

2024 届陕西省子洲中学高三下学期 3 月第二次诊断性检测试题数学试题

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若函数 $f(x) = e^x$ 的图象上两点 M ， N 关于直线 $y = x$ 的对称点在 $g(x) = ax - 2$ 的图象上，则 a 的取值范围是()

- A. $\left(-\infty, \frac{e}{2}\right)$ B. $(-\infty, e)$ C. $\left(0, \frac{e}{2}\right)$ D. $(0, e)$

2. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 、 Q 分别为 AB 、 AD 的中点，过点 D 作平面 α 使 $B_1P \parallel$ 平面 α ， $A_1Q \parallel$ 平面 α 若直线 $B_1D_1 \cap$ 平面 $\alpha = M$ ，则 $\frac{MD_1}{MB_1}$ 的值为()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

3. 已知复数 z 满足 $\frac{1}{z} = 1 - i$ ，则 $\bar{z} =$ ()

- A. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ B. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
C. $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ D. $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

4. 已知公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 S_n ， $a_1 = 2$ ，且 a_1, a_3, a_9 成等比数列，则 $S_8 =$ ()

- A. 56 B. 72 C. 88 D. 40

5. 一只蚂蚁在边长为 4 的正三角形区域内随机爬行，则在离三个顶点距离都大于 2 的区域内的概率为()

- A. $1 - \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$ D. $\frac{1}{4}$

6. 若圆锥轴截面面积为 $2\sqrt{3}$ ，母线与底面所成角为 60° ，则体积为()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}\pi$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ D. $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$

7. 已知 $x > 0$ ， $a = x$ ， $b = x - \frac{x^2}{2}$ ， $c = \ln(1+x)$ ，则()

- A. $c < b < a$ B. $b < a < c$ C. $c < a < b$ D. $b < c < a$

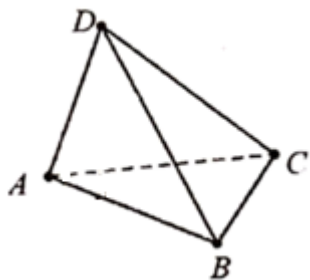
8. 已知非零向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，则“ $|\vec{a} + 2\vec{b}| = |2\vec{a} - \vec{b}|$ ”是“ $\vec{a} \perp \vec{b}$ ”的()

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件解:

9. 已知集合 $A = \{x \mid x > 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - x + b = 0\}$, 若 $A \cap B = \{3\}$, 则 $b =$ ()

A. -6 B. 6 C. 5 D. -5

10. 如图, 已知三棱锥 $D-ABC$ 中, 平面 $DAB \perp$ 平面 ABC , 记二面角 $D-AC-B$ 的平面角为 α , 直线 DA 与平面 ABC 所成角为 β , 直线 AB 与平面 ADC 所成角为 γ , 则 ()

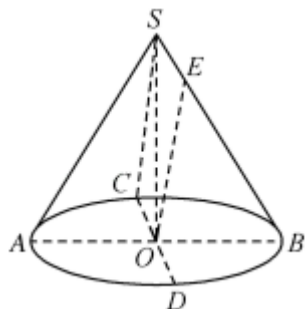


A. $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ B. $\beta \geq \alpha \geq \gamma$ C. $\alpha \geq \gamma \geq \beta$ D. $\gamma \geq \alpha \geq \beta$

11. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_2 = \frac{1}{9}$, $S_3 = \frac{7}{27}$, 则 $a_1 a_2 \dots a_n$ 的最小值为 ()

A. $(\frac{4}{27})^2$ B. $(\frac{4}{27})^3$ C. $(\frac{4}{27})^4$ D. $(\frac{4}{27})^5$

12. 如图, 在圆锥 SO 中, AB, CD 为底面圆的两条直径, $AB \cap CD = O$, 且 $AB \perp CD$, $SO = OB = 3$, $SE = \frac{1}{4}SB$, 异面直线 SC 与 OE 所成角的正切值为 ()



A. $\frac{\sqrt{22}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ C. $\frac{13}{16}$ D. $\frac{\sqrt{11}}{3}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. $(3-x)^7$ 的展开式中, x^5 的系数是_____。(用数字填写答案)

14. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} x+y+2 \geq 0 \\ 2x-y-2 \leq 0 \\ y \leq 1 \end{cases}$, 则 $z = 3x + y$ 的最小值是_____.

