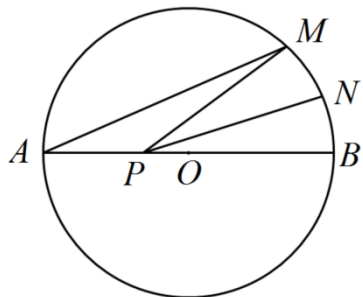


专题 12 圆中将军饮马

1. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, $AB=8$, 点 M 在 $\odot O$ 上, $\angle MAB=20^\circ$, N 是弧 MB 的中点, P 是直径 AB 上的一动点, 若 $MN=a$, 则 $\triangle PMN$ 周长的最小值为 ()

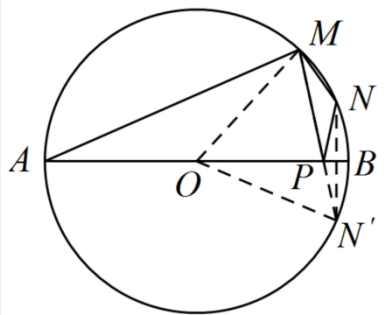


- A. 4 B. $4+a$ C. $2+a$ D. $3+a$

【答案】B

【分析】根据轴对称的性质得到: 点 N 关于 AB 的对称点 N' , 连接 MN' 交 AB 于 P , 此时 $PM+PN$ 最小, 即 $\triangle PMN$ 周长的最小, 利用圆的对称性进行计算即可.

【详解】解: 如图, 作点 N 关于 AB 的对称点 N' , 则点 N' 在 $\odot O$ 上, 连接 MN' 交 AB 于 P , 此时 $PM+PN$ 最小, 即 $PM+PN=MN'$, 连接 OM 、 ON' 、 PN ,



$\because$ 点 N 是 $\widehat{BM}$ 的中点, $\angle BAM=20^\circ$,

$\therefore \angle BOM = 2\angle BAM = 40^\circ$

$\therefore \widehat{MN} = \widehat{NB} = \widehat{BN'}$,

$\therefore \angle BON' = \frac{1}{2}\angle MOB = 20^\circ$,

$\therefore \angle MON' = 60^\circ$,

$\because OM = ON'$

$\therefore \triangle MON'$ 是正三角形,

$\therefore OM = ON' = MN' = \frac{1}{2}AB = 4$,

$\because MN = a$,

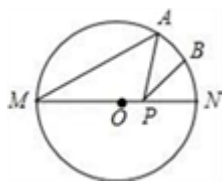
$$\triangle PMN \text{ 周长} = MP + PN + MN = MP + PN' + MN = MN' + MN = 4 + a$$

$\therefore \triangle PMN$ 周长的最小值为 $4+a$,

故选：B.

【点睛】本题考查圆周角定理，圆心角、弧、弦的关系以及轴对称，掌握圆周角定理，圆心角、弧、弦的关系以及轴对称的性质是解决问题的关键.

2. 如图，MN 是 $\odot O$ 的直径，MN=4， $\angle AMN=40^\circ$ ，点 B 为弧 AN 的中点，点 P 是直径 MN 上的一个动点，则 PA+PB 的最小值为（ ）



A. 2

B. $2\sqrt{2}$

C. $2\sqrt{3}$

D. 3

【答案】C

【详解】过 A 作关于直线 MN 的对称点 A'，连接 A'B，由轴对称的性质可知 A'B 即为 PA+PB 的最小值，

连接 OB，OA'，AA'，

$\because$ AA' 关于直线 MN 对称，

$$\therefore \widehat{AN} = \widehat{A'N},$$

$$\because \angle AMN = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle A'ON = 80^\circ, \angle BON = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle A'OB = 120^\circ,$$

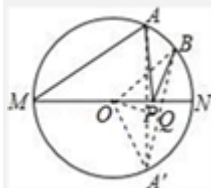
过 O 作 $OQ \perp A'B$ 于 Q，

在 $Rt\triangle A'OQ$ 中， $OA' = 2$ ，

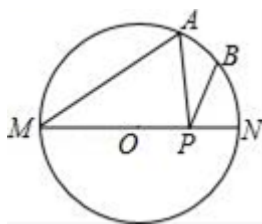
$$\therefore A'B = 2A'Q = 2\sqrt{3},$$

即 PA+PB 的最小值 $2\sqrt{3}$.

