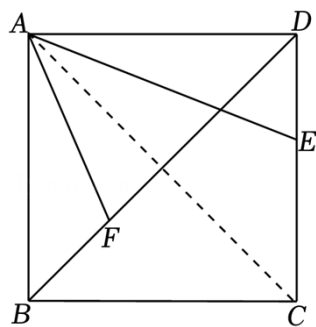
上一点, 若 $\angle FAE=45^\circ$, 则 AF 的长为 ()



- A. $3\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{58}}{2}$ C. $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ D. $\frac{9}{2}$

【分析】由正方形的性质得到 $CD=AB=AD=5$, $\angle BAC=\angle ACD=\angle ABD=45^\circ$, $\angle ABC=\angle ADE=90^\circ$, 则由勾股定理得到 $AC=5\sqrt{2}$, 求出 $DE=2$, 则 $AE=\sqrt{AD^2+DE^2}=\sqrt{29}$, 再证明 $\triangle ABF \sim \triangle ACE$, 得到 $\frac{AB}{AC}=\frac{AF}{AE}$, 即 $\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{AF}{\sqrt{29}}$, 即可得到 $AF=\frac{\sqrt{58}}{2}$.

解: 如图所示, 连接 AC ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore CD=AB=AD=5$, $\angle BAC=\angle ACD=\angle ABD=45^\circ$, $\angle ABC=\angle ADE=90^\circ$,

$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=5\sqrt{2}$,

$\because \frac{DE}{CE}=\frac{2}{3}$,

$\therefore CE=\frac{3}{5}CD=3$,

$$\therefore DE=2,$$

$$\therefore AE=\sqrt{AD^2+DE^2}=\sqrt{29},$$

$$\therefore \angle FAE=\angle BAC=45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAF=\angle CAE,$$

$$\text{又} \because \angle ABF=\angle ACE=45^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABF \sim \triangle ACE,$$

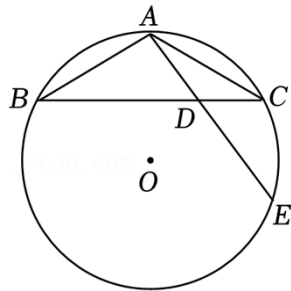
$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AF}{AE}, \text{ 即 } \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{AF}{\sqrt{29}},$$

$$\therefore AF = \frac{\sqrt{58}}{2},$$

故选：B.

【点评】本题主要考查了正方形的性质，勾股定理，相似三角形的性质与判定，解答本题的关键是作出辅助线，构造相似三角形解决问题.

9. (3分) 如图， $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形， $AB=AC$ ， $\angle BAC=120^\circ$ ， D 是 BC 边上一点，连接 AD 并延长交 $\odot O$ 于点 E . 若 $AD=2$ ， $DE=3$ ，则 $\odot O$ 的半径为 ()



A. $\sqrt{10}$

B. $\frac{3}{2}\sqrt{10}$

C. $2\sqrt{10}$

D. $3\sqrt{10}$

【分析】连接 OA ， OC ， CE ，根据等腰三角形的性质得到 $\angle B=\angle ACB=30^\circ$ ，根据等边三角形的性质得到 $AC=OA$ ，根据相似三角形的判定和性质即可得到结论.

解：连接 OA ， OC ， CE ，

$$\therefore AB=AC, \angle BAC=120^\circ,$$

$$\therefore \angle B=\angle ACB=30^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC=60^\circ,$$

$$\therefore OA=OC,$$

$\therefore \triangle AOC$ 是等边三角形，

$$\therefore AC=OA,$$

$$\therefore \angle AEC=\angle ACB=30^\circ, \angle CAD=\angle EAC,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle AEC,$$

$$\therefore \frac{AC}{AD} = \frac{AE}{AC},$$

$$\therefore AC^2 = AD \cdot AE,$$

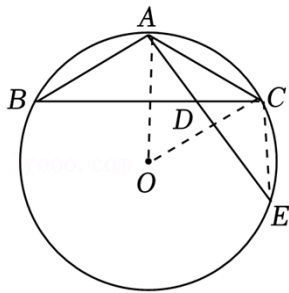
$$\because AD=2, DE=3,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AD \cdot AE} = \sqrt{2 \times (2+3)} = \sqrt{10},$$

$$\therefore OA = AC = \sqrt{10},$$

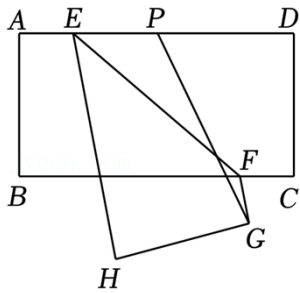
即 $\odot O$ 的半径为 $\sqrt{10}$,

故选: A.



【点评】本题考查了三角形的外接圆和外心,等腰三角形的性质,等边三角形的判定和性质,相似三角形的判定和性质,熟练掌握相似三角形的判定和性质是解题的关键.

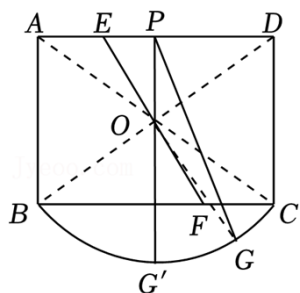
10. (3分) 如图,在矩形 $ABCD$ 中, $AB=3$, $BC=3\sqrt{3}$,点 E 、 F 分别是 AB 、 BC 上的动点,且 $AE=CF$,连接 EF ,将矩形 $ABCD$ 沿 EF 折叠,点 C 落在点 G 处,点 D 落在 H 处.在点 E 从 A 移动到 AD 中点 P 的过程中,线段 PG 的最大值()



- A. $\frac{7}{2}$ B. 4 C. $\frac{9}{2}$ D. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$

【分析】连接 AC 与 EF 交于点 O ,连接 OG ,证明点 O 是 AC 的中点,求出 $PO=\frac{3}{2}$,再判断出点 G 的运动轨迹为弧 BC ,即可求出结论.

