

重难点突破 02 三角函数大题专项训练

1. (2023·成都模拟) 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 2a\sin^2 x + a (a > 0)$, (下面①, ②中选择一个作为已知条件, 解答问题:

(1) 求 a 的值;

(2) 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到 $g(x)$ 的图象, 求函数 $g(x)$ 的单调增区间.

① $f(x)$ 的最大值为 2; ② $f(\frac{\pi}{2}) = -1$.

注: 如果选择①和②分别解答, 则按第一个解答计分.

【解答】解: (1)

$$f(x) = 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 2a\sin^2 x + a = \sqrt{3}\sin 2x - a(1 - \cos 2x) + a = \sqrt{3}\sin 2x + a\cos 2x = \sqrt{3+a^2}\sin(2x+\varphi)$$

$$\tan \varphi = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}a}{3},$$

若选①, 因为函数的最大值为 2, 即 $\sqrt{3+a^2} = 2$, $a > 0$, 可得 $a = 1$;

若选②, $f(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{3+a^2}\sin(2 \times \frac{\pi}{2} + \varphi) = -1$, 即 $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{3+a^2}}$, 由 $\tan \varphi = \frac{a}{\sqrt{3}}$ 可得

$$\sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{3+a^2}},$$

解得: $a = 1$;

综上所述: $a = 1$;

(2) 由 (1) 可得 $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\varphi = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, 当 $k = 0$ 时, $\varphi = \frac{\pi}{6}$,

所以函数 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$,

由题意可得 $g(x) = 2\sin[2(x - \frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{6}] = 2\sin(2x - \frac{\pi}{6})$,

则它的单调递增区间满足 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, 解得:

$$-\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

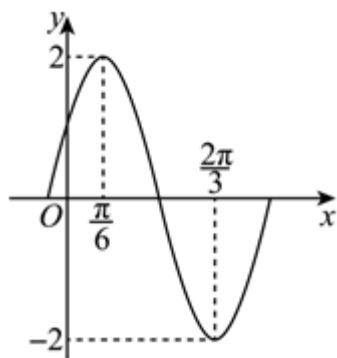
即函数 $g(x)$ 的单调递增区间为: $[-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. (2023·湖南模拟) 函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi) (A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示.

(1) 求函数 $y = f(x)$ 的解析式;

(2) 先将函数 $y = f(x)$ 的图象的横坐标缩小为原来的 $\frac{1}{2}$, 再将得到的函数图象向左平移 $\frac{\pi}{24}$

个单位, 最后得到函数 $y = g(x)$, 求 $g(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上的值域.



【解答】解: (1) 由图可知, $A = \frac{2 - (-2)}{2} = 2$,

函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T = 2 \times (\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}) = \pi$,

$$\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = 2,$$

$$\text{Q } f(\frac{\pi}{6}) = 2\sin(2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi) = 2,$$

$$\therefore \sin(\varphi + \frac{\pi}{3}) = 1,$$

$$\text{Q } -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{则 } -\frac{\pi}{6} < \varphi + \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{6},$$

$$\therefore \varphi + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}, \text{ 则 } \varphi = \frac{\pi}{6},$$

$$\text{故 } f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6});$$

(2) 将函数 $y = f(x)$ 的图象的横坐标缩小为原来的 $\frac{1}{2}$, 可得到函数 $y = 2\sin(4x + \frac{\pi}{6})$ 的图象,

再将得到的函数图象向左平移 $\frac{\pi}{24}$ 个单位, 最后得到函数 $y = g(x)$ 的图象,

$$\text{则 } g(x) = 2\sin[4(x + \frac{\pi}{24}) + \frac{\pi}{6}] = 2\sin(4x + \frac{\pi}{3}),$$

$$\text{当 } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ 时, } \frac{\pi}{3} \leq 4x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{4\pi}{3},$$

$$\text{则 } -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin(4x + \frac{\pi}{3}) \leq 1,$$

$$-\sqrt{3} \leq g(x) \leq 2,$$

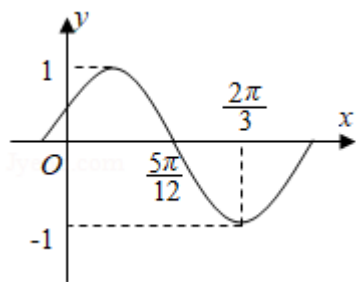
$g(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上的值域为 $[-\sqrt{3}, 2]$.

