

安徽省合肥市第一中学 2023-2024 学年高一下学期期末联考

数学试题

学校: _____ 姓名: _____ 班级: _____ 考号: _____

一、单选题

1. 已知复数 $z = \frac{-2+i}{1-2i}$ (i 为虚数单位), 则 $|z| =$ ()

- A. 1 B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. $2\sqrt{5}$

2. 设 α, β, γ 是互不重合的平面, m, n 是互不重合的直线, 给出四个命题:

- ①若 $m // \alpha, n // \alpha$, 则 $m // n$ ②若 $m \perp \gamma, n \perp \gamma$, 则 $m // n$
③若 $m // \alpha, n \perp \alpha$, 则 $m \perp n$ ④若 $m // n, n // \alpha$, 则 $m // \alpha$

其中正确命题的个数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3. 下图是我国 2018: 2023 年纯电动汽车销量统计情况, 则下列说法错误的是 ()



- A. 我国纯电动汽车销量呈现逐年增长趋势
B. 这六年销量的第 60 百分位数为 536.5 万辆
C. 2020 年销量高于这六年销量的平均值
D. 这六年增长率最大的为 2019 年至 2020 年

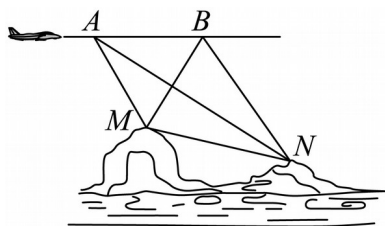
4. 已知向量 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 4, |2\vec{a} - \vec{b}| = 4\sqrt{3}$, 则 \vec{a} 在 \vec{b} 上的投影向量为 ()

- A. $-\vec{b}$ B. \vec{b} C. $\frac{1}{4}\vec{b}$ D. $-\frac{1}{4}\vec{b}$

5. 如图，为了测量两山顶 M, N 间的距离，飞机沿水平方向在 A, B 两点进行测量，

A, B, M, N 在同一个铅垂平面内. 已知飞机在 A 点时，测得 $\angle MAN = \angle BAN = 30^\circ$ ，在 B 点

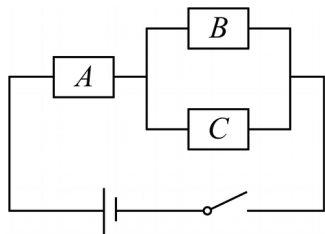
时，测得 $\angle ABM = 60^\circ$ ， $\angle NBM = 75^\circ$ ， $AB = 2$ 千米，则 $MN =$ ()



- A. $4\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$ 千米 B. $4 - 2\sqrt{3}$ 千米 C. $\sqrt{3} + 1$ 千米
D. $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ 千米

6. 如图，电路中 A 、 B 、 C 三个电子元件正常工作的概率分别为 $P(A) = \frac{1}{3}$ ， $P(B) = \frac{1}{2}$ ，

$P(C) = \frac{3}{5}$ ，则该电路正常工作的概率为 ()



- A. $\frac{4}{15}$ B. $\frac{8}{15}$ C. $\frac{7}{15}$ D. $\frac{7}{12}$

7. 已知正四棱台 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的高为 $\sqrt{6}$ ，其所有顶点均在同一个表面积为 32π 的球面

上, 且该球的球心在底面 $ABCD$ 上, 则棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 ()

- A. $\frac{14}{3}\sqrt{6}$ B. $14\sqrt{6}$ C. $\frac{28}{3}\sqrt{6}$ D. $28\sqrt{6}$

8. 若 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且满足 $b-2a+4a\sin^2\frac{A+B}{2}=0$,

则下列结论错误的是 ()

- A. 角 C 为钝角 B. $a^2+2b^2-c^2=0$
- C. $\tan B$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $3\tan A+\tan C=0$

二、多选题

9. 设 z_1, z_2 为复数, 则下列命题正确的是 ()

- A. 若 $z_1 = \bar{z}_2$, 则 $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$
- B. 若 $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 则 $z_1^{2024} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- C. 若 $|z_1| = |z_2|$, 则 $z_1^2 = z_2^2$
- D. 若 $|z-z_1| = |z-z_2|$, 且 $z_1 \neq z_2$, 则 z 在复平面对应的点在一条直线上

10. 已知随机事件 A, B 的概率都大于 0, \bar{A} 表示事件 A 的对立事件, 则 ()

