

长沙市雅礼中学 2025 届高三一模试卷

数 学

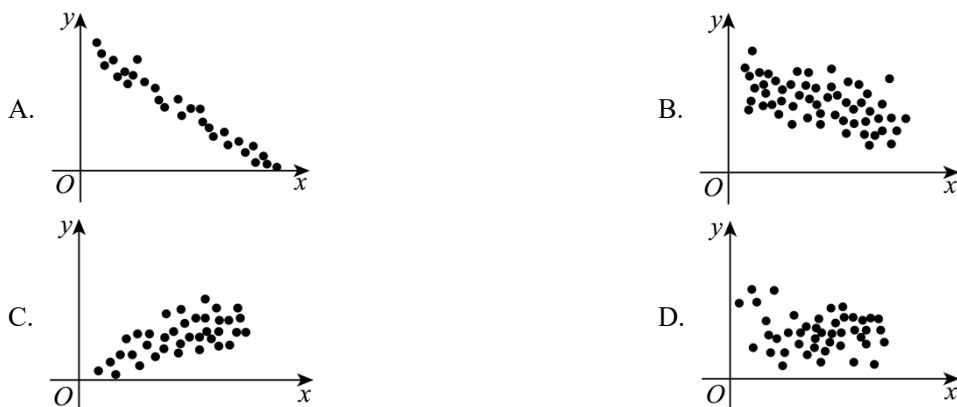
(满分 150 分, 时间 120 分钟)

注意事项:

1. 答题前, 考生务必将自己的准考证号、姓名、考场号、填写在答题卡上.
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号. 回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效.
3. 考试结束, 监考员将试题卷, 答题卡一并收回.

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 下列散点图中, 线性相关系数最小的是 ()



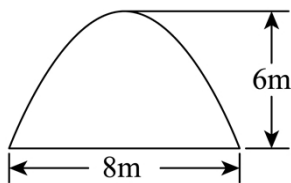
2. 已知集合 $A = \{x \mid |x| < 3\}$, 集合 $B = \{x \mid x^2 < 4\}$, 则 $A \cap B = ()$

- A. $(-2, 2)$ B. $(-3, 3)$ C. $(-3, 2)$ D. $(-2, 3)$

3. 若复数 z 在复平面中的对应点都在一个以原点为圆心的圆上, 则 $\frac{1}{\bar{z}}$ 的对应点均在 ()

- A. 一条直线上 B. 一个圆上 C. 一条抛物线上 D. 一支双曲线上

4. 某隧道的垂直剖面图近似为一抛物线, 如图所示. 已知隧道高为 6m, 宽为 8m, 隧道内设置两条车道, 且隧道内行车不准跨过中间的实线. 若载有集装箱的货车要经过此隧道, 货车宽度为 2m, 集装箱宽度与货车宽度相同, 则货车高度 (即集装箱最高点距地面的距离) 的最大值为 ()



- A. 3.5m B. 4m C. 4.5m D. 5m

5. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=2, AC=3, \overline{BD}=\overline{DC}, \overline{AE}=2\overline{EB}$. 若 $\overline{AD}+\overline{CE}=\lambda\overline{AB}+\mu\overline{AC}$, 则 $\lambda+\mu$ 的值为 ()

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

6. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 且 $b_n=(-1)^n \frac{n}{a_n a_{n+1}}$, 若不等式

$T_n \leq \lambda (n \in \mathbf{N}^*)$ 恒成立, 则实数 λ 的最小值为 ()

- A. $-\frac{4}{5}$ B. -1 C. $-\frac{1}{4}$ D. $-\frac{1}{5}$

7. 若定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)+f(x)=0, f(2x+1)$ 是奇函数, $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$, 设函数

$g(x)=xf\left(x-\frac{1}{2}\right)$, 则 $g(1)+g(2)+g(3)+g(4)+g(5)=$ ()

- A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

8. 已知三棱锥 $P-ABC$ 四个顶点都在球 O 面上, $PA=PB=PC=2, \angle APB=90^\circ$, M 为 AB 的中点, C 在面 APB 内的射影为 PM 的中点, 则球 O 的表面积等于 ()

- A. $\frac{128}{7}\pi$ B. $\frac{64}{7}\pi$ C. $\frac{32}{7}\pi$ D. $\frac{16}{7}\pi$

二、选择题: 本题共3小题, 每小题6分, 共18分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得6分, 部分选对的得部分分, 有选错的得0分.