3. (2023·岳阳县模拟) 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($x \in \mathbb{R}, A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 部分图象如图所示.

(I) 求 $f(x)$ 的最小正周期及解析式;

(II) 将函数 $y = f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $y = g(x)$ 的图象, 求函数 $g(x)$

在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值和最小值.



【解答】解: (1) 由图可知, $A = 1$, $\frac{T}{4} = \frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$, $T = \pi$,

所以 $\omega = 2$.

当 $x = \frac{2\pi}{3}$ 时, $f(x) = -1$, 可得 $\sin(2 \times \frac{2\pi}{3} + \varphi) = -1$.

Q $|\varphi| < \frac{\pi}{2} \therefore \varphi = \frac{\pi}{6}$

$\therefore$ 求 $f(x)$ 的解析式为: $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$;

(2) 由 (1) 知 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$.

将函数 $y = f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数

$y = g(x) = \sin[2(x - \frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{6}] = \sin(2x - \frac{\pi}{6})$ 的图象,

故 $g(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{6})$,

Q $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$\therefore -\frac{\pi}{6} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{6}$

当 $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{\pi}{3}$ 时, $g(x)$ 有最大值为 1;

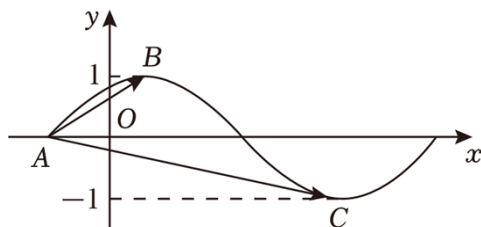
当 $2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$, 即 $x = 0$ 时, $g(x)$ 有最小值为 $-\frac{1}{2}$;

4. (2023·南昌二模) 如图是函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象, 已知

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2.$$

(1) 求 ω ;

(2) 若 $f(2) - f(\frac{4}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 求 φ .



【解答】解: (1) 设 $A(x_0, 0)$, 函数的最小正周期为 T , 则 $B(x_0 + \frac{T}{4}, 1), C(x_0 + \frac{3T}{4}, -1)$,

则 $\overrightarrow{AB} = (\frac{T}{4}, 1), \overrightarrow{AC} = (\frac{3T}{4}, -1)$,

故 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\frac{T}{4}, 1) \cdot (\frac{3T}{4}, -1) = \frac{3}{16}T^2 - 1 = 2$, 解得 $T = 4$ (负值舍去),

所以 $\frac{2\pi}{\omega} = 4$, 所以 $\omega = \frac{\pi}{2}$;

(2) 由 (1) 得 $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$),

$f(2) - f(\frac{4}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 得 $\sin(\pi + \varphi) - \sin(\frac{2\pi}{3} + \varphi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

即 $-\sin \varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi = -\sin(\varphi + \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $\sin(\varphi + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

又因 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 则 $\frac{\pi}{3} < \varphi + \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{6}$,

所以 $\varphi + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

5. (2023·大观区校级三模) 已知函数 $f(x) = \cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x - \frac{1}{2}$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(II) 求 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最值.

【解答】解: (I) $f(x) = \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$.

Q 函数 $y = \sin x$ 的单调递增区间为 $[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$ ($k \in \mathbb{Z}$), 解 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

得, $k\pi - \frac{\pi}{3} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{6}$, $k \in Z$,

$\therefore f(x)$ 的单调递增区间为 $[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}] (k \in Z)$,

(II) 因为 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 所以 $2x + \frac{\pi}{6} \in [\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}]$.

当 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{\pi}{6}$ 时, $f(x)_{\max} = 1$,

当 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$, 即 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x)_{\min} = -\frac{1}{2}$.

6. (2023·广州三模) 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin\omega x - \cos\omega x$, $\omega > 0$.

(1) 若函数 $f(x)$ 图象的两条相邻对称轴之间的距离为 π , 求 $f(x)$ 的单调增区间;

(2) 若函数 $f(x)$ 的图象关于 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 对称, 且函数 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{3}]$ 上单调, 求 ω 的值.

【解答】解 (1) Q 函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin\omega x - \cos\omega x = 2\sin(\omega x - \frac{\pi}{6})$ 的两条相邻对称轴之间的距

离为 $\frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{\omega} = \pi$, $\omega > 0$,

$\therefore \omega = 1$, $f(x) = 2\sin(x - \frac{\pi}{6})$.