解:连接 AC 与 EF 交于点 O ,连接 OG ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore \angle EAC = \angle FCA$, $\angle AEF = \angle CFE$,

又 $\because AE = CF$,

$\therefore \triangle AEO \cong \triangle CFO$ (ASA),

$\therefore EO = FO$, $AO = CO$,

$\therefore$ 点 O 为 AC 的中点,

连接 BD , 则与 AC 交于点 O ,

由折叠得, $\angle OFC = \angle OFG$, $CF = GF$,

又 $\because OF = OF$,

$\therefore \triangle OFC \cong \triangle OFG$ (SAS),

$\therefore OC = OG = \frac{1}{2}AC$,

又 $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 6$,

$\therefore OG = 3$,

$\therefore G$ 在以 O 为圆心, OG 为半径的圆弧上运动, E 在 A 处时, G 与 C 重合, E 在 P 处时, G 与 B 重合,

$\therefore G$ 的运动轨迹为 $\widehat{BC}$,

$\therefore$ 连接 PO 并延长, 交 $\widehat{BC}$ 于 G' 时, PG' 最大,

当 O, P, G 共线时, 即 G 与 G' 重合时, PG 最大,

$\therefore PG = PG' = PO + OG'$,

$\because P$ 为 AD 的中点, O 为 BD 的中点,

$\therefore PO = \frac{1}{2}AB = \frac{3}{2}$,

$\therefore PG' = \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}$,

即 PG 的最大值为 $\frac{9}{2}$,

故选: C .

【点评】本题主要考查矩形的性质, 全等三角形的判定与性质, 点的轨迹等知识, 正确作出辅助线是解决此题的关键.

二、填空题 (共 24 分)

11. (3 分) 在比例尺是 1: 的常州交通图上, 文化宫广场与恐龙园之间的距离为 4.6 厘米, 则它们之间的实际距离约为 9.2 千米.

【分析】实际距离: 图上距离 = 比例尺. 注意单位统一成千米.

解: 设它们之间的实际距离约为 x 千米,

$$4.6\text{cm} = 0.000046\text{km}$$

$$\text{则 } 1: = 0.000046: x,$$

$$\text{解得 } x = 9.2,$$

故 9.2.

【点评】主要考查了对比例尺的应用. 注意单位的统一.

12. (3 分) 请写出一个二次项系数为 1, 且以 -1 为其中一个根的一元二次方程: $x^2 - 1 = 0$ (答案不唯一).

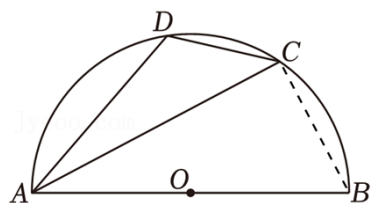
【分析】先根据一元二次方程的解法- 因式分解, 写出方程, 再化为一般形式.

解: 根据题意得: $(x+1)(x-1) = 0$, 即: $x^2 - 1 = 0$,

故 $x^2 - 1 = 0$ (答案不唯一).

【点评】本题考查了一元二次方程的解, 理解方程解的意义是解题的关键.

13. (3 分) 如图, AB 是半圆 O 的直径、 C 、 D 在半圆 O 上. 若 $\angle CAB = 28^\circ$, 则 $\angle ADC$ 的度数为 118° .



【分析】根据直径所对的圆周角是直角, 可得 $\angle ACB = 90^\circ$, 从而求出 $\angle B$, 再根据圆内接四边形对角互补, 即可解答.

解: $\because AB$ 是半圆 O 的直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\because \angle CAB = 28^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 90^\circ - \angle CAB = 62^\circ,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形,

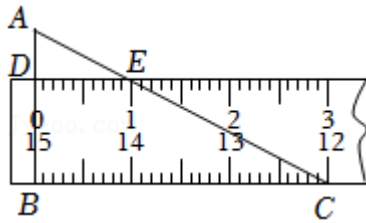
$$\therefore \angle B + \angle ADC = 180^\circ$$

$$\therefore \angle ADC = 180^\circ - \angle B = 118^\circ.$$

故 118° .

【点评】本题考查了圆周角定理，熟练掌握圆周角定理是解题的关键.

14. (3分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, 直尺的一边与 BC 重合, 另一边分别交 AB , AC 于点 D , E . 点 B , C , D , E 处的读数分别为 15, 12, 0, 1, 则直尺宽 BD 的长为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.



【分析】根据正切的定义求出 AB , 证明 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, 根据相似三角形的性质列出比例式, 把已知数据代入计算即可.

解: 由题意得, $DE = 1$, $BC = 3$,

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$,

$$\text{则 } AB = \frac{BC}{\tan A} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3},$$

$$\because DE \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}, \text{ 即 } \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3} - BD}{\sqrt{3}},$$

$$\text{解得: } BD = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{故 } \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

【点评】本题考查的是相似三角形的判定和性质、解直角三角形, 掌握相似三角形的判定定理是解题的关键.

15. (3分) 已知 a , b 是方程 $x^2 - 3x - 2 = 0$ 的两个实数根, 则 $(a - 2)(b - 2) = -4$.

【分析】根据根与系数的关系得到 $a + b = 3$, ab

$= -2$ ，再由多项式乘以多项式的计算法则得到 $(a-2)(b-2) = ab - 2(a+b) + 4$ ，据此代值计算即可。

解：∵ a, b 是方程 $x^2 - 3x - 2 = 0$ 的两个实数根，

$$\therefore a+b=3, ab=-2,$$

$$\therefore (a-2)(b-2)$$

$$= ab - 2a - 2b + 4$$

$$= ab - 2(a+b) + 4$$

$$= -2 - 2 \times 3 + 4$$

$$= -4,$$

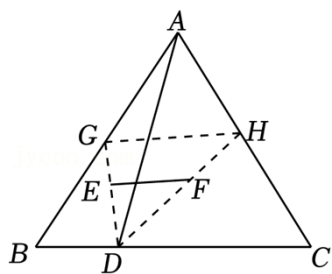
故 -4 。

【点评】本题考查了根与系数的关系，牢记“一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的两根之和等于 $-\frac{b}{a}$ ，两根之积等于 $\frac{c}{a}$ ”是解题的关键。

16. (3分) 已知 $\triangle ABC$ ， D 是 BC 边上的一点（不与 BC 重合）， E, F 分别是 $\triangle ABD, \triangle ACD$ 的重心，若 $\triangle ABC$ 的面积为 14，则 $\triangle DEF$ 的面积为 $\frac{14}{9}$ 。