9. 已知 $\left(mx^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ (常数 $m > 0$) 的展开式中第5项与第7项的二项式系数相等, 则 ()

- A. $n=10$
 B. 展开式中奇数项的二项式系数的和为256
 C. 展开式中 x^{15} 的系数为 $45m^8$

D. 若展开式中各项系数的和为 1024, 则第 6 项的系数最大

10. 设 $a > 0$, 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x-1, & x < -a, \\ -\sqrt{a^2-x^2}, & -a \leq x \leq a, \\ \sqrt{x+2}, & x > a. \end{cases}$ 则 ()

A. $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减

B. 当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 存在最小值

C. 设 $M(x_1, f(x_1))(x_1 \leq a), N(x_2, f(x_2))(x_2 > a)$, 则 $|MN| > 2$

D. 设 $P(x_3, f(x_3))(x_3 < -a), Q(x_4, f(x_4))(x_4 \geq -a)$, 若 $|PQ|$ 存在最小值, 则 $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

11. 已知曲线 C 的方程为 $x^2 + y^2 - xy = 1$, 下列说法正确的有 ()

A. 曲线 C 关于直线 $y = x$ 对称

B. $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$

C. 曲线 C 被直线 $y = x + \frac{1}{2}$ 截得的弦长为 $\frac{\sqrt{26}}{2}$

D. 曲线 C 上任意两点距离的最大值为 $2\sqrt{2}$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 已知集合 $A = \{x | x \leq 2\}$, 则 $\complement_{\mathbb{R}} A = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 已知 Ω 是棱长为 $\sqrt{2}$ 的正四面体 $ABCD$, 设 Ω 的四个顶点到平面 α 的距离所构成的集合为 M , 若 M 中元素的个数为 k , 则称 α 为 Ω 的 k 阶等距平面, M 为 Ω 的 k 阶等距集. 如果 α 为 Ω 的 1 阶等距平面且 1 阶等距集为 $\{m\}$, 则符合条件的 α 有 个, m 的所有可能取值构成的集合是 .

14. 已知四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 是平行四边形, $\angle DAB = \frac{2\pi}{3}$, $AA_1 \perp$ 底面 $ABCD$, $AA_1 = AB = AD = 3\sqrt{3}$, 点 P 是四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 表面上的一个动点, 且直线 AP 与 CC_1 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$, 则点 P 的轨迹长度为 .

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别 a, b, c , 已知 $a \cos C - a \sin C - b + \sqrt{2}c = 0$.

(1) 求 A ;

(2) 设 D 是边 BC 中点, 若 $\cos C = -\frac{3}{5}$, 求 $\sin \angle ADC$.

16. 现市场上治疗某种疾病的药品有 A, B 两种, 其治愈率与患者占比如表所示, 为试验一种新药 C , 在有关部门批准后, 某医院把此药给 100 个病人服用. 设药 C 的治愈率为 $p(0 < p < 1)$, 且每位病人是否被治愈相互独立.