令 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x - \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in Z$, 求得 $2k\pi - \frac{\pi}{3} \leq x \leq 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$, $k \in Z$,

可得它的增区间为 $[2k\pi - \frac{\pi}{3}, 2k\pi + \frac{2\pi}{3}]$, $k \in Z$.

(2) 若函数 $f(x) = 2\sin(\omega x - \frac{\pi}{6})$ 的图象关于 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 对称,

则 $\frac{\omega\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = n\pi$, $n \in Z$, $\therefore \omega = 2n + \frac{1}{3}$, $n \in Z$,

由函数 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{3}]$ 上单调, $\omega x - \frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\omega\pi}{3} - \frac{\pi}{6}]$, $\therefore \frac{\omega\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$,

求得 $\omega \leq 2$.

综上所述, $\omega = \frac{1}{3}$.

7. (2023·亭湖区校级三模) 已知函数 $f(x) = \sqrt{2}a\sin ax + a\cos(ax + \frac{\pi}{4}) + b (a > 0)$ 的值域为

$[-1, 3]$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 若 $f(\omega x) (\omega > 0)$ 在 $[0, \frac{\pi}{6}]$ 上恰有一个零点, 求 ω 的取值范围.

【解答】解： $f(x) = \sqrt{2}a \sin ax + a \cos(ax + \frac{\pi}{4}) + b$

$$= \sqrt{2}a \sin ax + \frac{\sqrt{2}}{2}a(\cos ax - \sin ax) + b$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}a(\sin ax + \cos ax) + b$$

$$= a \sin(ax + \frac{\pi}{4}) + b,$$

令 $\sin(ax + \frac{\pi}{4}) = t$ ，则 $t \in [-1, 1]$ ，

又 $a > 0$ ， $\therefore y = at + b$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递增，

故由题意有： $\begin{cases} -a + b = -1 \\ a + b = 3 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$ ，

$$\therefore f(x) = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + 1,$$

当 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ， $k \in \mathbb{Z}$ 时， $f(x)$ 单调递增，

解得 $k\pi - \frac{3\pi}{8} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{8}$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，

即 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[k\pi - \frac{3\pi}{8}, k\pi + \frac{\pi}{8}] (k \in \mathbb{Z})$ ；

(2) 由 (1) 知， $f(\omega x) = 2 \sin(2\omega x + \frac{\pi}{4}) + 1$ ，

Q $\omega > 0$ ， $\therefore$ 当 $x \in [0, \frac{\pi}{6}]$ 时， $2\omega x + \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\omega\pi}{3} + \frac{\pi}{4}]$ ，

结合正弦函数的图象可知：

当 $\pi \leq \frac{\omega\pi}{3} + \frac{\pi}{4} < 2\pi$ ，即 $\frac{9}{4} \leq \omega < \frac{21}{4}$ 时，

函数 $f(\omega x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{6}]$ 上恰有一个零点，

故 ω 的取值范围是 $[\frac{9}{4}, \frac{21}{4})$ 。

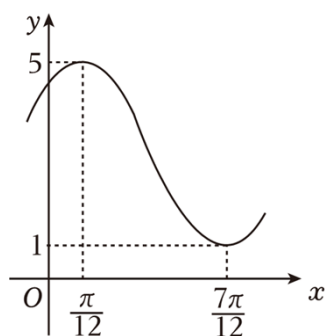
8. (2023·安康一模) 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) + B (A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示。

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2) 将函数 $y = f(x)$ 图象上所有的点向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，再将所得图象上每一个点的

横坐标变为原来的 2 倍 (纵坐标不变)，得到函数 $y = g(x)$ 的图象。当 $x \in [0, \frac{13\pi}{6}]$ 时，方程

$g(x)-a=0$ 恰有三个不相等的实数根, $x_1, x_2, x_3(x_1 < x_2 < x_3)$, 求实数 a 的取值范围以及 $x_1+2x_2+x_3$ 的值.



【解答】解：(1) 由图可得： $\begin{cases} A+B=5 \\ -A+B=1 \end{cases}$, 得： $A=\frac{5-1}{2}=2, B=\frac{5+1}{2}=3$,

又 $\frac{T}{2}=\frac{7}{12}\pi-\frac{1}{12}\pi=\frac{\pi}{2}$, 所以 $T=\pi$, 所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$,

所以 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)+3$.

