

广西壮族自治区三新学术联盟 2023-2024 学年高二上学期 期末教学质量检测数学试题

注意事项:

- 1.答题前, 先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上, 并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
- 2.请按题号顺序在答题卡上各题目的答题区域内作答, 写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.
- 3.选择题用 2B 铅笔在答题卡上把所选【答案】的标号涂黑; 非选择题用黑色签字笔在答题卡上作答; 字体工整, 笔迹清楚.
- 4.考试结束后, 将答题卡交回.
- 5.本卷主要考查内容: 选择性必修第一册, 选择性必修第二册第四章.

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 抛物线 $y^2 = x$ 的焦点坐标是 ()

- A. $(1, 0)$ B. $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ C. $(0, -1)$ D. $\left(0, \frac{1}{4}\right)$

【答案】B

【解析】由 $y^2 = x$ 可知抛物线焦点在 x 轴上, 且 $2p = 1$,

$\therefore p = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{p}{2} = \frac{1}{4}$, 所以焦点为 $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$. 故选: B.

2. 已知向量 $\vec{a} = (-1, 3, 2)$, $\vec{b} = (2, -6, z)$, 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $z =$ ()

- A. -4 B. 4 C. $\frac{1}{4}$ D. $-\frac{1}{4}$

【答案】A

【解析】因为 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 所以 $\frac{2}{-1} = \frac{-6}{3} = \frac{z}{2} \Rightarrow z = -4$. 故选: A.

3. 设 P 是椭圆 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上的动点, 则 P 到该椭圆的两个焦点距离之和为 ()

- A. $\sqrt{6}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. $2\sqrt{6}$

【答案】D

【解析】椭圆 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} = 1$, 则 $a^2 = 6$, 所以 $a = \sqrt{6}$,

因为 P 是椭圆上的动点, 则 P 到该椭圆的两个焦点距离之和为 $2a = 2\sqrt{6}$.

高级中学名校试卷

故选：D

4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项之和为 25, $a_2 = -1$, 则公差为 ()

- A. 6 B. 3 C. 4 D. 5

【答案】A

【解析】在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $S_5 = \frac{5(a_1 + a_5)}{2} = 5a_3 = 25$, 所以 $a_3 = 5$, 所以公差

$$d = a_3 - a_2 = 6.$$

故选：A.

5. 已知两直线 $y = x + 2k$ 与 $y = -x$ 的交点在圆 $x^2 + y^2 = 8$ 的内部, 则实数 k 的取值范围是 ()

- A. $-1 < k < 1$ B. $-2 < k < 2$
C. $-3 < k < 3$ D. $-\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$

【答案】B

【解析】由 $\begin{cases} y = x + 2k \\ y = -x \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x = -k \\ y = k \end{cases}$, 则两直线 $y = x + 2k$ 与 $y = -x$ 的交点为 $(-k, k)$,

依题意得 $k^2 + (-k)^2 < 8$, 解得 $-2 < k < 2$.

故选：B.

6. 正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_2 = 3$, $S_4 = 15$, 则 $a_5 + a_6$ 等于 ()

- A. 9 B. 72 C. 70 D. 48

【答案】D

【解析】由题意, $n \in \mathbf{N}^*$, 设公比为 q , $q^2 = \frac{S_4 - S_2}{S_2} = \frac{15 - 3}{3} = 4$,

$$a_5 + a_6 = q^4(a_1 + a_2) = 16 \times 3 = 48.$$

故选:D.

7. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 以双曲线 C 的右顶点 A 为圆心, b 为半径作

圆 A , 圆 A 与双曲线 C 的一条渐近线交于 M, N 两点, 若 $\angle MAN = 60^\circ$, 则双曲线的离心率为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. 2

【答案】C

【解析】由于 $\angle MAN = 60^\circ$, 因此点 A 到渐近线距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}b$, 其中一条渐近线方程为

高级中学名校试卷

$$bx - ay = 0,$$

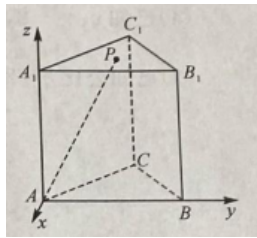
$$\text{所以有 } \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}b, \text{ 可得 } a^2 = 3b^2, e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

故选: C.