	A	B	C (新药)
治愈率	75%	70%	p
患者占比	52%	48%	

(1) 记 100 个病人中恰有 80 人被治愈的概率为 $f(p)$, 求 $f(p)$ 的最大值点 p_0 ;

(2) 设用新药 C 的患者占比为 $n\%$ (药品 A, B 减少的患者占比, 均为新药 C 增加占比的一半, $(0 < n < 96)$), 以 (1) 问中确定的 p_0 作为 p 的值, 从已经用药的患者中随机抽取一名患者, 求该患者痊愈的概率 (结果用 $n\%$ 表示)

(3) 按照市场预测, 使用新药 C 的患者占比 X 能达到 20% 以上, 不足 40% 的概率为 $\frac{1}{3}$, 不低于 40% 且不超过 60% 的概率为 $\frac{1}{2}$, 超过 60% 的概率为 $\frac{1}{6}$, 某药企计划引入药品 C 的生产线, 但生产线运行的条数受患者占比的影响, 关系如下表:

患者占比	$20\% < X < 40\%$	$40\% \leq X \leq 60\%$	$X > 60\%$
最多投入生产线条数	1	2	3

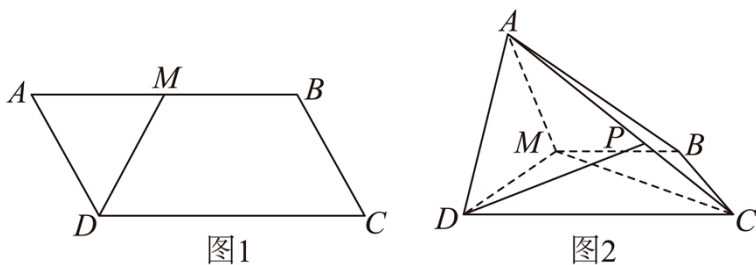
若某条生产线运行, 年利润为 1000 万, 若某条生产线未运行, 年亏损 300 万, 欲使该药企生产药品 C 的年总利润均值最大, 应引入几条生产线?

17. 已知函数 $f(x) = \ln(|x| + a) + b|x|$.

(1) 当 $a = 0$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $a = -1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的极值.

18. 在平行四边形 $ABCD$ 中 (如图 1), $AB = 2BC = 2$, M 为 AB 的中点, 将等边 $\triangle ADM$ 沿 DM 折起, 连接 AB, AC , 且 $AC = 2$ (如图 2).



(1) 求证: $CM \perp$ 平面 ADM ;

(2) 求直线 AD 与平面 ABM 所成角的正弦值;

(3) 点 P 在线段 AC 上, 且满足 $\overline{AP} = 2\overline{PC}$, 求平面 PDM 与平面 $BCDM$ 所成角的余弦值.

19. 已知抛物线 $C: x^2 = 4y$ 的焦点为 F , 在第一象限内的点 $A_1(x_1, y_1)$ 和第二象限内的点 $B_1(x'_1, y'_1)$ 都在抛物线 C 上, 且直线 A_1B_1 过焦点 F . 按照如下方式依次构造点 $A_n (n = 2, 3, \dots)$: 过点 A_{n-1} 作抛物线 C 的切线与 x 轴交于点 D_{n-1} , 过点 D_{n-1} 作 x 轴的垂线与抛物线 C 相交于点 A_n , 设点 A_n 的坐标为 (x_n, y_n) . 用同样的方式构造点 $B_n (n = 2, 3, \dots)$, 设点 B_n 的坐标为 (x'_n, y'_n) .

(1) 证明: 数列 $\{x_n\}, \{x'_n\}$ 都是等比数列;

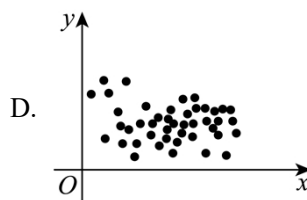
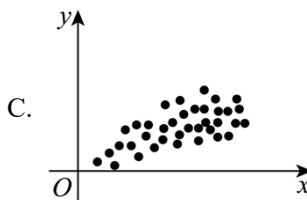
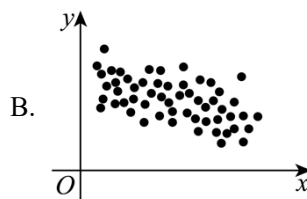
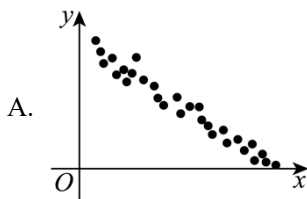
(2) 记 $a_n = \frac{n}{16} \cdot |x_n x'_n|$, 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n ;

(3) 证明: 当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时, 直线 $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n, \dots$ 都过定点.