故选 C.



3. 如图，MN 是 $\odot O$ 的直径， $\angle AMN=40^\circ$ ，点 B 为弧 AN 的中点，点 P 是直径 MN 上的一个动点，如果 PA+PB 的最小值为 $\sqrt{3}$ ，那么 $\odot O$ 的直径等于（ ）



A. 2

B. 3

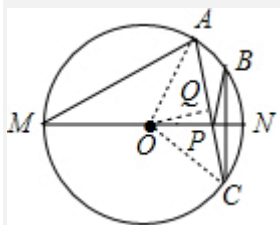
C. 4

D. 5

【答案】A

【分析】首先利用在直线 L 上的同侧有两个点 A、B，在直线 L 上有到 A、B 的距离之和最短的点存在，可以通过轴对称来确定，即作出其中一点关于直线 L 的对称点，对称点与另一点的连线与直线 L 的交点就是所要找的点 P 的位置，然后根据弧的度数发现一个等腰直角三角形计算．

【详解】解：作点 B 关于 MN 的对称点 C，连接 AC 交 MN 于点 P，则 P 点就是所求作的点．



此时 $PA+PB$ 最小，且等于 AC 的长．

连接 OA ， OC ，

$\because \angle AMN=40^\circ$ ，

$\therefore \angle AON=80^\circ$ ，

$\widehat{AN}$ 的度数是 80° ，

则 $\widehat{BN}$ 的度数是 40° ，

根据垂径定理得 $\widehat{CN}$ 的度数是 40° ，

则 $\angle AOC=120^\circ$ ，

作 $OQ \perp AC$ 于点 Q ，

则 $\angle AOQ=60^\circ$ ， $AQ=\frac{1}{2}AC=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

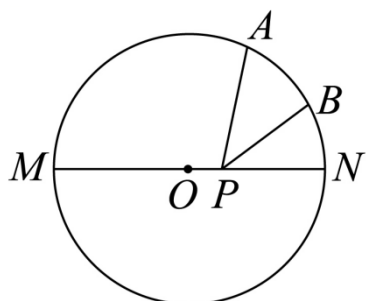
$\therefore OA=1$ ，

$\therefore MN=2OA=2$ ，

故选 A．

【点睛】此题主要考查了轴对称-最短路线问题，垂径定理，直角三角形的性质等，确定点P的位置是本题的关键．

4. 如图，MN是⊙O的直径，点A是半圆上的三等分点，点B是劣弧AN的中点，点P是直径MN上一动点．若 $MN=2\sqrt{2}$ ， $AB=1$ ，则△PAB周长的最小值是（ ）



A. $2\sqrt{2}+1$

B. $\sqrt{2}+1$

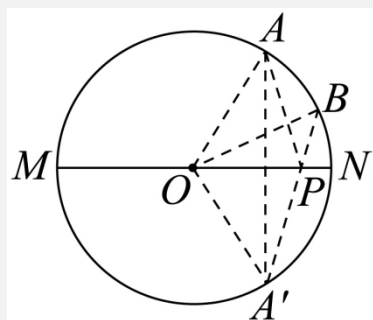
C. 2

D. 3

【答案】D

【分析】作点A关于MN的对称点A'，连接A'B，交MN于点P，连接OA'，OA，OB，PA，AA'．所以点A与A'关于MN对称，点A是半圆上的一个三等分点，所以 $\angle A'ON = \angle AON = 60^\circ$ ， $PA = PA'$ ， $OA = OA' = \sqrt{2}$ ，因为点B是弧AN的中点，所以 $\angle BON = 30^\circ$ ， $\angle A'OB = \angle A'ON + \angle BON = 90^\circ$ ，再由勾股定理求出 $A'B = 2$ ，最后即可求解．