8. 如图所示空间直角坐标系 $A-xyz$ 中, $P(x, y, z)$ 是正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的底面

$A_1B_1C_1$ 内一动点, $A_1A = AB = 2$, 直线 PA 和底面 ABC 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$, 则 P 点的坐标满足

()



A. $x^2 + y^2 = \frac{4}{3}$

B. $x^2 + y^2 = 2$

C. $x^2 + y^2 = 3$

D. $x^2 + y^2 = 4$

【答案】A

【解析】由正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$, 且 $A_1A = AB = 2$, 根据坐标系可得: $A(0,0,0)$,

$A_1(0,0,2)$, 又 $P(x,y,z)$ 是正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的底面 $A_1B_1C_1$ 内一动点, 则 $z = 2$,

所以 $\vec{PA} = (-x, -y, -z)$, 又 $AA_1 \perp$ 平面 ABC , 所以 $\vec{AA_1} = (0,0,2)$ 是平面 ABC 的一个法向

量, 因为直线 PA 和底面 ABC 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$,

$$\text{所以 } \left| \cos \langle \vec{PA}, \vec{AA_1} \rangle \right| = \frac{|\vec{PA} \cdot \vec{AA_1}|}{|\vec{PA}| \cdot |\vec{AA_1}|} = \frac{|-2z|}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \times 2} = \frac{|z|}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{整理得 } z^2 = 3x^2 + 3y^2, \text{ 又 } z = 2, \text{ 所以 } x^2 + y^2 = \frac{4}{3}.$$

故选:A.

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 若圆 $M: (x-k)^2 + (y-1)^2 = 8$ 与圆 $N: (x-1)^2 + (y-k)^2 = 2$ 相交, 则 k 的取值可能为 ()

A. $-\frac{3}{2}$

B. 1

C. 3.8

D. 4.2

高级中学名校试卷

【答案】AC

【解析】两圆的圆心分别为 $M(k, 1)$, $N(1, k)$, 圆心距 $|MN| = \sqrt{2(k-1)^2} = \sqrt{2}|k-1|$,

半径分别为 $2\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$,

因为圆 M 与圆 N 相交, 所以 $2\sqrt{2} - \sqrt{2} < \sqrt{2}|k-1| < 2\sqrt{2} + \sqrt{2}$,

解得 $-2 < k < 0$ 或 $2 < k < 4$.

故选: AC.

10. 关于 x, y 的方程 $x^2 + my^2 = m (m \in \mathbb{R})$ 表示的曲线可以是 ()

- A. 椭圆 B. 双曲线 C. 抛物线 D. 圆

【答案】ABD

【解析】由题意得: 对于方程 $x^2 + my^2 = m$,

①当 $m=1$ 时, 方程即 $x^2 + y^2 = 1$, 表示圆;

②当 $m=0$ 时, 方程即 $x^2 = 0$, 即 $x=0$, 表示 y 轴;

③当 $m \neq 1$ 且 $m \neq 0$ 时, 方程即 $\frac{x^2}{m} + y^2 = 1$,

若 $m < 0$, 方程表示双曲线; 若 $m > 0$ 且 $m \neq 1$, 方程表示椭圆.

综合可得: 方程不可能是抛物线.

故选: ABD.

11. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, 其前 n 项和为 S_n , $a_{12} = 0$, 则下列结论一定正确的有 ()

- A. $a_1 + 5a_3 = S_7$ B. S_{12} 最小
C. $S_8 = S_{15}$ D. $S_{23} = 20$

【答案】AC

【解析】根据题意, 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 设公差为 d ,

若 $a_{12} = 0$, 得 $a_1 = -11d$, $a_1 + 5a_3 = 6a_1 + 10d = -56d$,

$S_7 = 7a_1 + \frac{7 \times 6}{2}d = -77d + 21d = -56d$, 所以选项 A 正确;

$a_n = a_1 + (n-1)d = -11d + (n-1)d = (n-12)d$,

如果 $d = 0$, 则 $a_1 = 0$, 则 S_{12} 最小; 如果 $d > 0$, 则 $a_1 < 0$, 由于 $a_{12} = 0$, 则 S_{12} 最小;

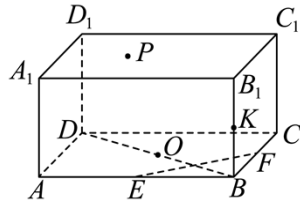
如果 $d < 0$, 则 $a_1 > 0$, 由 $a_{12} = 0$, $n \geq 13$ 时 $a_n < 0$, 则 S_n 没有最小值, 所以选项 B 错误

$S_{15} - S_8 = a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} = 7a_{12} = 0$, 得 $S_{15} = S_8$, 所以选项 C 正确;

$$S_{23} = \frac{23}{2}(a_1 + a_{23}) = 23a_{12} = 0, \text{ 所以选项 D 错误.}$$

故选: AC.

12. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 是底面 $A_1B_1C_1D_1$ 内的动点, E, F, O, K 分别为 AB, BC, BD, BB_1 的中点, 若 $AB = 2AA_1 = 2AD = 2$, 则下列说法正确的是 ()



A. $\vec{AP} \cdot \vec{AD}$ 的最大值为 2

B. 三棱锥 $P-ABD$ 的体积不变, 表面积改变

C. 若 $PK \perp$ 平面 B_1EF , 则 $|PK| = \frac{\sqrt{6}}{2}$

D. $EP^2 + PK^2$ 的最小值为 $\frac{7}{2}$

【答案】BC

【解析】对于 A, P 是底面 $A_1B_1C_1D_1$ 内的动点,

则存在实数 x, y 使得 $\vec{A_1P} = x\vec{A_1D_1} + y\vec{A_1B_1} = x\vec{AD} + y\vec{AB}$,

则 $\vec{AP} = \vec{AA_1} + \vec{A_1P} = \vec{AA_1} + x\vec{AD} + y\vec{AB}$,

所以 $\vec{AP} \cdot \vec{AD} = \vec{AA_1} \cdot \vec{AD} + x\vec{AD} \cdot \vec{AD} + y\vec{AB} \cdot \vec{AD} = x$, 当 P 点在线段 C_1D_1 上时,

$\vec{AP} \cdot \vec{AD}$ 的最大值为 1, 故 A 错误;

对于 B, 因为 P 点到底面 ABD 的距离为 $AA_1 = 1$, 底面面积为 $\frac{1}{2} \times AD \times AB = 1$,

所以三棱锥 $P-ABD$ 的体积为 $V = \frac{1}{3} \times 1 \times 1 = \frac{1}{3}$, 是定值; 三棱锥 A_1-ABD 与三棱锥

B_1-ABD 表面积不同, 故 B 正确;

以 D 为原点, DA, DC, DD_1 所在的直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系, 于是

$$E(1, 1, 0), F\left(\frac{1}{2}, 2, 0\right), B_1(1, 2, 1), K\left(1, 2, \frac{1}{2}\right),$$

$$\text{设 } P(a, b, 1), \text{ 则 } \vec{EB_1} = (0, 1, 1), \vec{EF} = \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right), \vec{KP} = \left(a-1, b-2, \frac{1}{2}\right),$$

所以 $\overrightarrow{EB_1} \cdot \overrightarrow{KP} = b - 2 + \frac{1}{2} = 0$, $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{KP} = -\frac{1}{2}(a-1) + b - 2 = 0$, 解得 $b = \frac{3}{2}$, $a = 0$,

于是 $|\overrightarrow{PK}| = \left| \left(-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right| = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 故 C 正确;

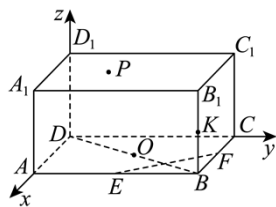
由上述坐标系知 $\overrightarrow{EP} = (a-1, b-1, 1)$,

则 $EP^2 + PK^2 = (a-1)^2 + (b-1)^2 + 1 + (a-1)^2 + (b-2)^2 + \frac{1}{4}$

$$= 2(a-1)^2 + 2\left(b - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4},$$

于是当 $a = 1$, $b = \frac{3}{2}$ 时, $EP^2 + PK^2$ 取最小值 $\frac{7}{4}$, 故 D 错误.

故选: BC.



三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若点 $M(-1, 2)$ 在抛物线 $x^2 = 2py$ 上, 则该抛物线的方程为_____.

【答案】 $x^2 = \frac{1}{2}y$

【解析】由 $M(-1, 2)$ 在 $x^2 = 2py$ 上, 代入可得 $p = \frac{1}{4}$, 即抛物线的方程为 $x^2 = \frac{1}{2}y$.