【分析】连接 DE 并延长交 AB 于 G ，连接 DF 并延长交 AC 于 H ，连接 GH ，由重心的定义得到 DG, DH 分别是 $\triangle ABD, \triangle ACD$ 的中线，则 GH 是 $\triangle ABC$ 的中位线，即可得到 $GH \parallel BC$ ， $GH = \frac{1}{2}BC$ ，证明 $\triangle AGH \sim \triangle ABC$ ，可得 $S_{\triangle AGH} = \frac{1}{4}S_{\triangle ABC} = \frac{7}{2}$ ，再由三角形中线的性质推出 $S_{\text{四边形}AGDH} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = 7$ ，由重心的性质可得 $\frac{DE}{DG} = \frac{DF}{DH} = \frac{2}{3}$ ，则可证明 $\triangle EDF \sim \triangle GDH$ ，得到 $S_{\triangle EDF} = \frac{4}{9}S_{\triangle GDH} = \frac{14}{9}$ 。

解：如图所示，连接 DE 并延长交 AB 于 G ，连接 DF 并延长交 AC 于 H ，连接 GH ，



∵ E, F 分别是 $\triangle ABD, \triangle ACD$ 的重心，

∴ DG, DH 分别是 $\triangle ABD, \triangle ACD$ 的中线，

∴ GH 是 $\triangle ABC$ 的中位线，

$$\therefore GH \parallel BC, \quad GH = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore \triangle AGH \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle AGH}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{GH}{BC}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$\therefore S_{\triangle AGH} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC} = \frac{7}{2};$$

$\because$ 三角形中线平分三角形面积,

$$\therefore S_{\triangle AGD} = S_{\triangle BGD}, \quad S_{\triangle AHD} = S_{\triangle CHD},$$

$$\therefore S_{\text{四边形AGDH}} = S_{\triangle AGD} + S_{\triangle AHD} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = 7,$$

$$\therefore S_{\triangle DGH} = \frac{7}{2},$$

$$\text{由重心的性质可得 } \frac{DE}{DG} = \frac{DF}{DH} = \frac{2}{3},$$

$$\text{又 } \because \angle EDF = \angle GDH,$$

$$\therefore \triangle EDF \sim \triangle GDH,$$

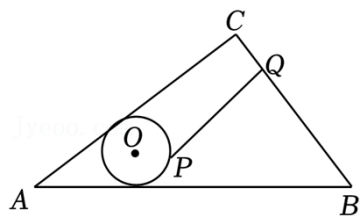
$$\therefore \frac{S_{\triangle EDF}}{S_{\triangle GDH}} = \left(\frac{DE}{DG}\right)^2 = \frac{4}{9},$$

$$\therefore S_{\triangle EDF} = \frac{4}{9} S_{\triangle GDH} = \frac{14}{9},$$

$$\text{故 } \frac{14}{9}.$$

【点评】本题主要考查了重心的性质，相似三角形的性质与判定，三角形中位线定理，解题的关键是正确寻找相似三角形解决问题.

17. (3分) 已知, 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB=10$, $BC=6$, $AC=8$, 半径为 1 的 $\odot O$ 与三角形的边 AB 、 AC 都相切, 点 P 为 $\odot O$ 上一动点, 点 Q 为 BC 边上一动点, 则 PQ 的最大值与最小值的和为 $5\sqrt{2}+5$.



【分析】设 $\odot O$ 与 AC 相切于点 D , 与 AB 相切于点 E , 连接 OD , OE , 过点 O , 作 $OP_1 \perp BC$ 垂足为 Q_1 交 $\odot O$ 于 P_1 , 此时垂线段 OQ_1 最短, P_1Q_1 最小值为 $OQ_1 - OP_1$, 求出 OQ_1 , 当 Q_2 与 B 重合时, BO 的延长线与 $\odot O$ 交于点 P_2 , P_2Q_2 最大值 $OQ_2 + OP_2$.

解: $\because \triangle ABC$ 中, $AB=10$, $BC=6$, $AC=8$,

$$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

设 $\odot O$ 与 AC 相切于点 D ,与 AB 相切于点 E ,连接 OD , OE ,过点 O ,作 $OP_1 \perp BC$ 垂足 Q_1 ,交 $\odot O$ 于 P_1 ,连接 AO ,延长 AO 与 BC 相交于点 F ,过 F 作 $FG \perp AB$ 于点 G ,如图1,此时垂线段 OQ_1 最短, P_1Q_1 最小值为 $OQ_1 - OP_1$,则四边形 $ODCQ_1$ 为矩形, AO 平分 $\angle BAC$,

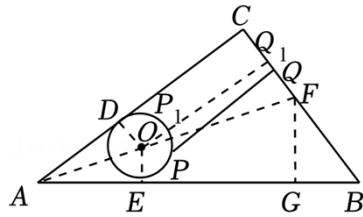


图1

$$\therefore CF = FG, .$$

设 $CF = FG = x$, 则 $BF = 6 - x$,

$$AC = AG = 8,$$

$$BG = AB - AG = 10 - 8 = 2,$$

由勾股定理得, $(6 - x)^2 - x^2 = 2^2$,

$$\text{解得: } x = \frac{8}{3},$$

$$\therefore GF = \frac{8}{3},$$

$$\therefore OE \parallel GF,$$

$$\therefore \triangle AOE \sim \triangle AFG,$$

$$\therefore \frac{OE}{FG} = \frac{AE}{AG}, \text{ 即 } \frac{1}{\frac{8}{3}} = \frac{AE}{8},$$

$$\therefore AE = 3,$$

$$\therefore AF = AE = 3,$$

$$\therefore OQ_1 = CD = 8 - 3 = 5,$$

$$\therefore P_1Q_1 = OQ_1 - OP_1 = 5 - 1 = 4,$$

如图2,当 Q_2 与 B 重合时,连接 BO ,延长 BO 与 $\odot O$ 交于点 P_2 ,

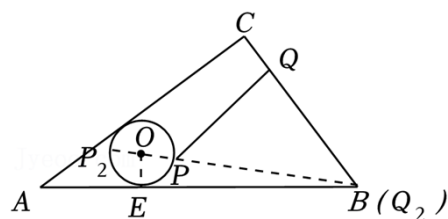


图2

此时 P_2Q_2 为最大值,

$$P_2Q_2 = OQ_2 + OP_2 = \sqrt{OE^2 + BE^2} + 1 = \sqrt{1^2 + (10-3)^2} + 1 = 5\sqrt{2} + 1,$$

$\therefore PQ$ 的最大值与最小值的和为:

$$P_1Q_1 + P_2Q_2 = 4 + 5\sqrt{2} + 1 = 5\sqrt{2} + 5,$$

故 $5\sqrt{2} + 5$.