- A. 当 $P(\bar{A}B) = P(\bar{A}) \cdot P(B)$ 时, A, B 相互独立
- B. 当 $\bar{A} \subseteq B$ 时, $P(A) \geq P(B)$

C. 当 $P(AB) > 0$ 时, $P(\overline{AB}) < P(B)$

D. 当 $P(A) + P(B) = 1$ 时, $B = \overline{A}$

11. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 点 M 是棱 CC_1 上的动点 (不含端点), 下列说法正确的有 ()

A. AM 可能垂直 BD_1

B. 三棱锥 $A - BMB_1$ 的体积为定值

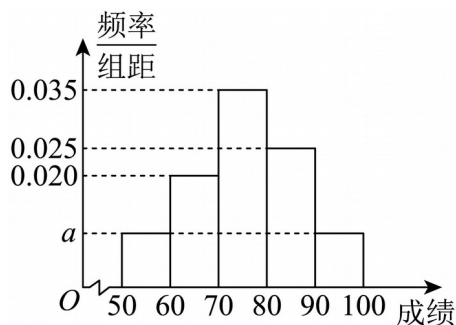
C. 过点 B 截正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的截面可能是等腰梯形

D. 若 $CM = C_1M$, 过点 B 且垂直于 AM 的截面的周长为 $3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$

三、填空题

12. 文以载道, 数以忘忧, 本学期某校学生组织数学知识竞答 (满分 100), 并从中随机

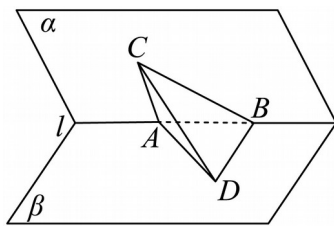
抽取了 100 名学生的成绩为样本, 分成 $[50, 60), [60, 70), [70, 80), [80, 90), [90, 100]$, 得到如图所示频率分布直方图:



估计该校高二学生数学成绩的平均数为_____.

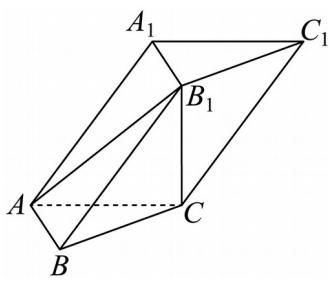
13. 在复平面内, 把与复数 $3 - \sqrt{3}i$ 对应的向量绕原点 O 按顺时针方向旋转 60° , 则所得向量对应的复数为____ (用代数形式表示).

14. 如图, 已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角为 $\frac{\pi}{3}$, 棱 l 上有不同的两点 A, B , $AC \subset \alpha$, $BD \subset \beta, AC \perp l, BD \perp l$. 若 $AC = AB = BD = 2$, 则直线 CD 与平面 β 所成角的正弦值为_____.



四、解答题

15. 在三棱柱 $ABC \square A_1B_1C_1$ 中, $AB \perp AC, B_1C \perp$ 平面 ABC , 且 $AB = AC = \frac{1}{2}AA_1 = 1$.



- (1) 求证: 平面 $AB_1C \perp$ 平面 ABB_1A_1 ;
 (2) 求点 C 与平面 ABB_1A_1 的距离.

16. 已知 a, b, c 分别为锐角 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边, $\sqrt{3}\sin B - \cos B = 1$.

- (1) 求 B ;
 (2) 若 $\sin C = \sqrt{2}\cos B, \triangle ABC$ 的面积为 $3 + \sqrt{3}$, 求边 c 的长.

17. 立德中学高一 (1) 班某次数学质量检测 (满分 150 分) 的统计数据如下表:

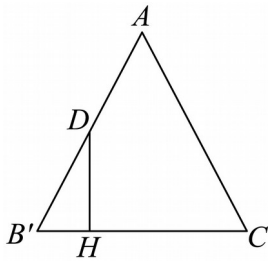
性别	参加考试人数	平均成绩	标准差
----	--------	------	-----

男	30	100	16
女	20	90	19

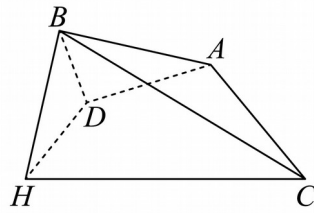
- (1)按男女比例，采用分层抽样在该班级抽取了5人，现从这5人中随机抽2人，求抽到的2人中至少有一个男生的概率；
- (2)求该班参加考试学生成绩的平均数和标准差（精确到1）.