【详解】



作点A关于MN的对称点A'，连接A'B，交MN于点P，连接OA'，OA，OB，PA，AA'．

∵点A与A'关于MN对称，点A是半圆上的一个三等分点，

∴ $\angle A'ON = \angle AON = 60^\circ$ ， $PA = PA'$ ，

∵点B是弧AN的中点，

∴ $\angle BON = 30^\circ$ ，

∴ $\angle A'OB = \angle A'ON + \angle BON = 90^\circ$ ，

又∵ $OA = OA' = \sqrt{2}$ ，

∴ $A'B = 2$ ．

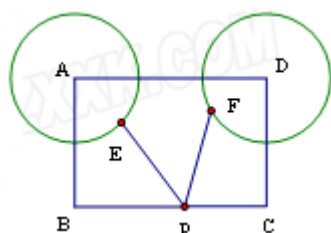
$$\therefore PA+PB=PA'+PB=A'B=2.$$

$$\therefore \triangle PAB \text{ 周长的最小值} = PA+PB+AB=2+1=3$$

故选 D.

【点睛】本题主要考查轴对称，勾股定理，圆心角，圆周角，弧和弦等知识点，熟练掌握是关键.

5. 如图，矩形 ABCD 中，AB=2，BC=3，分别以 A、D 为圆心，1 为半径画圆，E、F 分别是 $\odot A$ 、 $\odot D$ 上的一动点，P 是 BC 上的一动点，则 PE+PF 的最小值是 ()



- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【答案】C

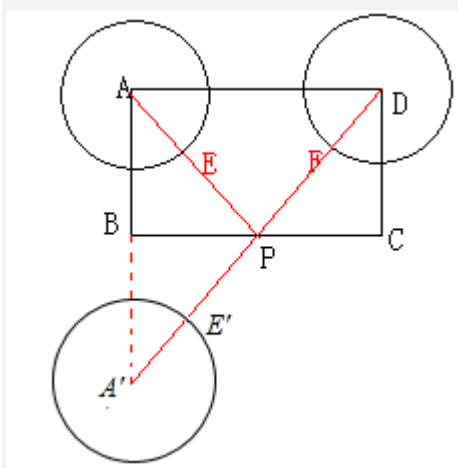
【详解】试题解析： $\because$ 矩形 ABCD 中，AB=2，BC=3，圆 A 的半径为 1，

$$\therefore A'D'=BC=3, DD'=2DC=4, AE'=1,$$

$$\therefore A'D=5,$$

$$\therefore DE'=5-1=4$$

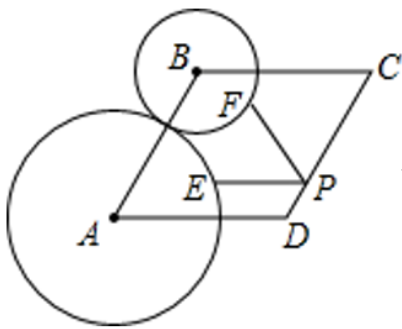
$$\therefore PE+PD=PE'+PD=DE'=4,$$



故选 C.

考点：轴对称-最短路线问题.

6. 如图，菱形 ABCD 中， $\angle A=60^\circ$ ，AB=3， $\odot A$ 、 $\odot B$ 的半径分别为 2 和 1，点 P、E、F 分别是边 CD、 $\odot A$ 和 $\odot B$ 上的动点，则 PE+PF 的最小值是 ()