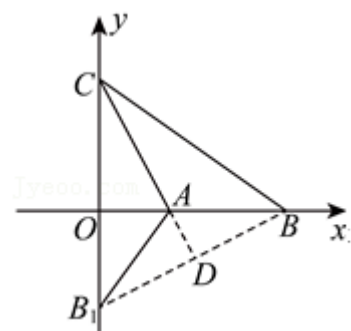
【点评】本题考查了切线的性质，勾股定理的逆定理，矩形的性质与判定，相似三角形的判定与性质，解答本题的关键是确定 PQ 的最小值与最大值的位置.

18. (3分) 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点 $A(n, 0)$ 、 $B(m, 0)$ 、 $C(0, 2n)$ ($m > n > 0$)，作 $\triangle ABC$ 关于直线 AC 的对称图形 $\triangle AB_1C$ ， B_1 恰好落在 y 轴上，则 $\frac{m}{n}$ 的值为 $-\frac{8}{3}$.

【分析】连接 BB_1 ，延长 CA 交 BB_1 于 D ，证明 $\triangle AOC \sim \triangle B_1OB$ ，推出 $\frac{OC}{OB} = \frac{AO}{OB_1}$ ，可得 $OB_1 = \frac{m}{2}$

，在 $Rt\triangle AOB_1$ 中，根据 $AB_1^2 = AO^2 + OB_1^2$ 构建关系式即可解决问题.

解：如图，连接 BB_1 ，延长 CA 交 BB_1 于 D ，



$\because B, B_1$ 关于 AC 对称，

$\therefore CD \perp BB_1$ ，

$\because \angle OCA + \angle OAC = 90^\circ$ ，

$\angle DBA + \angle BAD = 90^\circ$ ， $\angle OAC = \angle BAD$ ，

$\therefore \angle OAC = \angle DBA$ ，

$$\because \angle AOC = \angle BOB_1 = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AOC \sim \triangle B_1OB,$$

$$\therefore \frac{2n}{m} = \frac{n}{OB_1}, \text{ 即 } OB_1 = \frac{m}{2},$$

$$\text{在 Rt}\triangle AOB_1 \text{ 中, } (m-n)^2 = n^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2,$$

$$\text{整理得: } 3m^2 - 8nm = 0,$$

$$\because m \neq 0,$$

$$\therefore m = \frac{8}{3}n, \text{ 即 } \frac{m}{n} = \frac{8}{3},$$

$$\text{故 } \frac{8}{3}.$$

【点评】本题考查坐标与图形变化-对称，相似三角形的判定和性质，勾股定理等知识，解题的关键是正确寻找相似三角形解决问题．

三、解答题（共 96 分）

19. 解方程：

$$(1) x^2 - 6x + 3 = 0;$$

$$(2) (x+1)(x-2) = (x-2).$$

【分析】（1）利用配方法解方程即可；

（2）利用因式分解法解方程即可．

$$\text{解: } (1) \because x^2 - 6x + 3 = 0,$$

$$\therefore x^2 - 6x = -3,$$

$$\therefore x^2 - 6x + 9 = 6,$$

$$\therefore (x-3)^2 = 6,$$

$$\therefore x-3 = \pm\sqrt{6},$$

$$\text{解得 } x_1 = 3 - \sqrt{6}, \quad x_2 = 3 + \sqrt{6};$$

$$(2) \because (x+1)(x-2) = (x-2),$$

$$\therefore (x+1)(x-2) - (x-2) = 0,$$

$$\therefore (x+1-1)(x-2) = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = 0, \quad x_2 = 2.$$

【点评】

本题主要考查了解一元二次方程，熟知解一元二次方程的配方法和因式分解法是解题的关键.

20. 已知关于 x 的方程 $(x-2)(x-3)-k^2=0$.

(1) 证明：无论 k 取何值，方程总有两个不相等的实数根；

(2) 设方程的两根分别为 x_1, x_2 ，且 $x_1 > x_2$ ，证明： $x_1+2x_2 \leq 7$.

【分析】(1) 化成一般形式，求根的判别式，当 $\Delta > 0$ 时，方程总有两个不相等的实数根

(2) 根据根与系数的关系求出两根和，再把 x_1+2x_2 化为 $5+x_2$ ，再根据求根公式求出 x_2 ，并判断出 $x_2 \leq 2$ 即可.

证明：(1) $(x-3)(x-2)-k^2=0$,

即 $x^2-5x+6-k^2=0$,

$\therefore \Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times (6-k^2) = 25-24+4k^2 = 1+4k^2$,

$\therefore$ 无论 k 取何值时，总有 $4k^2 \geq 0$,

$\therefore 1+4k^2 > 0$,

$\therefore$ 无论 k 取何值时，方程总有两个不相等的实数根；

(2) $\therefore x_1+x_2=5$,

$\therefore x_1+2x_2 = x_1+x_2+x_2 = 5+x_2$,

$\therefore x_1 > x_2$,

$\therefore x_2 = \frac{5-\sqrt{4k^2+1}}{2}$,

$\therefore 4k^2+1 \geq 1$,

$\therefore \sqrt{4k^2+1} \geq 1$,

$\therefore \frac{5-\sqrt{4k^2+1}}{2} \leq 2$,

即 $x_2 \leq 2$,

$\therefore 5+x_2 \leq 7$,

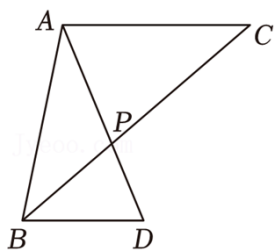
即 $x_1+2x_2 \leq 7$.

【点评】本题考查了抛物线与 x 轴的关系，根的判别式和根与系数的关系，关键是掌握根与系数的关系.

21. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， BC 恰好是 $\angle ABD$ 的角平分线.

(1) 求证: $\triangle APC \sim \triangle DPB$;

(2) 若 $AP=BP=1$, $AD=CP$, 求 DP 的长.



【分析】(1) 首先根据等腰三角形的性质得 $\angle ABC = \angle C$, 再根据角平分线的定义得 $\angle ABC = \angle DBC$, 于是可得出 $\angle C = \angle DBC$, 据此可得出结论;

(2) 设 $DP=x$, 则 $AD=CP=1+x$, 然后由 (1) 的结论得 $AP:DP=PC:BP$, 据此可得出 $x^2+x-1=0$, 然后解方程求出 x 即可.