参考答案

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 下列散点图中, 线性相关系数最小的是 ()



【答案】A

【解析】

【分析】利用散点图变化趋势，判断相关系数的正负，由散点的集中程度确定大小，即可得到答案.

【详解】观察选项 A 的散点图，这些点紧密地聚集在一条直线附近.其线性相关系数接近于 -1 ；

选项 B 的散点图中，线性负相关程度不及 A，比较分散，即线性相关系数要比选项 A 的大.

选项 C 的散点图里，散点呈现出一定的上升趋势，变量 x 和 y 之间具有强的线性相关关系，其线性相关系数为正数.

选项 D 的散点图中，散点比较分散，线性相关程度比选项 A 要弱，线性相关系数的比选项 A 的大.

综合比较四个选项，选项 A，线性负相关程度最强，所以线性相关系数最小.

故选：A.

2. 已知集合 $A = \{x \mid |x| < 3\}$ ，集合 $B = \{x \mid x^2 < 4\}$ ，则 $A \cap B = (\quad)$

A. $(-2, 2)$

B. $(-3, 3)$

C. $(-3, 2)$

D. $(-2, 3)$

【答案】A

【解析】

【分析】求得集合 A, B ，根据集合的交集运算，即可求得答案.

【详解】因为 $A = \{x \mid |x| < 3\} = \{x \mid -3 < x < 3\}$ ， $B = \{x \mid x^2 < 4\} = \{x \mid -2 < x < 2\}$ ，

所以 $A \cap B = \{x \mid -3 < x < 3\} \cap \{x \mid -2 < x < 2\} = (-2, 2)$.

故选：A.

3. 若复数 z 在复平面中的对应点都在一个以原点为圆心的圆上，则 $\frac{1}{\bar{z}}$ 的对应点均在 ()

A. 一条直线上

B. 一个圆上

C. 一条抛物线上

D. 一支双曲线上

【答案】B

【解析】

【分析】根据已知条件设出 z ，化简 $\frac{1}{\bar{z}}$ ，由此确定正确答案.

【详解】依题意，复数 z 在复平面中的对应点都在一个以原点为圆心的圆上，

设圆的半径为 r ，则可设 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ，

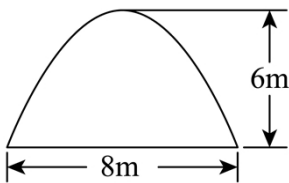
$$\text{则 } \frac{1}{\bar{z}} = \frac{\cos 0 + i \sin 0}{r(\cos \theta - i \sin \theta)} = \frac{\cos 0 + i \sin 0}{r(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))}$$

$$= \frac{1}{r}(\cos \theta + i \sin \theta),$$

$\frac{1}{\bar{z}}$ 的对应点均在半径为 $\frac{1}{r}$ 的圆上.

故选：B

4. 某隧道的垂直剖面图近似为一抛物线，如图所示. 已知隧道高为 6m，宽为 8m，隧道内设置两条车道，且隧道内行车不准跨过中间的实线. 若载有集装箱的货车要经过此隧道，货车宽度为 2m，集装箱宽度与货车宽度相同，则货车高度（即集装箱最高点距地面的距离）的最大值为（ ）



A. 3.5m

B. 4m

C. 4.5m

D. 5m

【答案】C

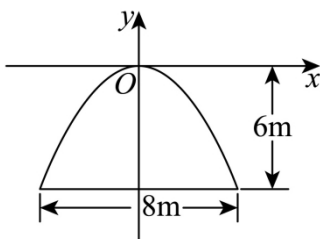
【解析】

【分析】建立如图平面直角坐标系，利用待定系数法求出抛物线方程，令 $x = 2$ 得 $y = -\frac{3}{2}$ ，则 $6 - \left| -\frac{3}{2} \right|$ 即

为货车高度的最大值.