18. 如图①，已知 $\triangle AB'C$ 是边长为2的等边三角形， D 是 AB' 的中点， $DH \perp B'C$ ，如图②，

将 $\triangle B'DH$ 沿边 DH 翻折至 $\triangle BDH$.



图①



图②

- (1)在线段 BC 上是否存在点 F ，使得 $AF \parallel$ 平面 BDH ？若存在，求 $\frac{BF}{FC}$ 的值；若不存在，请

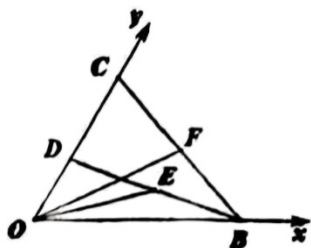
说明理由；

- (2)若平面 BHC 与平面 BDA 所成的二面角的正切值为 $2\sqrt{2}$ ，求点 B 到直线 CH 的距离.

19. 如图，设 Ox, Oy 是平面内相交成 $\alpha (0 < \alpha < \pi)$ 角的两条射线， \vec{e}_1, \vec{e}_2 分别为 Ox, Oy 同向

的单位向量，定义平面坐标系 xOy 为 α 仿射坐标系.在 α 仿射坐标系中，若 $\vec{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$,

记 $\vec{OP} = (x, y)$.



(1) 在 α 仿射坐标系中.

① 若 $\vec{a} = (m, n)$, 求 $|\vec{a}|$;

② 若 $\vec{a} = (-1, 2), \vec{b} = (-2, 1)$, 且 \vec{a}, \vec{b} 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 求 $\cos \alpha$;

(2) 如图所示, 在 $\frac{\pi}{3}$ 仿射坐标系中, B, C 分别在 x 轴, y 轴正半轴上, $|\overline{BC}| = 1, \overline{OD} = \frac{1}{3}\overline{OC}$,

E, F 分别为 BD, BC 中点, 求 $\overline{OE} \cdot \overline{OF}$ 的最大值.

参考答案:

1. A

【分析】利用 $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ 求出模长.

【详解】 $|z| = \frac{|-2+i|}{|1-2i|} = \frac{\sqrt{4+1}}{\sqrt{1+4}} = 1.$

故选: A

2. B

【分析】根据线面位置关系的判定定理、性质定理, 以及推论, 逐项判定, 即可求解.

【详解】 α, β, γ 是互不重合的平面, m, n 是互不重合的直线,

若 $m // \alpha, n // \alpha$, 则 $m // n, m, n$ 相交或异面, 故①不正确;

若 $m \perp \gamma, n \perp \gamma$, 则 $m // n$, 故②正确;

若 $m // \alpha, n \perp \alpha$, 则 $m \perp n$, 故③正确;

若 $m // n, n // \alpha$, 则 $m // \alpha$ 或 $m \subset \alpha$, 故④不正确;

正确命题的个数是 2.

故选: B.

3. C

【分析】根据条形图数据一一分析即可.

【详解】对于 A, 从条形图中看出, 纯电动汽车销量逐年递增, 故 A 正确;

对于 B, 因为 $0.6 \times 6 = 3.6$, 将所有汽车销量数据从小到大排序,

所以销量的第 60 百分位数为第 4 个数据, 即 536.5, 故 B 正确;

对于 C, 这六年销量的平均数为 $\frac{97.2+111.5+291.6+536.5+68.5+756.8}{6} = 410.35 > 291.6$,

故 C 错误;

对于 D, 因为 2019 年至 2020 年的增长率为 $\frac{291.6-111.5}{111.5} \approx 1.6$, 超过其他年份的增长率,

故 D 正确.

故选: C.

4. D

【分析】将 $|2\vec{a}-\vec{b}|=4\sqrt{3}$ 左右同时平方可求得 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的值, 结合投影向量公式计算即可.

【详解】因为 $|2\vec{a}-\vec{b}|=4\sqrt{3}$, 所以 $4\vec{a}^2+\vec{b}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}=48$,

又因为 $\vec{a}^2=4$, $\vec{b}^2=16$, 所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-4$,

所以 \vec{a} 在 \vec{b} 上的投影向量为 $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}^2}\cdot\vec{b}=\frac{-4}{16}\vec{b}=-\frac{1}{4}\vec{b}$.

故选: D.

5. D

【分析】根据条件得到 $\triangle ABM$ 是等边三角形, 从而有 $BM=2$, 记直线 AN 与直线 BM 的交

点为 O , 根据条件得到 $AN \perp BM$, O 为 BM 的中点, 从而有 $BN=MN=\frac{OB}{\cos \angle NBM}$, 即可

求出结果.