A. 1

B. 2

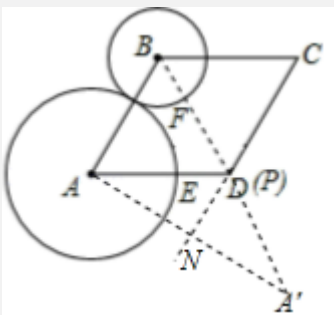
C. 2.5

D. 3

【答案】D

【分析】利用菱形的性质以及圆的性质得出 P 与 D 重合时 $PE + PF$ 的最小值，进而求出即可．

【详解】解：如图，作 A 点关于直线 DC 的对称点 A' ，连接 AA' ，延长 CD 交 AA' 于点 N ，连接 BD ， DA' ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形， $\angle BAD = 60^\circ$ ， $AB = 3$ ，

$\therefore AB = AD = CD = BC = 3$ ， $\angle BAD = \angle BCD = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle ADB$ 、 $\triangle BCD$ 是等边三角形，

$\therefore \angle BDC = \angle ADB = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle ADN = 180^\circ - \angle ADB - \angle BDC = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle A'DN = \angle ADN = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle ADB + \angle ADN + \angle A'DN = 180^\circ$ ，

$\therefore A'$ ， D ， B 在一条直线上，

由题意可得出：当 P 与 D 重合， E 点在 AD 上， F 在 BD 上时， $PE + PF$ 最小，

$\because BD = AB = AD = 3$ ， $\odot A$ 、 $\odot B$ 的半径分别为 2 和 1，

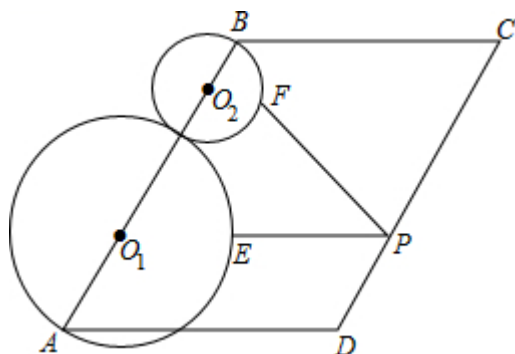
$\therefore PE = AD - AE = 1$ ， $PF = BD - BF = 2$ ，

$\therefore PE + PF$ 的最小值是 3．

故选：D．

【点睛】此题主要考查了菱形的性质，等边三角形的判定与性质，轴对称的性质以及圆的性质等相关知识，根据题意得出 P 点位置是解题关键．

7. 如图, $\square ABCD$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $AB = 6$, $BC = 2\sqrt{6}$. O_1, O_2 是边 AB 上的两点, 半径为 2 的 $\odot O_1$ 过点 A , 半径为 1 的 $\odot O_2$ 过点 B . P, E, F 分别是边 CD , $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 上的动点. 则 $PE + PF$ 的最小值等于()

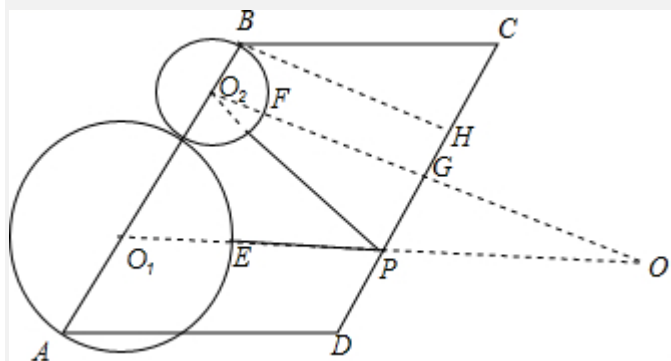


- A. $2\sqrt{6}$ B. 6 C. $3+3\sqrt{2}$ D. 9

【答案】B

【分析】作 O_2 关于 CD 的对称点 O , 连接 OO_1 交 CD 于 P , 连接 PO_2 交 $\odot O_2$ 于 F , 连接 PO_1 交 $\odot O_1$ 于 E , 则此时, $PE + PF$ 的值最小, $PE + PF$ 的最小值 $= OO_1 - EO_1 - FO_2$, 连接 OO_2 交 CD 于 G , 过 B 作 $BH \perp CD$ 于 H , 则 $BH = O_2G$, 根据平行四边形的性质得到 $\angle C = \angle A = 60^\circ$, 求得 $BH = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = 3\sqrt{2}$, 得到 $OO_2 = 2O_2G = 2BC = 6\sqrt{2}$, 根据已知条件得到 $\odot O_1, \odot O_2$ 外切, 得到 $O_1O_2 = 3$, 根据勾股定理即可得到结论.