故【答案】为: $x^2 = \frac{1}{2}y$.

14. 已知空间向量 $\vec{a} = (1, 0, -1)$, $\vec{b} = (2, -1, 1)$, 则向量 $\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}$ 上的投影向量的坐标是_____.

【答案】 $\left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2} \right)$

【解析】空间向量 $\vec{a} = (1, 0, -1)$, $\vec{b} = (2, -1, 1)$,

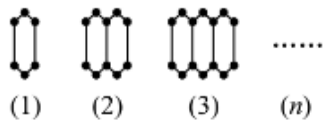
则向量 $\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}$ 上的投影向量是:

$$|\vec{b}| \cdot \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2} \cdot (1, 0, -1) = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2} \right). \text{故【答案】为: } \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2} \right).$$

15. 如图所示是一系列有机物的结构简图, 途中的“小黑点”表示原子, 两黑点间的“短线”

高级中学名校试卷

表示化学键,按图中结构第 n 个图的化学键和原子的个数之和为_____个.(用含 n 的代数式表示)



【答 案】 $9n+3$

【解 析】由图,第 1 个图中有 6 个化学键和 6 个原子;

第 2 个图中有 11 个化学键和 10 个原子;

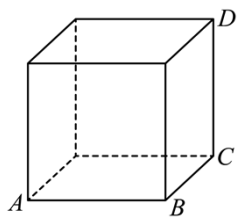
第 3 个图中有 16 个化学键和 14 个原子,

观察可得,后一个图比前一个图多 5 个化学键和 4 个原子,

则第 n 个图有 $6+5(n-1)=5n+1$ 个化学键和 $4n+2$ 个原子,所以总数为 $9n+3$.

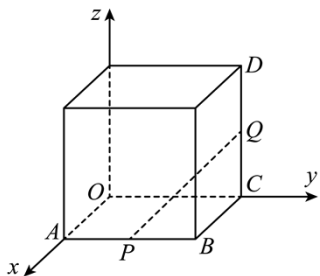
故【答 案】为: $9n+3$

16. 如图,棱长为 1 的正方体上有两个动点分别从顶点 A 、 C 同时出发并做匀速直线运动,最后同时到达顶点 B 、 D ,则在运动的过程中,两个动点间的最小距离为_____



【答 案】 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

【解 析】如图,建立空间直角坐标系,



根据题意可得:两动点间距离最小值坐标分别为 $P(1,t,0)$, $Q(0,1,t)$, $0 \leq t \leq 1$,

由空间两点间距离公式可得

$$|PQ| = \sqrt{(1-0)^2 + (t-1)^2 + (0-t)^2} = \sqrt{2t^2 - 2t + 2} = \sqrt{2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}},$$

因为 $0 \leq t \leq 1$, 所以当 $t = \frac{1}{2}$ 时, $|PQ|$ 取最小值 $\frac{\sqrt{6}}{2}$, 故【答 案】为: $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

高级中学名校试卷

17. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中.

(1) 已知 $a_1 = -2$, $a_6 = \frac{1}{16}$, 求前 4 项和 S_4 ;

(2) 已知公比 $q = 2$, 前 6 项和 $S_6 = 189$, 求 a_1 .

解: (1) 设公比为 q , 由 $a_1 = -2$, $a_6 = \frac{1}{16}$, 得 $q^5 = \frac{a_6}{a_1} = -\frac{1}{32}$,

所以 $q = -\frac{1}{2}$,

$$\text{所以 } S_4 = \frac{-2 \left[1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^4 \right]}{1 - \left(-\frac{1}{2} \right)} = -\frac{5}{4};$$

(2) 由 $S_6 = a_1 \times \frac{1-2^6}{1-2} = 189$ 得, $a_1 = 3$.

18. 已知圆 C 经过 $A(-1,0)$, $B(3,2)$ 两点, 且圆心 C 在直线 $x+y-1=0$ 上.

(1) 求圆 C 的方程;

(2) 过点 $(-2,0)$ 的直线 l 与圆 C 交于 P, Q 两点, 若 $|PQ|=6$, 求直线 l 的方程.