15. $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c , 已知 $2b \cos A = 2c + \sqrt{3}a$, 则 $\angle B =$ _____.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 60^\circ$, AD 为 $\angle BAC$ 的角平分线, 且 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, 若 $AB = 2$, 则 $BC =$ _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A 、 B , 焦距为 2, 直线 l 与椭圆交于 C, D 两点 (均异于椭圆的左、右顶点). 当直线 l 过椭圆的右焦点 F 且垂直于 x 轴时, 四边形 $ACBD$ 的面积为 6.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 设直线 AC, BD 的斜率分别为 k_1, k_2 .

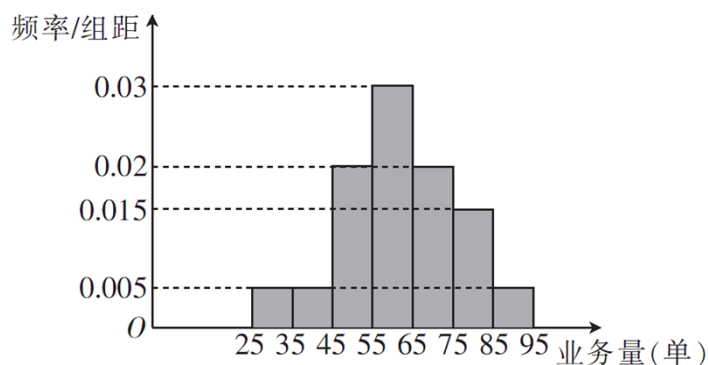
①若 $k_2 = 3k_1$, 求证: 直线 l 过定点;

②若直线 l 过椭圆的右焦点 F , 试判断 $\frac{k_1}{k_2}$ 是否为定值, 并说明理由.

18. (12 分) 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴, 且在两种坐标系中取相同的长度单位, 建立极坐标系, 判断

直线 $l: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - 2t \end{cases} (t \text{ 为参数})$ 与圆 $C: \rho^2 + 2\rho \cos \theta - 2\rho \sin \theta = 0$ 的位置关系.

19. (12 分) 某大学开学期间, 该大学附近一家快餐店招聘外卖骑手, 该快餐店提供了两种日工资结算方案: 方案 (a) 规定每日底薪 100 元, 外卖业务每完成一单提成 2 元; 方案 (b) 规定每日底薪 150 元, 外卖业务的前 54 单没有提成, 从第 55 单开始, 每完成一单提成 5 元. 该快餐店记录了每天骑手的人均业务量, 现随机抽取 100 天的数据, 将样本数据分为 $[25, 35), [35, 45), [45, 55), [55, 65), [65, 75), [75, 85), [85, 95]$ 七组, 整理得到如图所示的频率分布直方图.



(1) 随机选取一天, 估计这一天该快餐店的骑手的人均日外卖业务量不少于 65 单的概率;

(2) 从以往统计数据看, 新聘骑手选择日工资方案 (a) 的概率为 $\frac{1}{3}$, 选择方案 (b) 的概率为 $\frac{2}{3}$. 若甲、乙、丙、丁四名

骑手分别到该快餐店应聘, 四人选择日工资方案相互独立, 求至少有两名骑手选择方案 (a) 的概率,

(3) 若仅从人日均收入的角度考虑, 请你为新聘骑手做出日工资方案的选择, 并说明理由. (同组中的每个数据用该组区间的中点值代替)

20. (12 分) 在① $a=2$, ② $a=b=2$, ③ $b=c=2$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 求 $\triangle ABC$ 的面积的值 (或最大值). 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 三边 a, b, c 与面积 S 满足关系式 $4S=b^2+c^2-a^2$, 且_____ , 求 $\triangle ABC$ 的面积的值 (或最大值).

21. (12 分) 已知函数 $f(x)=ax^2+ax+1-e^{2x}$.