【详解】以抛物线的顶点为原点，建立如图平面直角坐标系，

设抛物线方程为 $x^2 = -2py (p > 0)$ ，



由图可知抛物线过点(4, -6)，代入抛物线方程，

得 $16 = 12p$ ，解得 $p = \frac{4}{3}$ ，所以抛物线方程为 $x^2 = -\frac{8}{3}y$ 。

因为车道宽 2 米，两车道中间有隔离带，车宽 2 米，

所以车行驶时， x 的取值范围为 $[-2, 2]$ 。

当 $x = 2$ 时， $y = -\frac{3}{8}x^2 = -\frac{3}{2}$ ，

要使载货最高的货车通过隧道，货车高度的最大值为 $6 - \left| -\frac{3}{2} \right| = 4.5$ 米。

故选：C

5. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 2, AC = 3, \overline{BD} = \overline{DC}, \overline{AE} = 2\overline{EB}$ 。若 $\overline{AD} + \overline{CE} = \lambda \overline{AB} + \mu \overline{AC}$ ，则 $\lambda + \mu$ 的值为 ()

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】由 D 为 BC 的中点得到 $\overline{AD} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$ ，再由 $\overline{CE} = \frac{2}{3}\overline{AB} - \overline{AC}$ ，即可求解；

【详解】因为 $\overline{BD} = \overline{DC}$ ，所以 D 为 BC 的中点，所以 $\overline{AD} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$ 。

又 $\overline{AE} = 2\overline{EB}$ ，所以 $\overline{AE} = \frac{2}{3}\overline{AB}$ ，所以 $\overline{CE} = \overline{CA} + \overline{AE} = \frac{2}{3}\overline{AB} - \overline{AC}$ ，

所以 $\overline{AD} + \overline{CE} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC}) + \frac{2}{3}\overline{AB} - \overline{AC} = \frac{7}{6}\overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{AC}$ ，

所以 $\lambda = \frac{7}{6}, \mu = -\frac{1}{2}$ ，所以 $\lambda + \mu = \frac{2}{3}$ 。

故选：C

6. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2$ ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，且 $b_n = (-1)^n \frac{n}{a_n a_{n+1}}$ ，若不等式

$T_n \leq \lambda (n \in \mathbf{N}^*)$ 恒成立，则实数 λ 的最小值为 ()

- A. $-\frac{4}{5}$ B. -1 C. $-\frac{1}{4}$ D. $-\frac{1}{5}$

【答案】D

【解析】

【分析】利用 a_n, S_n 的关系求得数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，进而可得 $b_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right)$ ，对 n 分奇偶求得 T_n ，进而可求得实数 λ 的最小值.

【详解】当 $n=1$ 时， $a_1 = S_1 = 1^2 = 1$ ，当 $n \geq 2$ 时， $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$ ，

当 $n=1$ 时， $a_1=1$ 适合上式，所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n-1$ ，

$$\text{所以 } b_n = (-1)^n \frac{n}{a_n a_{n+1}} = (-1)^n \frac{n}{(2n-1)(2n+1)} = (-1)^n \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right),$$

$$\text{当 } n \text{ 为偶数时, } T_n = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right) + \cdots + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$\text{所以 } T_n = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4(2n+1)} \leq -\frac{1}{5},$$

$$\text{当 } n \text{ 为奇数时, } T_n = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right) + \cdots - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$\text{所以 } T_n = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4(2n+1)} < -\frac{1}{4},$$

又因为不等式 $T_n \leq \lambda (n \in \mathbf{N}^*)$ 恒成立，所以 $(T_n)_{\max} \leq \lambda$ ，所以 $\lambda \geq -\frac{1}{5}$ ，

所以实数 λ 的最小值为 $-\frac{1}{5}$ 。

故选：D.