(1) 证明: $\because AB=AC$,

$$\therefore \angle ABC = \angle C,$$

$\because BC$ 是 $\angle ABD$ 的平分线,

$$\therefore \angle ABC = \angle DBC,$$

$$\therefore \angle C = \angle DBC,$$

$$\text{又 } \angle APC = \angle DPB,$$

$$\therefore \triangle APC \sim \triangle DPB.$$

(2) 解: 设 $DP=x$,

$$\because AP=PB=1,$$

$$\therefore AD=AP+DP=1+x,$$

$$\text{又 } AD=CP,$$

$$\therefore CP=1+x,$$

由 (1) 得: $\triangle APC \sim \triangle DPB$,

$$\therefore AP:DP=PC:BP,$$

$$\text{即: } 1:x=(x+1):1,$$

$$\therefore x^2+x=1,$$

$$\therefore x^2+x-1=0,$$

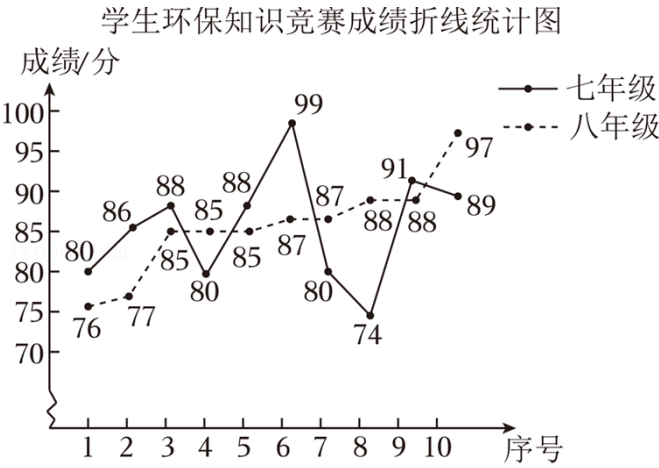
$$\text{解得: } x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ (不合题意, 舍去).}$$

$$\therefore DP = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

【点评】

此题主要考查了相似三角形的判定和性质，等腰三角形的性质，解答此题的关键是熟练掌握相似三角形的证明方法，理解相似三角形的性质，难点是设置适当的未知数，利用相似三角形的性质列出方程.

22. (100 分) 某校为了普及环保知识，从七、八两个年级中各选出 10 名学生参加环保知识竞赛，并对成绩进行整理分析，得到如下信息：



	平均数	众数	中位数
七年级参赛学生成绩	85.5	m	87
八年级参赛学生成绩	85.5	85	n

根据以上信息，回答下列问题：

- 填空： $m = \underline{80}$ ， $n = \underline{86}$ ；
- 七、八年级参赛学生成绩的方差分别记为 s_1^2 和 s_2^2 ，请判断 $s_1^2 \underline{>} s_2^2$ ；（填“>”、“<”或“=”）；
- 请你根据统计知识，利用数据对七、八年级的成绩进行比较与评价.

【分析】（1）根据众数和中位数的定义即可求出 m 和 n 的值；

（2）根据方差公式分别计算出 s_1^2 、 s_2^2 ，即可；

（3）从平均数和中位数进行分析即可.

解：（1）七年级成绩中 80 分的最多有 3 个，

所以众数： $m = 80$ ，

将八年级样成绩重新排列为：76，77，85，85，85，87，87，88，88，97，排在第 5 和第 6 的数是 85，87，

$$\therefore \text{中位数: } n = \frac{85+87}{2} = 86,$$

故 80, 86;

(2) $\because$ 七年级的方差是:

$$s_1^2 = \frac{1}{10} \times [(74-85.5)^2 + 3 \times (80-85.5)^2 + (86-85.5)^2 + 2 \times (88-85.5)^2 + (89-85.5)^2 + (91-85.5)^2]$$

, 八年级的方差是:

$$s_2^2 = \frac{1}{10} \times [(76-85.5)^2 + (77-85.5)^2 + 3 \times (85-85.5)^2 + 2 \times (87-85.5)^2 + 2 \times (88-85.5)^2 + (97-85.5)^2]$$

$$\therefore s_1^2 > s_2^2,$$

故 $s_1^2 > s_2^2$;

(3) 从众数和方差上看, 八年级比七年级成绩的大众水平较高, 且较为稳定; 从中位数看
七年级成绩比八年级中等水平较高,

综上所述, 我认为八年级的成绩较好.

【点评】本题考查了中位数、众数、方差, 明确平均数、中位数、众数、方差所反映数据的特征是解决问题、做出判断的前提.

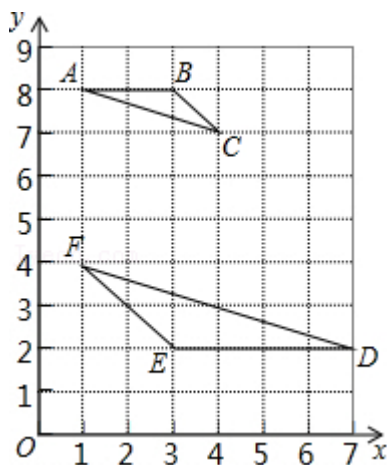
23. 如图, 在平面直角坐标系中, 每个小方格都是边长为 1 个单位的小正方形, 点 A 、 B 、 C 都是格点 (每个小方格的顶点叫格点), 其中 $A(1, 8)$, $B(3, 8)$, $C(4, 7)$.

(1) $\triangle ABC$ 外接圆的圆心坐标是 (2, 6);

(2) $\triangle ABC$ 外接圆的半径是 $\sqrt{5}$;

(3) 已知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ (点 D 、 E 、 F 都是格点) 成位似图形, 则位似中心 M 的坐标是 (3, 6);

(4) 请在网格图中的空白处画一个格点 $\triangle A_1B_1C_1$, 使 $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$, 且相似比为 $\sqrt{2}:1$.