(1) 若函数 $g(x)=f'(x)$, 试讨论 $g(x)$ 的单调性;

(2) 若 $\forall x \in (0, +\infty)$, $f(x) < 0$, 求 a 的取值范围.

22. (10 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, 公差 $d>0$, 等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=a_1$, $b_2=a_2$, $b_3=a_5$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{c_n\}$ 满足 $\frac{c_1}{b_1} + \frac{c_2}{b_2} + \frac{c_3}{b_3} + \cdots + \frac{c_n}{b_n} = a_{n+1}$, 求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、D

【解析】

由题可知, 可转化为曲线 $g(x)=ax-2$ 与 $y=\ln x$ 有两个公共点, 可转化为方程 $ax-2=\ln x$ 有两解, 构造函数

$h(x)=\frac{2+\ln x}{x}$, 利用导数研究函数单调性, 分析即得解

【详解】

函数 $f(x)=e^x$ 的图象上两点 M, N 关于直线 $y=x$ 的对称点在 $y=\ln x$ 上,

即曲线 $g(x)=ax-2$ 与 $y=\ln x$ 有两个公共点,

即方程 $ax-2=\ln x$ 有两解,

即 $a=\frac{2+\ln x}{x}$ 有两解,

$$\text{令 } h(x) = \frac{2 + \ln x}{x},$$

$$\text{则 } h'(x) = \frac{-1 - \ln x}{x^2},$$

则当 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $h'(x) > 0$; 当 $x > \frac{1}{e}$ 时, $h'(x) < 0$,

故 $x = \frac{1}{e}$ 时 $h(x)$ 取得极大值 $h\left(\frac{1}{e}\right) = e$, 也即为最大值,

当 $x \rightarrow 0$ 时, $h(x) \rightarrow -\infty$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $h(x) \rightarrow 0$,

所以 $0 < a < e$ 满足条件.

故选: D

【点睛】

本题考查了利用导数研究函数的零点, 考查了学生综合分析, 转化划归, 数形结合, 数学运算的能力, 属于较难题.

2、B

【解析】

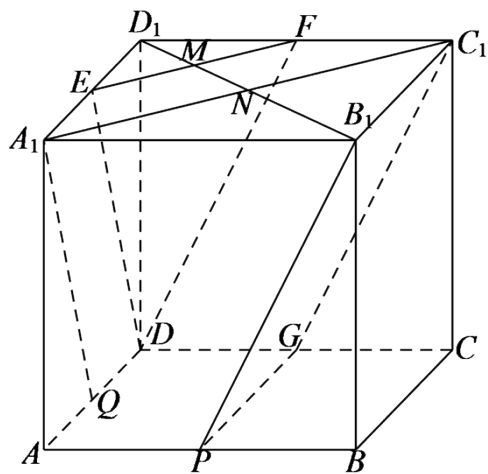
作出图形, 设平面 α 分别交 A_1D_1 、 C_1D_1 于点 E 、 F , 连接 DE 、 DF 、 EF , 取 CD 的中点 G , 连接 PG 、 C_1G ,

连接 A_1C_1 交 B_1D_1 于点 N , 推导出 $B_1P \parallel C_1G$, 由线面平行的性质定理可得出 $C_1G \parallel DF$, 可得出点 F 为 C_1D_1 的中点,

同理可得出点 E 为 A_1D_1 的中点, 结合中位线的性质可求得 $\frac{MD_1}{MB_1}$ 的值.

【详解】

如下图所示:



设平面 α 分别交 A_1D_1 、 C_1D_1 于点 E 、 F , 连接 DE 、 DF 、 EF , 取 CD 的中点 G , 连接 PG 、 C_1G , 连接 A_1C_1 交 B_1D_1 于点 N ,

Q 四边形 $ABCD$ 为正方形, P 、 G 分别为 AB 、 CD 的中点, 则 $BP \parallel CG$ 且 $BP = CG$,

$\therefore$ 四边形 $BCGP$ 为平行四边形, $\therefore PG \parallel BC$ 且 $PG = BC$,

Q $B_1C_1 \parallel BC$ 且 $B_1C_1 = BC$, $\therefore PG \parallel B_1C_1$ 且 $PG = B_1C_1$, 则四边形 B_1C_1GP 为平行四边形,