【点睛】关键点点睛：关键在于分 n 为奇数与 n 为偶数两种情况求得 T_n ，进而求得 T_n 的最大值，进而求得实数 λ 的最小值.

7. 若定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) + f(x) = 0$ ， $f(2x+1)$ 是奇函数， $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ ，设函数

$$g(x) = xf\left(x - \frac{1}{2}\right), \text{ 则 } g(1) + g(2) + g(3) + g(4) + g(5) = (\quad)$$

A. 5

B. 4

C. 3

D. 2

【答案】A

【解析】

【分析】 根据条件判断抽象函数的周期，对称性，根据周期性和对称性求函数值，再代入求和.

【详解】 根据题意，定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)+f(x)=0$,

则 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$ ，故函数 $f(x)$ 为周期函数，4 是函数 $f(x)$ 的一个周期.

因 $f(2x+1)$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数，则 $f(-2x+1)+f(2x+1)=0$ ， $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，

$$\text{于是 } f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)=0, \quad f\left(\frac{5}{2}\right)+f\left(\frac{7}{2}\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)+f\left(-\frac{1}{2}\right)=0,$$

$$\text{在 } f(x+2)+f(x)=0, \quad \text{取 } x=\frac{3}{2}, \quad \text{得 } f\left(\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{7}{2}\right)=0,$$

$$\text{因 } g(x)=xf\left(x-\frac{1}{2}\right),$$

$$\begin{aligned} \text{则 } g(1)+g(2)+g(3)+g(4)+g(5) &= f\left(\frac{1}{2}\right)+2f\left(\frac{3}{2}\right)+3f\left(\frac{5}{2}\right)+4f\left(\frac{7}{2}\right)+5f\left(\frac{9}{2}\right) \\ &= [f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)]+3[f\left(\frac{5}{2}\right)+f\left(\frac{7}{2}\right)]+[f\left(\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{7}{2}\right)]+5f\left(\frac{9}{2}\right), \\ &= 5f\left(\frac{9}{2}\right)=5f\left(4+\frac{1}{2}\right)=5f\left(\frac{1}{2}\right)=5. \end{aligned}$$

故选：A

【点睛】 关键点点睛：本题的关键是利用赋值，赋变量，转化抽象关系式，判断和利用函数的周期性和对称性解题.

8. 已知三棱锥 $P-ABC$ 四个顶点都在球 O 面上， $PA=PB=PC=2$ ， $\angle APB=90^\circ$ ， M 为 AB 的中点， C 在面 APB 内的射影为 PM 的中点，则球 O 的表面积等于 ()

A. $\frac{128}{7}\pi$

B. $\frac{64}{7}\pi$

C. $\frac{32}{7}\pi$

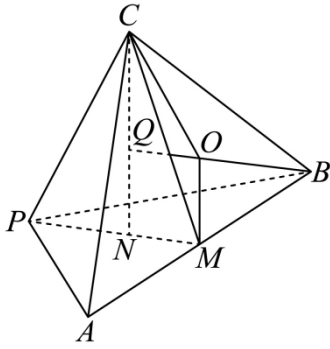
D. $\frac{16}{7}\pi$

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据题意可知三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的球心 O 在过 M 且垂直平面 PAB 的垂线上，设球 O 到平面 PAB 的距离为 t ，球 O 的半径为 R ，再根据勾股定理，建立方程，即可求解.

【详解】 如图，点 C 在面 APB 内的射影为 PM 的中点，设 PM 的中点为 N ，则有 $CN \perp$ 平面 PAB ， $PM \subset$ 平面 PAB ，所以 $CN \perp PM$ ，可知 $PC=CM=2$ ，



又 $\angle APB = 90^\circ$, $PA = PB = 2$,

$$\text{则 } PM = \frac{1}{2}AB = \sqrt{2}, \quad PN = NM = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad CN = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{2},$$