又因为 $f(x)$ 过点 $(\frac{\pi}{12}, 5)$, 所以 $5=2\sin(2\times\frac{\pi}{12}+\varphi)+3$, 即 $\sin(\frac{\pi}{6}+\varphi)=1$,

所以 $\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$, 解得 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$,

又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$, 所以 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})+3$.

(2) $y=f(x)$ 图象上所有的点向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度, 得到

$$f(x)=2\sin[2(x-\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{3}]+3=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})+3,$$

将所得图象上每一个点的横坐标变为原来的 2 倍 (纵坐标不变), 得到

$$g(x)=2\sin(x-\frac{\pi}{6})+3,$$

当 $x\in[0, \frac{13\pi}{6}]$ 时, $x-\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{6}, 2\pi]$,

令 $t=x-\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{6}, 2\pi]$, 则 $2\sin(x-\frac{\pi}{6})+3=2\sin t+3$,

令 $h(t)=2\sin t+3$, 在 $t\in[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增, 在 $t\in(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ 上单调递减,

在 $t\in(\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ 上单调递增,

且 $h(-\frac{\pi}{6})=2\sin(-\frac{\pi}{6})+3=2, h(\frac{\pi}{2})=2\sin\frac{\pi}{2}+3=5$,

$h(\frac{3\pi}{2})=2\sin\frac{3\pi}{2}+3=1, h(2\pi)=2\sin 2\pi+3=3$,

所以 $a \in [2, 3]$ 时, 当 $x \in [0, \frac{13\pi}{6}]$ 时, 方程 $g(x) - a = 0$ 恰有三个不相等的实数根.

因为 $h(t) - a = 0$ 有三个不同的实数根 $t_1, t_2, t_3 (t_1 < t_2 < t_3)$,

且 t_1, t_2 关于 $t = \frac{\pi}{2}$ 对称, t_2, t_3 关于 $t = \frac{3\pi}{2}$ 对称,

则 $t_1 + t_2 = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi, t_2 + t_3 = 2 \times \frac{3\pi}{2} = 3\pi$,

两式相加得: $t_1 + 2t_2 + t_3 = 4\pi$,

即 $(x_1 - \frac{\pi}{6}) + 2(x_2 - \frac{\pi}{6}) + (x_3 - \frac{\pi}{6}) = 4\pi$, 所以 $x_1 + 2x_2 + x_3 = \frac{14\pi}{3}$.

9. (2023·青羊区校级模拟) 已知函数的 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2})$ 最小正周期为 π , 且 $f(\frac{\pi}{4}) = 1$,

(1) 求 ω, φ ;

(2) 将 $f(x)$ 图象往右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位后得函数 $g(x)$, 求 $f(x) + g(x)$ 的最大值及这时 x 值的集合.

【解答】解: (1) Q 函数的 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2})$ 最小正周期为 $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$,

$\therefore \omega = 2$.

再根据 $f(\frac{\pi}{4}) = 1 = \sin(\frac{\pi}{2} + \varphi) = \cos \varphi$, $\therefore \varphi = 0$, $f(x) = \sin 2x$.

(2) 将 $f(x) = \sin 2x$ 的图象往右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位后得函数 $g(x) = \sin(2x - \frac{2\pi}{3})$ 的图象,

故 $f(x) + g(x) = \sin 2x + \sin(2x - \frac{2\pi}{3}) = \sin 2x + (-\frac{1}{2}\sin 2x) - \cos 2x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$.

当 $f(x) + g(x)$ 取得最大值 1 时,

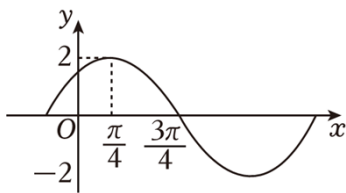
由 $2x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in Z$, 求得 $x = k\pi + \frac{5\pi}{12}$, $k \in Z$,

故当 $f(x) + g(x)$ 取得最大值时, x 值的集合为 $\{x | x = k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in Z\}$.

10. (2023·丰台区一模) 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, 0 < \varphi < \pi)$ 的部分图象如图所示.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若函数 $g(x) = f(x)\sin x$, 求 $g(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上的最大值和最小值.