$\therefore B_1P \parallel C_1G$, Q $B_1P \parallel$ 平面 α , 则存在直线 $a \subset$ 平面 α , 使得 $B_1P \parallel a$,

若 $C_1G \subset$ 平面 α , 则 $G \in$ 平面 α , 又 $D \in$ 平面 α , 则 $CD \subset$ 平面 α ,

此时, 平面 α 为平面 CDD_1C_1 , 直线 A_1Q 不可能与平面 α 平行,

所以, $C_1G \not\subset$ 平面 α , $\therefore C_1G \parallel a$, $\therefore C_1G \parallel$ 平面 α ,

Q $C_1G \subset$ 平面 CDD_1C_1 , 平面 $CDD_1C_1 \perp$ 平面 $\alpha = DF$, $\therefore DF \parallel C_1G$,

Q $C_1F \parallel DG$, 所以, 四边形 C_1GDF 为平行四边形, 可得 $C_1E = DG = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}C_1D_1$,

$\therefore F$ 为 C_1D_1 的中点, 同理可证 E 为 A_1D_1 的中点, Q $B_1D_1 \perp EF = M$, $\therefore MD_1 = \frac{1}{2}D_1N = \frac{1}{4}B_1D_1$, 因此, $\frac{MD_1}{MB_1} = \frac{1}{3}$.

故选: B.

【点睛】

本题考查线段长度比值的计算, 涉及线面平行性质的应用, 解答的关键就是找出平面 α 与正方体各棱的交点位置, 考查推理能力与计算能力, 属于中等题.

3、B

【解析】

利用复数的代数运算法则化简即可得到结论.

【详解】

由 $\frac{1}{z} = 1 - i$, 得 $z = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$,

所以, $\bar{z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

故选: B.

【点睛】

本题考查复数代数形式的乘除运算, 考查复数的基本概念, 属于基础题.

4、B

【解析】

$a_3^2 = a_1a_9 \Leftrightarrow (a_1 + 2d)^2 = a_1(a_1 + 8d)$, 将 $a_1 = 2$ 代入, 求得公差 d , 再利用等差数列的前 n 项和公式计算即可.

【详解】

由已知, $a_3^2 = a_1 a_9$, $a_1 = 2$, 故 $(a_1 + 2d)^2 = a_1(a_1 + 8d)$, 解得 $d = 2$ 或 $d = 0$ (舍),

故 $a_n = 2 + (n-1) \times 2 = 2n$, $S_8 = \frac{8(a_1 + a_8)}{2} = 4(2 + 2 \times 8) = 72$.

故选: B.

【点睛】

本题考查等差数列的前 n 项和公式, 考查等差数列基本量的计算, 是一道容易题.

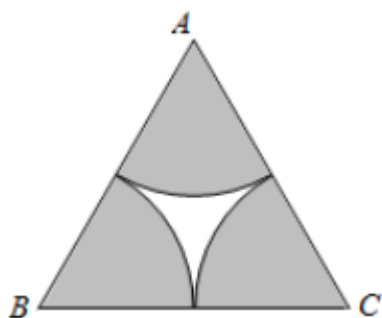
5、A

【解析】

求出满足条件的正 $\triangle ABC$ 的面积, 再求出满足条件的正 $\triangle ABC$ 内的点到顶点 A 、 B 、 C 的距离均不小于 2 的图形的面积, 然后代入几何概型的概率公式即可得到答案.

【详解】

满足条件的正 $\triangle ABC$ 如下图所示:



其中正 $\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3}$,

满足到正 $\triangle ABC$ 的顶点 A 、 B 、 C 的距离均不小于 2 的图形平面区域如图中阴影部分所示,

阴影部分区域的面积为 $S = \frac{1}{2} \times \pi \times 2^2 = 2\pi$.

则使取到的点到三个顶点 A 、 B 、 C 的距离都大于 2 的概率是 $P = 1 - \frac{2\pi}{4\sqrt{3}} = 1 - \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$.