$\angle APB = 90^\circ$, M 为 AB 的中点, 则 M 为 $\triangle APB$ 的外心,

所以三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的球心 O 在过 M 且垂直平面 PAB 的垂线上, 则有 $OM \parallel CN$,

过 O 作 MN 的平行线, 与 CN 相交于点 Q , 则有 $OQNM$ 为矩形,

所以 $OQ \perp CN$, $OM = QN$,

设球 O 到平面 PAB 的距离为 t , 球 O 的半径为 R ,

有 $OC = OB = R$, $OM = QN = t$,

$$\text{在 Rt}\triangle OMB \text{ 和 Rt}\triangle OGC \text{ 中, 由勾股定理, 得 } t^2 + (\sqrt{2})^2 = R^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{14}}{2} - t\right)^2,$$

$$\text{解得 } t = \frac{2}{\sqrt{14}}, \text{ 所以 } R^2 = \frac{2}{7} + 2 = \frac{16}{7},$$

$$\text{所以球 } O \text{ 的表面积为 } 4\pi R^2 = \frac{64\pi}{7}.$$

故选: B.

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 已知 $\left(mx^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ (常数 $m > 0$) 的展开式中第 5 项与第 7 项的二项式系数相等, 则 ()

A. $n = 10$

B. 展开式中奇数项的二项式系数的和为 256

- C. 展开式中 x^{15} 的系数为 $45m^8$
- D. 若展开式中各项系数的和为 1024, 则第 6 项的系数最大

【答案】ACD

【解析】

【分析】由题意写出展开式的通项, 根据组合数的对称性、二项式系数之和、赋值法以及二项式系数的单调性, 逐项检验, 可得答案.

【详解】由 $\left(mx^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$, 则其展开式的通项为 $T_{r+1} = C_n^r (mx^2)^{n-r} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r = m^{n-r} C_n^r x^{\frac{4n-5r}{2}}$,

对于 A, 根据题意可得 $C_n^4 = C_n^6$, 由组合数的性质可知 $n = 10$, 故 A 正确;

对于 B, 由 $\left(mx^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$, 则展开式中奇数项的二项式系数之和为 $2^{10-1} = 512$, 故 B 错误;

对于 C, 由 $\frac{4 \times 10 - 5r}{2} = 15$ 解得 $r = 2$, 则展开式中 x^{15} 的系数为 $m^{10-2} C_{10}^2 = 45m^8$, 故 C 正确;

对于 D, 令 $x = 1$, 则展开式中各项系数之和 $(m+1)^{10} = 1024 = 2^{10}$, 解得 $m = 1$,

可得展开式的通项为 $T_{r+1} = C_{10}^r x^{\frac{40-5r}{2}}$, 即每项系数均为该项的二项式系数,

易知展开式中第 6 项为二项式 $\left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$ 的中间项, 则其系数最大, 故 D 正确.

故选: ACD.

10. 设 $a > 0$, 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x-1, & x < -a, \\ -\sqrt{a^2-x^2}, & -a \leq x \leq a, \\ \sqrt{x}+2, & x > a. \end{cases}$ 则 ()

A. $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减

B. 当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 存在最小值

C. 设 $M(x_1, f(x_1)) (x_1 \leq a), N(x_2, f(x_2)) (x_2 > a)$, 则 $|MN| > 2$

D. 设 $P(x_3, f(x_3)) (x_3 < -a), Q(x_4, f(x_4)) (x_4 \geq -a)$, 若 $|PQ|$ 存在最小值, 则 $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

【答案】BCD

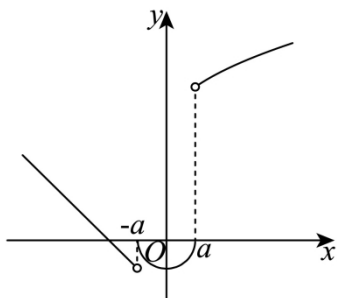
【解析】

【分析】对于 A: 取 $a = \frac{1}{2}$, 画图即可判断, 对于 B, 由函数单调性即可判断; 对于 C, 数形结合即可判

断, 对于 D: 先分析 $f(x)$ 的图象, 结合图象可知, 要使 $|PQ|$ 取得最小值, 则点 P 在

$f(x) = -x - 1 (x < -a)$ 上, 点 Q 在 $f(x) = -\sqrt{a^2 - x^2} (-a \leq x \leq a)$, 分析可解.