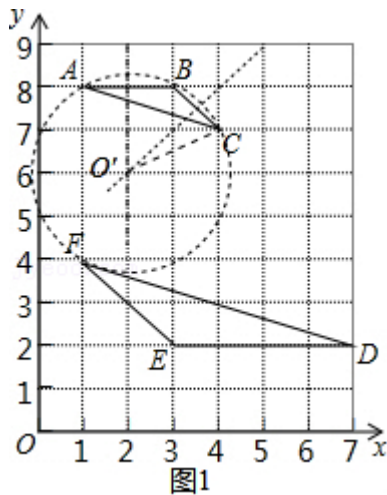
【分析】(1) 如图 1 中, 作线段 AB , BC 的垂直平分线交于点 O' , 点 O' 即为 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心;

(2) 利用两点间距离公式计算即可；

(3) 如图 2 中，由 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ，推出点 A 与点 D ，点 B 与点 E ，点 C 与点 F 是对应点，对应点连接的交点即为位似中心，如图点 M 即为所求；

(4) 根据相似三角形的性质求出 $\triangle A_1B_1C_1$ 的三边即可解决问题；

解：(1) 如图 1 中，作线段 AB ， BC 的垂直平分线交于点 O' ，点 O' 即为 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心， $O'(2, 6)$ 。



故答案为 $(2, 6)$ 。

(2) 连接 CO' ， $CO' = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 外接圆的半径是 $\sqrt{5}$ 。

故答案为 $\sqrt{5}$ 。

(3) 如图 2 中， $\because \triangle ABC \sim \triangle DEF$ ，

$\therefore$ 点 A 与点 D ，点 B 与点 E ，点 C 与点 F 是对应点，对应点连接的交点即为位似中心，如图点 M 即为所求。

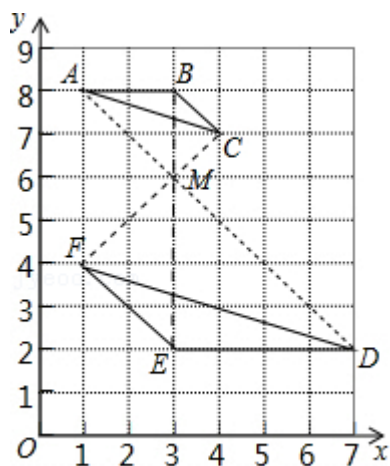


图2

观察图象可知 $M(3, 6)$

故答案为 $(3, 6)$.

(4) 如图, $\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求;

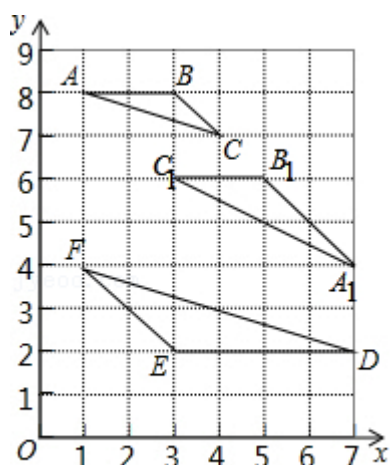


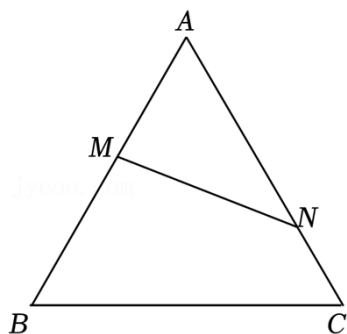
图3

【点评】本题属于圆综合题, 考查三角形的外接圆的外心, 位似变换, 相似三角形的判定和性质等知识, 解题的关键是熟练掌握基本知识, 灵活运用所学知识解决问题, 学会用数形结合的思想解决问题, 属于中考压轴题.

24. 如图, 在等边 $\triangle ABC$ 中, 点 M 、 N 分别在 AB 、 AC 边上.

(1) 在 BC 边上求作点 P , 使 $\angle MPN=60^\circ$; (尺规作图, 不写作法, 保留作图痕迹, 请找出所有满足条件的点.)

(2) 若 $AB=9$, $BM=5$, 设 $CN=a$, 若要使得 (1) 中只能作出唯一的点 P , 则 a 的值应该满足什么条件? 请通过计算说明.



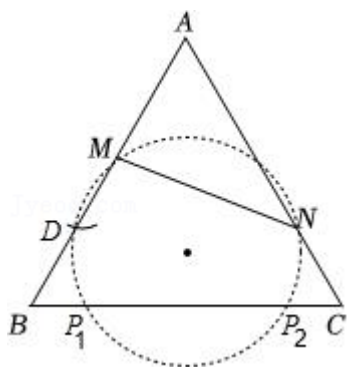
【分析】（1）以 A 为圆心， AN 为半径作弧，交 AB 于点 D ，作 $\triangle DMN$ 的外接圆，交 BC 于 P_1 、 P_2 ，即可完成作图；

（2）证 $\triangle MBP \sim \triangle PCN$ ，可得 $\frac{MB}{BP} = \frac{PC}{CN}$ 设 $BP = x$ ，列出方程 $\frac{5}{x} = \frac{9-x}{a}$ ，整理得 $x^2 - 9x + 5a = 0$ ，当该方程有两个不相等的实数根时，对应满足条件的点 P 有两个，当该方程有两个相等的实数根时，对应满足条件的点 P 只有一个，当该方程没有实数根时，对应满足条件的点 P 不存在，进而可以解决问题。

解：（1）①以 A 为圆心， AN 为半径作弧，交 AB 于点 D ，

②作 $\triangle DMN$ 的外接圆，交 BC 于 P_1 、 P_2 ，

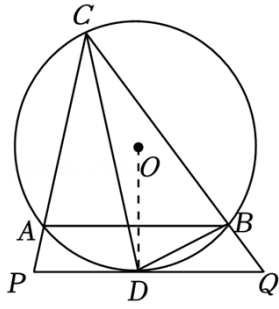
如图，点 P_1 、 P_2 即为所求；



（2）如图， $\because \angle MP_1N = 60^\circ$ ，
 $\therefore \angle MP_1B + \angle CP_1N = 120^\circ$ ，
 在等边 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = \angle C = 60^\circ$ ，
 $\therefore \angle MP_1B + \angle BMP_1 = 120^\circ$ ，
 $\therefore \angle BMP_1 = \angle CP_1N$ ，
 $\therefore \triangle MBP_1 \sim \triangle P_1CN$ ，

$$\therefore \frac{MB}{BP_1} = \frac{CP_1}{CN},$$

设 $BP_1 = x$ ，



$\because DC$ 平分 $\angle ACB$,

$\therefore \angle ACD = \angle BCD$,

$\therefore \widehat{AD} = \widehat{BD}$,

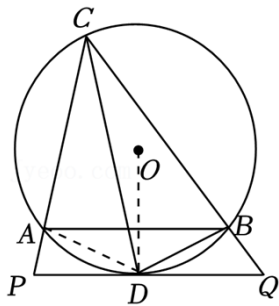
$\therefore OD \perp AB$,

$\because AB \parallel PQ$,

$\therefore OD \perp PQ$,

$\therefore PQ$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 解: 连接 AD ,



$\because AB \parallel PQ$,

$\angle ABC = \angle Q$, $\angle ADB = \angle BDQ$,

$\because \angle ADC = \angle ABC$, $\angle ABD = \angle ACD$,

$\therefore \angle ADC = \angle Q$, $\angle ACD = \angle BDQ$,

$\therefore \triangle BDQ \sim \triangle ACD$,

$\therefore \frac{AD}{BQ} = \frac{AC}{BD}$,

$\therefore BD^2 = AC \cdot BQ$,

$\therefore BD^2 = 4 \times 1 = 4$,

解得: $BD = 2$ 或 -2 (舍去).