【解答】解：（1）由图象可知： $T = 4(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) = 2\pi$ ，

$$\therefore \omega = 1,$$

将点 $(\frac{\pi}{4}, 2)$ 代入 $y = f(x)$ 得 $f(\frac{\pi}{4}) = 2\sin(\frac{\pi}{4} + \varphi) = 2$ ，

$$\therefore \varphi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{Q } 0 < \varphi < \pi,$$

$$\therefore \varphi = \frac{\pi}{4},$$

$$\therefore f(x) = 2\sin(x + \frac{\pi}{4});$$

$$(2) \quad g(x) = f(x) \sin x = \sqrt{2} \sin x (\sin x + \cos x) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin 2x - \cos 2x) + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(2x - \frac{\pi}{4}) + \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{由 } x \in [0, \frac{\pi}{4}] \text{ 得 } 2x - \frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}],$$

$$\text{当 } 2x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} \text{ 时, 即 } x = 0, \quad g(x)_{\min} = 0,$$

$$\text{当 } 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \text{ 时, 即 } x = \frac{\pi}{4}, \quad g(x)_{\max} = \sqrt{2}.$$

11. (2023•顺义区一模) 已知函数 $f(x) = A \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos 2x$ 的一个零点为 $\frac{\pi}{6}$.

(1) 求 A 和函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, 若 $f(x) \geq m$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

【解答】解：（1）Q $f(x) = A \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos 2x = \frac{A}{2} \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x$ 的一个零点为 $\frac{\pi}{6}$,

$$\therefore f(\frac{\pi}{6}) = \frac{A}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,$$

$$\therefore A = 2, \quad f(x) = \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{3}),$$

$$\therefore T = \frac{2\pi}{2} = \pi;$$

$$(2) \text{ 当 } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ 时, } 2x - \frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}], \quad 2 \sin(2x - \frac{\pi}{3}) \in [-\sqrt{3}, 2],$$

$$\therefore f(x)_{\max} = 2,$$

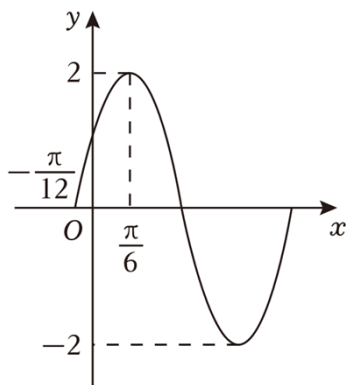
$\therefore m \geq 2$ ，即 $m \in [2, +\infty)$ 。

12. (2023·全国二模) 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图像如图

所示，其中 $f(x)$ 的图像与 x 轴的一个交点的横坐标为 $-\frac{\pi}{12}$ 。

(1) 求这个函数的解析式；

(2) 若函数 $g(x) = f(x) - a$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{12}]$ 上存在零点，求实数 a 的取值范围。



【解答】解：(1) 由图知： $A = 2$ ， $\frac{\pi}{6} - (-\frac{\pi}{12}) = \frac{\pi}{4} = \frac{T}{4}$ ，所以 $T = \pi$ ，所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$ ，

所以 $f(x) = 2\sin(2x + \varphi)$ ，

由 $f(\frac{\pi}{6}) = 2\sin(2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi) = 2$ ，且 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ，

所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ ，

所以 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$ ；

(2) 令 $g(x) = 0$ 得： $f(x) = a$ ，

对于 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$ ， $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{12}]$ ，

则 $2x + \frac{\pi}{6} \in [-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ ，

由 $y = 2\sin t$ 的图像和性质可得： $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{12}]$ 上的值域为 $[-2, \sqrt{3}]$ ，

所以函数 $g(x) = f(x) - a$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{12}]$ 上存在零点，有 $a \in [-2, \sqrt{3}]$ 。

13. (2023·香洲区校级模拟) 摩天轮是一种大型转轮状的机械建筑设施，游客坐在摩天轮的

座舱里慢慢的往上转，可以从高处俯瞰四周的景色（如图1）某摩天轮的最高点距离地面的

高度为 90 米，最低点距离地面 10 米，摩天轮上均匀设置了 36 个座舱（如图2）

，开启后摩天轮按逆时针方向匀速转动，游客在座舱离地面最近时的位置进入座舱，摩天轮转完一周后在相同的位置离开座舱摩天轮转一周需要 30 分钟，当游客甲坐上摩天轮的座舱开始计时．