故选: A.

【点睛】

本题考查几何概型概率公式、三角形的面积公式、扇形的面积公式的应用, 考查计算能力, 属于中等题.

6、D

【解析】

设圆锥底面圆的半径为 r , 由轴截面面积为 $2\sqrt{3}$ 可得半径 r , 再利用圆锥体积公式计算即可.

【详解】

设圆锥底面圆的半径为 r ，由已知， $\frac{1}{2} \times 2r \times \sqrt{3}r = 2\sqrt{3}$ ，解得 $r = \sqrt{2}$ ，

所以圆锥的体积 $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \times \sqrt{3}r = \frac{2\sqrt{6}}{3} \pi$ 。

故选：D

【点睛】

本题考查圆锥的体积的计算，涉及到圆锥的定义，是一道容易题。

7、D

【解析】

令 $f(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$ ，求 $f'(x)$ ，利用导数判断函数为单调递增，从而可得 $\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$ ，设

$g(x) = \ln(1+x) - x$ ，利用导数证出 $g(x)$ 为单调递减函数，从而证出 $\forall x > 0, \ln(1+x) < x$ ，即可得到答案。

【详解】

$x > 0$ 时， $x > x - \frac{x^2}{2}$

令 $f(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$ ，求导 $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x}$

$\forall x > 0, f'(x) > 0$ ，故 $f(x)$ 单调递增： $f(x) > f(0) = 0$

$\therefore \ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$ ，

当 $x > 0$ ，设 $g(x) = \ln(1+x) - x$ ，

$\therefore g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} < 0$ ，

又 $Q g(0) = 0$ ，

$\therefore g(x) = \ln(1+x) - x < 0$ ，即 $\forall x > 0, \ln(1+x) < x$ ，

故 $x > \ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$ 。

故选：D

【点睛】

本题考查了作差法比较大小，考查了构造函数法，利用导数判断式子的大小，属于中档题。

8、C

【解析】

根据向量的数量积运算，由向量的关系 $|\vec{a} + 2\vec{b}| = |2\vec{a} - \vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ ，可得选项。

【详解】

$$|\vec{a} + 2\vec{b}| = |2\vec{a} - \vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = |2\vec{a} - \vec{b}|^2 \Leftrightarrow \vec{a}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2 = 4\vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2,$$

$$Q |\vec{a}| = |\vec{b}| \neq 0, \therefore \text{等价于 } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b},$$

故选：C.

【点睛】

本题考查向量的数量积运算和命题的充分、必要条件，属于基础题。

9、A

【解析】

由 $A \cap B = \{3\}$ ，得 $3 \in B$ ，代入集合 B 即可得 b。

【详解】

$$Q A \cap B = \{3\}, \therefore 3 \in B, \therefore 9 - 3 + b = 0, \text{ 即: } b = -6,$$

故选：A

【点睛】

本题考查了集合交集的含义，也考查了元素与集合的关系，属于基础题。

10、A

【解析】

作 $DD' \perp AB$ 于 D' , $DE \perp AC$ 于 E , 分析可得 $\alpha = \angle DED'$, $\beta = \angle DAD'$, 再根据正弦的大小关系判断分析得 $\alpha \geq \beta$,

再根据线面角的最小性判定 $\beta \geq \gamma$ 即可。

【详解】

作 $DD' \perp AB$ 于 D' , $DE \perp AC$ 于 E 。

因为平面 $DAB \perp$ 平面 ABC , $DD' \perp$ 平面 ABC . 故 $AC \perp DE$, $AC \perp DD'$,

故 $AC \perp$ 平面 DED' . 故二面角 $D-AC-B$ 为 $\alpha = \angle DED'$ 。

又直线 DA 与平面 ABC 所成角为 $\beta = \angle DAD'$, 因为 $DA \geq DE$,

$$\text{故 } \sin \angle DED' = \frac{DD'}{DE} \leq \frac{DD'}{DA} = \sin \angle DAD'. \text{ 故 } \alpha \geq \beta, \text{ 当且仅当 } A, E \text{ 重合时取等号.}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/748016032027006137>