【详解】因为 $\angle MAN = \angle BAN = 30^\circ$, $\angle ABM = 60^\circ$, 可得 $\triangle ABM$ 是等边三角形, $BM=2$ 千米.

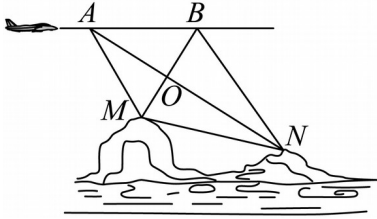
记直线 AN 与直线 BM 的交点为 O , $\angle AOB = 180^\circ - \angle BAN - \angle ABM = 90^\circ$,

所以 $AN \perp BM$, O 为 BM 的中点, 所以 $\triangle BMN$ 为等腰三角形,

$$BN = MN = \frac{OB}{\cos \angle NBM} = \frac{1}{\cos 75^\circ},$$

$$\text{又 } \cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \text{ 所以 } MN = \frac{1}{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}} = \sqrt{6} + \sqrt{2} \text{ 千}$$

米,



故选: D.

6. A

【分析】分析可知, 该电路正常工作指的是 A 元件正常工作且 B 、 C 中至少有一个能正常工作, 利用独立事件和对立事件的概率公式可求得所求事件的概率.

【详解】由题知该电路正常工作指的是 A 元件正常工作且 B 、 C 中至少有一个能正常工作,

因为该电路正常作为事件 D , 则 $P(D) = P(A) \{1 - [1 - P(B)] \cdot [1 - P(C)]\}$

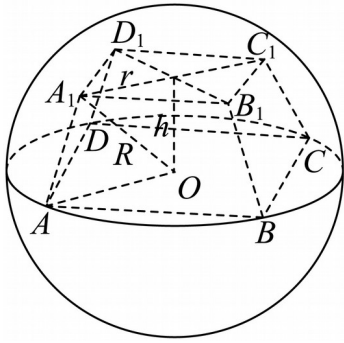
$$= \frac{1}{3} \times \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{3}{5} \right) \right] = \frac{4}{15},$$

故选: A.

7. C

【分析】利用棱台及其外接球的特征结合台体体积公式计算即可.

【详解】设球心为 O , 球 O 的半径为 R , 棱台高为 h ,



则 $4\pi R^2\pi =$, 所以 $R = 2\sqrt{2}$,

由于 O 在底面 $ABCD$ 上, 底面 $ABCD$ 为正方形,

易得正方形 $ABCD$ 的边长为 $\sqrt{2}R = 4$, 面积为 16;

设底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的外接圆半径为 r , 则 $r = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{2}$,

易得正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的边长为 $\sqrt{2}r = 2$, 面积为 4;

所以正四棱台 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $V = \frac{1}{3} \times (16 + 4 + \sqrt{16 \times 4}) \times \sqrt{6} = \frac{28\sqrt{6}}{3}$.

故选:C.

8. C

【分析】选项 A, 结合诱导公式、二倍角公式对已知等式化简可得 $\cos C$, 即可判断; 选项

B, 由 A 和余弦定理, 即可判断; 选项 D, 结合选项 B 的结论, 再根据同角三角函数的商

数关系、正弦定理和余弦定理, 可推出 $\frac{\tan A}{\tan C}$, 从而可判断; 选项 C, 结合选项 D 的结论,

再由三角形的内角和定理与正切的两角和公式, 结合基本不等式, 即可判断.

【详解】对于 A, $\because b - 2a + 4a \sin^2 \frac{A+B}{2} = 0$,

$$\therefore b - 2a + 4a \cos^2 \frac{C}{2} = 0, \text{ 即 } b - 2a + 2a(\cos C + 1) = 0,$$

$$\therefore \cos C = -\frac{b}{2a} < 0, \text{ 又 } C \in (0, \pi),$$

$\therefore C$ 一定为钝角, 故选项 A 正确;

$$\text{对于 B, 由余弦定理知, } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = -\frac{b}{2a},$$

化简得 $a^2 + 2b^2 - c^2 = 0$, 故选项 B 正确;

$$\text{对于 D, } \therefore \frac{\tan A}{\tan C} = \frac{\sin A \cos C}{\cos A \sin C} = \frac{\sin A}{\sin C} \cdot \frac{\cos C}{\cos A} = \frac{a}{c} \cdot \frac{(a^2 + b^2 - c^2) \cdot 2bc}{2ab \cdot (b^2 + c^2 - a^2)} = \frac{-b^2}{3b^2} = -\frac{1}{3},$$