【详解】对于 A, 取 $a = \frac{1}{2}$, 画出函数图象,



可知 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 不是单调递减; 故 A 错误;

对于 B: 对于 B, 当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时,

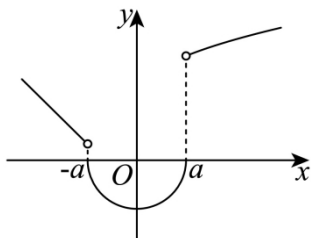
当 $x < -a$ 时, $f(x) = -x - 1 > a - 1 \geq -\frac{1}{2}$;

当 $-a \leq x \leq a$ 时, $f(x) = -\sqrt{a^2 - x^2}$ 显然取得最小值 $-a$;

当 $x > a$ 时, $f(x) = \sqrt{x} + 2 > \sqrt{a} + 2 > 2$,

综上: $f(x)$ 取得最小值 $-a$, 故 B 正确;

对于 C, 结合图像,

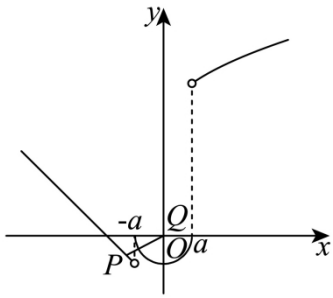


易知在 $x_1 = a$, $x_2 > a$ 且接近于 $x = a$ 处, $M(x_1, f(x_1)) (x_1 \leq a), N(x_2, f(x_2)) (x_2 > a)$ 的距离最小,

当 $x_1 = a$ 时, $y = f(x_1) = 0$, 当 $x_2 > a$ 且接近于 $x = a$ 处, $y_2 = f(x_2) > \sqrt{a} + 2$,

此时, $|MN| > y_2 - y_1 > \sqrt{a} + 2 > 2$, 故 C 正确;

依题意, $a > 0$,



当 $x < -a$ 时, $f(x) = -x - 1$, 易知其图象为一条端点取不到的单调递减的射线;

当 $-a \leq x \leq a$ 时, $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, 易知其图象是, 圆心为 $(0, 0)$, 半径为 a 的圆在 x 轴下方的图象 (即半圆);

当 $x > a$ 时, $f(x) = \sqrt{x} + 2$, 易知其图象是一条端点取不到的单调递增的曲线;

因为 $P(x_3, f(x_3)) (x_3 < -a), Q(x_4, f(x_4)) (x_4 \geq -a)$,

结合图象可知, 要使 $|PQ|$ 取得最小值, 则点 P 在 $f(x) = -x - 2 (x < -a)$ 上,

点 Q 在 $f(x) = -\sqrt{a^2 - x^2} (-a \leq x \leq a)$,

同时 $|PQ|$ 的最小值为点 O 到 $f(x) = -x - 1 (x < -a)$ 的距离减去半圆的半径 a ,

此时, 因为 $f(x) = y = -x - 1 (x < -a)$ 的斜率为 -1 , 则 $k_{OP} = 1$,

故直线 OP 的方程为 $y = x$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = x \\ y = -x - 1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}, \text{ 则 } P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right),$$

显然要保证 $P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 在 $f(x) = -x - 1 (x < -a)$ 上, 才能满足 $|PQ|$ 取得最小值,

所以只需 $-a > -\frac{1}{2}$, 即 $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 都可满足题意, 保证 $|PQ|_{\min} = d - a = \frac{\sqrt{2}}{2} - a$,

否则 $|PQ|$ 无最小值, 故 $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. D 正确;

故选: BCD

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/748025000127007041>