$\therefore BD$ 的长为 2.

【点评】本题考查了相似三角形的判定和性质，一元二次方程根与系数的关系，圆周角定理，平行线的判定和性质，勾股定理，角平分线的定义，正确的作出辅助线是解题的关键，属于中考压轴题.

26. 某区各街道居民积极响应“创文明社区”活动，据了解，某街道居民人口共有 7.5 万人，街道划分为 A 、 B 两个社区， B 社区居民人口数量不超过 A 社区居民人口数量的 2 倍.

(1) 求 A 社区居民人口至少有多少万人？

(2) 街道工作人员调查 A 、 B 两个社区居民对“社会主义核心价值观”知晓情况发现： A 社区有 1.2 万人知晓， B 社区有 1 万人知晓，为了提高知晓率，街道工作人员用了两个月的时间加强宣传， A 社区的知晓人数平均月增长率为 $m\%$ ， B 社区的知晓人数第一个月增长了 $m\%$ ，第二个月增长了 $2m\%$ ，两个月后，街道居民的知晓率达到 76%，求 m 的值.

【分析】(1) 设 A 社区居民人口有 x 万人，根据“ B 社区居民人口数量不超过 A 社区居民人口数量的 2 倍”列出不等式求解即可；

(2) A 社区的知晓人数 + B 社区的知晓人数 = $7.5 \times 76\%$ ，据此列出关于 m 的方程并解答.

解：(1) 设 A 社区居民人口有 x 万人，则 B 社区有 $(7.5 - x)$ 万人，

依题意得： $7.5 - x \leq 2x$ ，

解得 $x \geq 2.5$.

即 A 社区居民人口至少有 2.5 万人；

(2) 依题意得： $1.2(1+m\%)^2 + 1 \times (1+m\%) \times (1+2m\%) = 7.5 \times 76\%$

设 $m\% = a$ ，方程可化为：

$$1.2(1+a)^2 + (1+a)(1+2a) = 5.7$$

化简得： $32a^2 + 54a - 35 = 0$

$$\text{解得 } a = 0.5 \text{ 或 } a = -\frac{35}{16} \text{ (舍)}$$

$$\therefore m = 50$$

答： m 的值为 50.

【点评】本题考查了一元二次方程和一元一次不等式的应用，解题的关键是读懂题意，找到题中相关数据的数量关系，列出不等式或方程.

27. 如图 1，边长为 6cm 的等边 $\triangle ABC$ 中， AD 是高，点 P 以 $\sqrt{3}\text{cm/s}$ 的速度从点 D 向 A 运动，以点 P 为圆心， 1cm 为半径作 $\odot P$ ，设点 P 的运动时间为 $t\text{s}$.

(1) 当 $\odot P$ 与边 AC 相切时, 求 t 的值;

(2) 如图2, 若在点 P 出发的同一时刻, 点 Q 以 1cm/s 的速度从点 B 向点 C 运动, 一个点停止运动时, 另一个点也随之停止运动. 过点 Q 作 BA 的平行线, 交 AC 于点 M . 当 QM 与 $\odot P$ 相切时, 求 t 的值;

(3) 在运动过程中, 当 $\odot P$ 与 $\triangle ABC$ 的边共有两个公共点时, 直接写出 t 的取值范围.

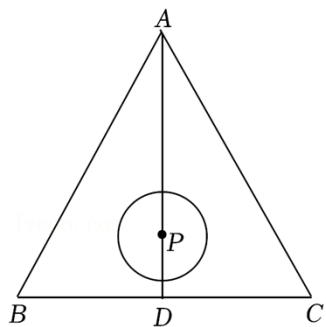


图1

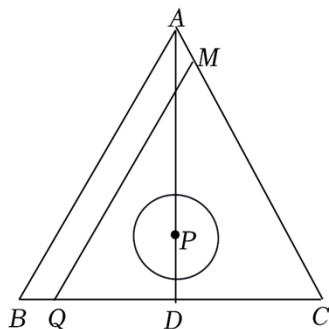
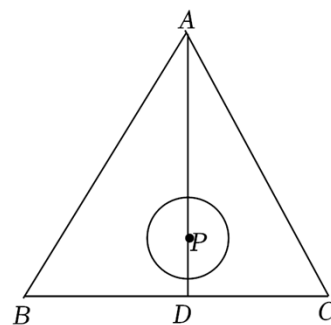


图2



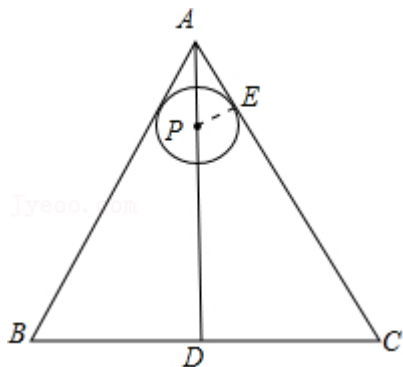
备用图

【分析】(1) 利用等边三角形的性质和切线的性质定理求得 AD , AP 的值, 进而得到 PD 的长度, 利用时间=距离÷速度即可得出结论;

(2) 利用分类讨论的方法分两种情况解答: 设 QM 与 $\odot P$ 相切于点 E , ①当点 E 在 AD 的左侧时, ②当点 P 在 AD 的右侧时, 连接 EP , 过点 M 作 $MH \perp AD$ 于点 H , 由题意得: $BQ = t$, $DP = \sqrt{3}t$, 利用等腰梯形的判定定理和性质定理可得 $AM = BQ$, 利用解直角三角形的知识与等腰三角形的性质可得 AF 的长, 再分别利用 $AF + FP + PD = AD$ 和 $AF + DP - FP = AD$, 列出关于 t 的方程, 解方程即可得出结论;

(3) 利用分段讨论的方法分析, 当线段 PD 取不同数值时, $\odot P$ 与 $\triangle ABC$ 的边的公共点的个数, 利用时间=距离÷速度即可求得 t 的取值范围.