$\therefore 3 \tan A + \tan C = 0$, 故选项 D 正确;

对于 C, $\therefore A + B + C = \pi$,

$$\therefore \tan B = -\tan(A + C) = -\frac{\tan A + \tan C}{1 - \tan A \tan C} = -\frac{\tan A - 3 \tan A}{1 + \tan A \cdot 3 \tan A} = \frac{2}{\frac{1}{\tan A} + 3 \tan A},$$

$\therefore C$ 为钝角, 则 $A \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\tan A > 0$,

$$\therefore \frac{1}{\tan A} + 3 \tan A \geq 2\sqrt{\frac{1}{\tan A} \cdot 3 \tan A} = 2\sqrt{3}, \text{ 当且仅当 } \frac{1}{\tan A} = 3 \tan A, \text{ 即 } \tan A = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 时, 等号}$$

成立,

此时 $\tan B$ 取得最大值 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 故选项 C 错误.

故选: C.

【点睛】方法点睛: 解三角形的基本策略:

(1) 利用正弦定理实现“边化角”；

(2) 利用余弦定理实现“角化边”。

求三角形有关代数式的取值范围也是一种常见的类型，主要方法有两类：

(1) 找到边与边之间的关系，利用基本不等式来求解；

(2) 利用正弦定理，转化为关于某个角的三角函数，利用函数思想求解。

9. AD

【分析】根据共轭复数的定义及复数的乘法运算即可判断 A；根据复数的乘法运算即可判断 B；举出反例即可判断 C；根据复数的几何意义即可判断 D。

【详解】对于 A，设 $z_2 = m + ni (m, n \in \mathbf{R})$ ，则 $z_1 = m - ni$ ，

所以 $z_1 z_2 = m^2 + n^2 \in \mathbf{R}$ ，故 A 正确；

对于 B，由 $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ，得 $z_1^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ，

所以 $z_1^4 = (z_1^2)^2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ，

所以 $z_1^{2024} = z_2^{4 \times 506} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ，故 B 错误；

对于 C，若 $z_1 = 1, z_2 = i$ ，则 $|z_1| = |z_2|$ ，而 $z_1^2 = 1, z_2^2 = -1$ ，故 C 错误；

对于 D，因为 $z_1 \neq z_2$ ，设 z_1, z_2 对应的点为 A, B ，

若 $|z - z_1| = |z - z_2|$ ，则 z 在复平面内对应点到 A 和 B 的距离相等，

即 z 在复平面内对应点在线段 AB 的垂直平分线上，

所以 z 在复平面对应的点在一条直线上，故 D 正确。

故选：AD。

10. AC

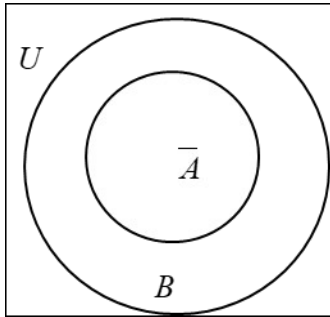
【分析】根据相互独立事件的定义即可判断 A；借助韦恩图可以分析即可判断 BC；根据对立事件的定义即可判断 D.

【详解】对于 A，因为 $P(\overline{A}B) = P(\overline{A}) \cdot P(B)$ ，

所以 \overline{A}, B 相互独立，所以 A, B 相互独立，故 A 正确；

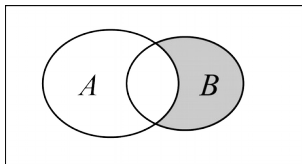
对于 B，如图，小圆圈表示 A 的对立事件，大圆圈表示事件 B， $U = A \cup \overline{A}$ ，

无法判断 $P(A)$ 与 $P(B)$ 的大小，故 B 错误；



对于 C，根据题意，得到如图所示，阴影部分代表事件 $\overline{A}B$ ，

由图可知， $P(\overline{A}B) < P(B)$ ，故 C 正确；



对于 D，根据对立事件的定义， $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ ，又 $P(A) + P(B) = 1$ ，

所以 $P(B) = P(\overline{A})$ ，概率相等，不一定事件相等，故 D 错误；

故选：AC.

11. BCD

【分析】以 D 为坐标原点可建立空间直角坐标系，设 $M(0, 2, m)(0 < m < 2)$ ，利用向量垂直

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/748046031017006111>