【详解】作 O_2 关于 CD 的对称点 O , 连接 OO_1 交 CD 于 P , 连接 PO_2 交 $\odot O_2$ 于 F , 连接 PO_1 交 $\odot O_1$ 于 E ,



则此时, $PE + PF$ 的值最小, $PE + PF$ 的最小值 $= OO_1 - EO_1 - FO_2$,

连接 OO_2 交 CD 于 G ,

过 B 作 $BH \perp CD$ 于 H , 则 $BH = O_2G$,

$\because$ 在 $\square ABCD$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $AB = 6$, $BC = 2\sqrt{6}$,

$$\therefore \angle C = \angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore BH = \frac{\sqrt{3}}{2} BC = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore OO_2 = 2O_2G = 2BC = 6\sqrt{2},$$

$\therefore AB = 6$ ，半径为 2 的 $\odot O_1$ 过点 A，半径为 1 的 $\odot O_2$ 过点 B，

$\therefore \odot O_1, \odot O_2$ 外切，

$$\therefore O_1O_2 = 3,$$

$\therefore AB \parallel CD, OO_2 \perp CD,$

$\therefore OO_2 \perp AB,$

$$\therefore \angle AO_2O = 90^\circ,$$

$$\therefore OO_1 = \sqrt{O_1O_2^2 + O_2O^2} = \sqrt{3^2 + (6\sqrt{2})^2} = 9,$$

$$\therefore PE + PF \text{ 的最小值} = 9 - 1 - 2 = 6.$$

故选 B.

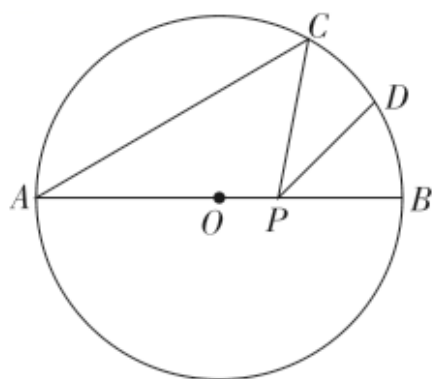
【点睛】此题主要考查了轴对称 - 最短路线问题，平行四边形的性质以及相切两圆的性质，勾股定理等知识，根据题意得出 P 点位置是解题关键.

第 II 卷（非选择题）

请点击修改第 II 卷的文字说明

二、填空题

8. 如图所示，AB 是 $\odot O$ 的直径，AB = 20， $\angle CAB = 30^\circ$ ，点 D 为弧 BC 的中点，点 P 是直径 AB 上的一个动点，PC + PD 的最小值为_____.

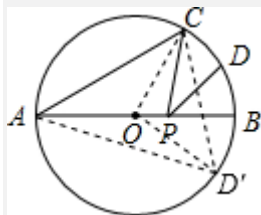


【答案】 $10\sqrt{2}$

【分析】作出 D 关于 AB 的对称点 D'，则 PC + PD 的最小值就是 CD' 的长度，在 $\triangle COD'$ 中根据边角

关系即可求解.

【详解】解: 作出 D 关于 AB 的对称点 D' , 连接 OC , OD' , CD' .



又 $\because$ 点 C 在 $\odot O$ 上, $\angle CAB=30^\circ$, D 为弧 BC 的中点, 即 $\widehat{BD}=\widehat{BD'}$,

$$\therefore \angle BAD'=\frac{1}{2}\angle CAB=15^\circ.$$

$$\therefore \angle CAD'=45^\circ.$$

$\therefore \angle COD'=90^\circ$. 则 $\triangle COD'$ 是等腰直角三角形.