解: (1) 设 $\odot P$ 与边 AC 相切点 E , 连接 PE , 如图,



则 $PE \perp AC$.

$\because \triangle ABC$ 是边长为6的等边三角形, AD 是高,

$$\therefore BD = \frac{1}{2}BC = 3\text{cm}, \quad \angle DAC = \frac{1}{2}\angle BAC = 30^\circ.$$

$$\therefore AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 3\sqrt{3},$$

$$\text{由题意得: } PD = \sqrt{3}t\text{ cm},$$

$$\therefore AP = AD - PD = (3\sqrt{3} - \sqrt{3}t)\text{ cm}.$$

在 $\text{Rt}\triangle APE$ 中,

$$\therefore \sin \angle PAE = \frac{PE}{AP},$$

$$\therefore AP = \frac{PE}{\sin \angle PAE}.$$

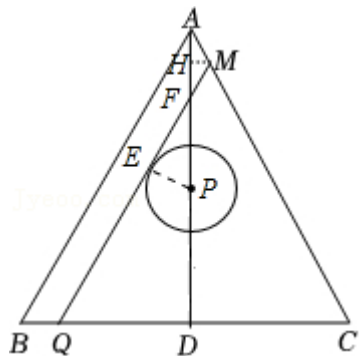
$$\therefore 3\sqrt{3} - \sqrt{3}t = \frac{1}{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{解得: } t = 3 - \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\therefore \text{当 } \odot P \text{ 与边 } AC \text{ 相切时, } t \text{ 的值为 } 3 - \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

(2) 设 QM 与 $\odot P$ 相切于点 E ,

① 当点 E 在 AD 的左侧时, 设 QM 与 AD 交于点 F , 如图,



连接 EP , 过点 M 作 $MH \perp AD$ 于点 H ,

$\therefore QM$ 与 $\odot P$ 相切于点 E ,

$$\therefore EP \perp QM.$$

$\therefore \triangle ABC$ 是边长为 6 的等边三角形, AD 是高,

$$\therefore \angle DAB = \angle DAC = \frac{1}{2}\angle BAC = 30^\circ.$$

$$\therefore QM \parallel AB,$$

$$\therefore \angle QFD = \angle BAD = 30^\circ.$$

$$\therefore \angle AFM = \angle QFD,$$

$$\therefore \angle AFM = 30^\circ.$$

$$\therefore \angle FAM = \angle AFM = 30^\circ.$$

$$\therefore AM = FM.$$

$$\therefore MH \perp AD,$$

$$\therefore AH = FH = \frac{1}{2} AF.$$

$$\text{由题意得: } BQ = t, DP = \sqrt{3}t,$$

$$\therefore \angle B = \angle BAC = 60^\circ, AB \parallel QM,$$

$$\therefore \text{四边形 } ABQM \text{ 为等腰梯形},$$

$$\therefore AM = BQ = t.$$

$$\therefore AH = AM \cdot \cos \angle DAC = \frac{\sqrt{3}}{2} t.$$

$$\therefore AF = 2AH = \sqrt{3}t.$$

$$\therefore EP \perp QM, \angle EFP = 30^\circ,$$

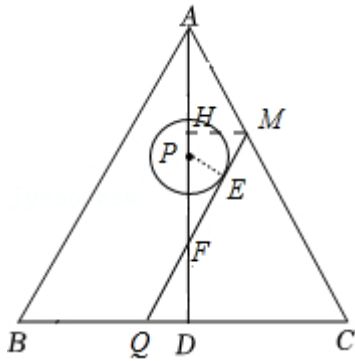
$$\therefore FP = 2EP = 2.$$

$$\therefore AF + FP + PD = AD,$$

$$\therefore \sqrt{3}t + 2 + \sqrt{3}t = 3\sqrt{3}.$$

$$\text{解得: } t = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3};$$

②当点 P 在 AD 的右侧时, 设 QM 与 AD 交于点 F , 如图,



连接 EP , 过点 M 作 $MH \perp AD$ 于点 H ,

$$\therefore QM \text{ 与 } \odot P \text{ 相切于点 } E,$$

$$\therefore EP \perp QM.$$

$\therefore \triangle ABC$ 是边长为 6 的等边三角形, AD 是高,

$$\therefore \angle DAB = \angle DAC = \frac{1}{2} \angle BAC = 30^\circ.$$

$$\because QM \parallel AB,$$

$$\therefore \angle QFD = \angle BAD = 30^\circ.$$

$$\because \angle AFM = \angle QFD,$$

$$\therefore \angle AFM = 30^\circ.$$

$$\therefore \angle FAM = \angle AFM = 30^\circ.$$

$$\therefore AM = FM.$$

$$\because MH \perp AD,$$

$$\therefore AH = FH = \frac{1}{2} AF.$$

$$\text{由题意得: } BQ = t, DP = \sqrt{3}t,$$

$$\because \angle B = \angle BAC = 60^\circ, AB \parallel QM,$$

$$\therefore \text{四边形 } ABQM \text{ 为等腰梯形},$$

$$\therefore AM = BQ = t.$$

$$\therefore AH = AM \cdot \cos \angle DAC = \frac{\sqrt{3}}{2} t.$$

$$\therefore AF = 2AH = 2\sqrt{3}t.$$

$$\because EP \perp QM, \angle EFP = 30^\circ,$$

$$\therefore FP = 2EP = 2.$$

$$\because AF + DP - FP = AD,$$

$$\therefore \sqrt{3}t + \sqrt{3}t - 2 = 3\sqrt{3}.$$

$$\text{解得: } t = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{综上, 当 } QM \text{ 与 } \odot P \text{ 相切时, } t \text{ 的值为 } \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \text{ 或 } \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

(3) ①当 $0 \leq PD < 1$ 时, 此时 $\odot P$ 与 BC 相交, $\odot P$ 与 BC 边有两个公共点, 符合题意,

$$\therefore \text{此时 } t \text{ 的取值范围为 } 0 \leq t < \frac{\sqrt{3}}{3};$$

②当 $1 < PD < 3\sqrt{3} - 2$ 时, 此时 $\odot P$ 与 $\triangle ABC$ 的三边均相离, 没有公共点;

③当 $PD = 3\sqrt{3} - 2$ 时, 此时 $\odot P$ 与 AB, AC 边相切, 此时 $\odot P$ 与 $\triangle ABC$ 的边共有两个公共点;

$$\therefore \text{由 (1) 知: } t = 3 - \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/748010102011007046>