图1

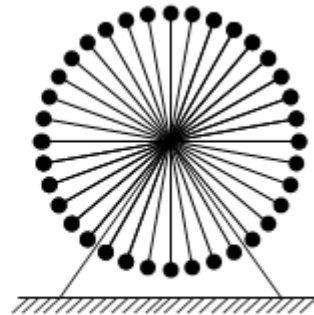


图2

(1) 经过 t 分钟后游客甲距离地面的高度为 H 米，已知 H 关于 t 的函数关系式满足 $H(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + B$ (其中 $A > 0$, $\omega > 0$, $|\varphi| \leq \pi$) , 求摩天轮转动一周的解析式 $H(t)$;

(2) 问：游客甲坐上摩天轮后多长时间，距离地面的高度恰好为 30 米？

【解答】解：(1) $H(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + B$ (其中 $A > 0$, $\omega > 0$, $|\varphi| \leq \pi$) ,

$$\text{由题意知：} \begin{cases} A + B = 90 \\ -A + B = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 40 \\ B = 50 \end{cases},$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 30 \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{15},$$

$$\text{故 } H(t) = 40\sin\left(\frac{\pi}{15}t + \varphi\right) + 50,$$

$$\text{Q } H(0) = 10,$$

$$\therefore \sin \varphi = -1,$$

$$\text{又Q } |\varphi| \leq \pi,$$

$$\therefore \varphi = -\frac{\pi}{2},$$

$$\therefore H(t) = 40\sin\left(\frac{\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) + 50 = -40\cos\frac{\pi}{15}t + 50,$$

$$\text{故解析式为：} H(t) = -40\cos\frac{\pi}{15}t + 50, \quad t \in [0, 30];$$

$$(2) \text{ 令 } H(t) = 30, \text{ 则 } -\cos\frac{\pi}{15}t = -\frac{1}{2}, \text{ 即 } \cos\frac{\pi}{15}t = \frac{1}{2},$$

$$\text{因为 } t \in [0, 30], \text{ 则 } \frac{\pi}{15}t \in [0, 2\pi],$$

$$\text{所以 } \frac{\pi}{15}t = \frac{\pi}{3} \text{ 或 } \frac{5\pi}{3},$$

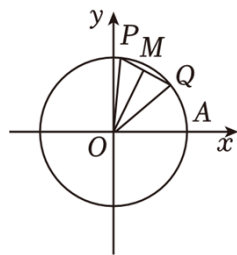
$$\text{解得 } t = 5 \text{ 或 } t = 25,$$

故游客甲坐上摩天轮 5 分钟或 25 分钟时，距离地面的高度恰好为 30 米.

14. (2023·桃城区校级模拟) 如图, P, Q 是以原点为圆心的单位圆上的两个动点, 若它们同时从点 $A(1,0)$ 出发, 沿逆时针方向做匀角速度运动, 其角速度分别为 $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ (单位: 弧度/秒), M 为线段 PQ 的中点, 记经过 x 秒后 (其中 $0 \leq x \leq 6$), $f(x) = |OM|$.

(1) 求 $y = f(x)$ 的函数解析式;

(2) 将 $f(x)$ 图像上的各点均向右平移 2 个单位长度, 得到 $y = g(x)$ 的图像, 求函数 $y = g(x)$ 的单调递减区间.



【解答】解 (1) P, Q 是以原点为圆心的单位圆上的两个动点, 它们同时从点 $A(1,0)$ 出发,

沿逆时针方向做匀角速度运动, 其角速度分别为 $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ (单位: 弧度/秒),

经过 x 秒后 (其中 $0 \leq x \leq 6$),

$$\text{则 } \angle POA = \frac{\pi}{3}x, \angle QOA = \frac{\pi}{6}x.$$

因为 $|OP| = |OQ| = 1$,

$$\text{所以 } |OM| = |OQ| \cdot \cos \angle MOQ = \cos \angle MOQ,$$

$$\text{所以 } \angle MOQ = \frac{\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{6}x}{2} = \frac{\pi}{12}x,$$

$$\text{所以 } f(x) = |OM| = \cos \frac{\pi}{12}x \quad (0 \leq x \leq 6).$$

$$\text{即 } f(x) = \cos \frac{\pi}{12}x \quad (0 \leq x \leq 6).$$

$$(2) \text{ 依题意可知 } g(x) = \cos\left[\frac{\pi}{12}(x-2)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{12}x - \frac{\pi}{6}\right) \quad (2 \leq x \leq 8)$$

由 $2k\pi, \frac{\pi}{12}x - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \pi$, 得 $24k + 2, x, 24k + 14$,

故函数 $y = g(x)$ 在 $[2, 8]$ 上的单调递减区间为 $[2, 8]$.