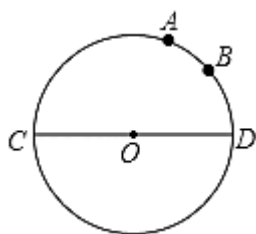
$$\because OC=OD'=\frac{1}{2}AB=10,$$

$$\therefore CD'=10\sqrt{2},$$

故答案为: $10\sqrt{2}$.

【点睛】本题考查了圆周角定理以及路程的和最小的问题, 正确作出辅助线是解题的关键.

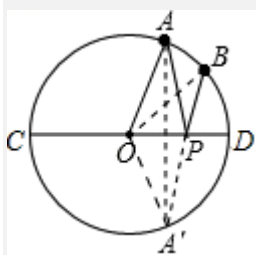
9. 如图, CD 是 $\odot O$ 的直径, 点 A 是半圆上的三等分点, B 是弧 AD 的中点, P 点为直线 CD 上的一个动点, 当 $CD=6$ 时, $AP+BP$ 的最小值为_____.



【答案】 $3\sqrt{2}$.

【分析】如图, 设 A' 是 A 关于 CD 的对称点, 连接 $A'B$, 与 CD 的交点即为点 P . 此时 $PA+PB=A'B$ 是最小值, 可证 $\triangle OA'B$ 是等腰直角三角形, 从而得出结果.

【详解】解: 作点 A 关于 CD 的对称点 A' , 连接 $A'B$, 交 CD 于点 P , 则 $PA+PB$ 最小, 连接 OA' , AA' .



$\because$ 点 A 与 A' 关于 CD 对称, 点 A 是半圆上的一个三等分点,

$$\therefore \angle A'OD = \angle AOD = 60^\circ, PA = PA',$$

$\because$ 点 B 是弧 AD 的中点,

$$\therefore \angle BOD = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle A'OB = \angle A'OD + \angle BOD = 90^\circ,$$

又 $\because OA = OA' = 3,$

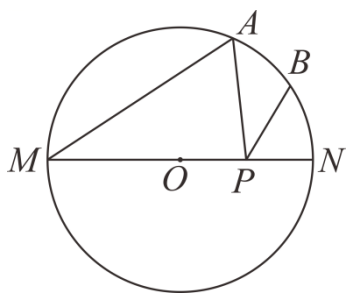
$$\therefore A'B = 3\sqrt{2}.$$

$$\therefore PA + PB = PA' + PB = A'B = 3\sqrt{2}.$$

故答案为: $3\sqrt{2}$.

【点睛】本题考查了轴对称最短线段问题以及垂径定理和勾股定理等知识, 由轴对称的性质正确确定 P 点的位置是解题的关键.

10. 如图, MN 是 $\odot O$ 的直径, $MN=4$, $\angle AMN=40^\circ$, 点 B 为弧 AN 的中点, 点 P 是直径 MN 上的一个动点, 则 $PA+PB$ 的最小值为_____.



【答案】 $2\sqrt{3}$

【分析】过 A 作关于直线 MN 的对称点 A' , 连接 $A'B$, 由轴对称的性质可知 $A'B$ 即为 $PA+PB$ 的最小值,

【详解】解: 连接 OB , OA' , AA' ,

$\because AA'$ 关于直线 MN 对称,

$$\therefore \widehat{AN} = \widehat{A'N'}$$

$\because \angle AMN = 40^\circ,$

$$\therefore \angle A'ON = 80^\circ, \angle BON = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle A'OB = 120^\circ,$$

过 O 作 $OQ \perp A'B$ 于 Q ,

在 $Rt\triangle A'OQ$ 中, $OA' = 2,$

$$\therefore A'B = 2A'Q = 2\sqrt{3}$$

即 $PA+PB$ 的最小值 $2\sqrt{3}$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/748021073071007010>