15. (2023·南通三模) 将函数 $f(x) = \sin x$ 的图象先向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度, 再将所得函数图象上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega} (\omega > 0)$ 倍 (纵坐标不变), 得到函数 $y = g(x)$ 的图象.

(1) 若 $\omega = 2$, 求函数 $y = g(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上的最大值;

(2) 若函数 $y = g(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 上没有零点, 求 ω 的取值范围.

【解答】解: (1) 函数 $f(x) = \sin x$ 的图象先向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度, 则解析式变为:

$$y = \sin(x - \frac{\pi}{4}),$$

再将所得函数图象上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega} (\omega > 0)$ 倍 (纵坐标不变), 则解析式变为

$$y = \sin(\omega x - \frac{\pi}{4}),$$

$$\text{则 } g(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{4}),$$

$$\text{当 } -\frac{\pi}{4}, x, \frac{\pi}{4} \text{ 时, } -\frac{3\pi}{4}, 2x - \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4},$$

因函数 $y = \sin x$ 在 $[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}]$ 上单调递减, 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递增,

$$\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1, \max\{\sin(-\frac{3\pi}{4}), \sin \frac{\pi}{4}\} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore -1, \sin(2x - \frac{\pi}{4}), \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore y = g(x) \text{ 在区间 } [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \text{ 上的最大值为 } \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$(2) g(x) = \sin(\omega x - \frac{\pi}{4}), \text{ 当 } \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \text{ 时, } \frac{\pi\omega}{4} - \frac{\pi}{4} < \omega x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi\omega}{2} - \frac{\pi}{4},$$

$$\text{要使 } g(x) \text{ 在 } (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \text{ 上无零点, 则 } \begin{cases} \frac{\omega\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \leq k\pi \\ \frac{\omega\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \geq (k+1)\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow 4k + 1, \omega, 2k + \frac{5}{2}, k \in \mathbb{Z}, \omega > 0, 4k + 1, 2k + \frac{5}{2} \Rightarrow k, \frac{3}{4},$$

$$\text{当 } k = 0 \text{ 时, } 1, \omega, \frac{5}{2}; \text{ 当 } k = -1 \text{ 时, } -3, \omega, \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < \omega, \frac{1}{2},$$

当 $k, -2$ 时, $\omega < 0$ 舍去.

综上： ω 的取值范围为 $(0, \frac{1}{2}] \cup [1, \frac{5}{2}]$.

16. (2023·海淀区校级三模) 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \frac{\pi}{3}) + m - \sqrt{3} (\omega > 0)$. 在下列条件①、

条件②、条件③这三个条件中, 选择可以确定 ω 和 m 值的两个条件作为已知.

(1) 求 $f(\frac{\pi}{6})$ 的值;

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上是增函数, 求实数 a 的最大值.

条件①: $f(0) = 2$;

条件②: $f(x)$ 最大值与最小值之和为 0;

条件③: $f(x)$ 最小正周期为 π .

【解答】解: (1) 若选条件①③:

由条件③得, $T = \frac{2\pi}{|\omega|} = \pi$, 又因为 $\omega > 0$,

所以 $\omega = 2$,

由①知, $f(0) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} + m = 2$, 所以 $m = 2$.

则 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3}) + 2 - \sqrt{3}$,

所以 $f(\frac{\pi}{6}) = 2$;

(2) 令 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$,

所以 $-\frac{5\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{12} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$,

所以函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $[-\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{12} + k\pi] (k \in \mathbb{Z})$,

因为函数在区间 $[0, a]$ 上单调递增, 且 $0 \in [-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}]$, 此时 $k = 0$,

所以 $a \leq \frac{\pi}{12}$, 故 a 的最大值为 $\frac{\pi}{12}$;

选条件②③:

由于 $f(x)$ 最小正周期为 π ,

所以 $\omega = 2$, $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3}) + m - \sqrt{3}$,

由 $f(x)$ 最大值与最小值之和为 0, $f(x)_{\min} = -2 - \sqrt{3} + m, f(x)_{\max} = 2 - \sqrt{3} + m$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/748051056067006130>