解: (1) 因为 $k_{AB} = \frac{2}{3+1} = \frac{1}{2}$, A, B 的中点为 $(1,1)$,

故 AB 的垂直平分线所在的直线方程为 $y = -2(x-1)+1$,

即 $y = -2x+3$,

由 $\begin{cases} y = -2x+3, \\ x+y-1=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$, 故圆心为 $C(2,-1)$,

半径 $R = \sqrt{(-1-2)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$, 故圆 C 的方程为 $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 10$;

(2) 当直线 l 斜率不存在时, 直线 l 的方程为 $x = -2$, 此时与圆 C 没有交点, 不合题意;

当直线 l 斜率存在时, 设直线 l 的方程为 $y = k(x+2)$, 即 $kx - y + 2k = 0$,

由 $|PQ|=6$, 可得圆心到直线 l 的距离为 $d = \frac{|4k+1|}{\sqrt{1+k^2}} = \sqrt{R^2 - (3)^2} = 1$,

解得 $k = -\frac{8}{15}$ 或 0 ,

故直线 l 的方程为 $y = 0$ 或 $8x + 15y + 16 = 0$.

19. 已知 $\triangle ABC$ 的周长为 $2\sqrt{2}+2$ ，其中点 $A(-1,0)$ ， $B(1,0)$ 。

(1) 求点 C 的轨迹方程；

(2) 设 D 为点 A 关于直线 $x-2y-\frac{3}{2}=0$ 的对称点，求线段 CD 的长度的取值范围。

解：(1) 由题意可知 $|BC|+|AC|=2+2\sqrt{2}-2=2\sqrt{2}$ ， $|AB|=2$ ，

所以 $|BC|+|AC|>|AB|$ ，

根据椭圆定义可知，点 C 轨迹为椭圆，且 $2a=2\sqrt{2}$ ，

因此 $a=\sqrt{2}$ ， $c=1$ ，可得 $b^2=1$ ，

则点 C 轨迹方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ ， $x\neq\pm\sqrt{2}$ ；

(2) 设点 $D(x_0, y_0)$ ，因为点 A 与点 D 关于直线 $x-2y-\frac{3}{2}=0$ 对称，

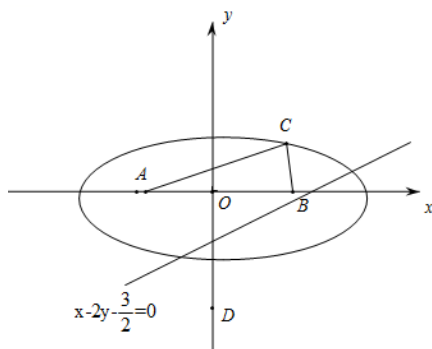
$$\text{于是有} \begin{cases} \frac{y_0}{x_0+1} = -2 \\ \frac{x_0-1}{2} - 2 \cdot \frac{y_0}{2} - \frac{3}{2} = 0 \end{cases}, \text{解出} \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = -2 \end{cases}, \text{即点 } D(0, -2),$$

设点 $C(x_1, y_1)$ 为点 C 轨迹方程上一点，满足 $\frac{x_1^2}{2}+y_1^2=1$ ， $x_1\neq\pm\sqrt{2}$ ，

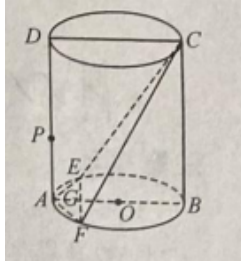
$$\text{则 } |CD| = \sqrt{x_1^2 + (y_1+2)^2} = \sqrt{2-2y_1^2 + (y_1+2)^2} = \sqrt{-(y_1-2)^2 + 10},$$

由于 $y_1 \in [-1, 0) \cup (0, 1]$ ，所以 $y_1 = -1$ 时， $|CD|_{\min} = -1$ ， $y_1 = 1$ 时， $|CD|_{\max} = 3$ ，

又因为 $y_1 \neq 0$ ，所以 $|CD|_{\min} \neq \sqrt{6}$ ，因此 $|CD| \in [1, \sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}, 3]$ 。



20. 如图， O 是圆柱下底面的圆心，该圆柱的轴截面是边长为 4 的正方形 $ABCD$ ， P 为线段 AD 上的动点， E, F 为下底面上的两点，且 $AE = AF$ ， $\angle EAF = 120^\circ$ ， EF 交 AB 于点 G 。



(1) 当 $AP = \frac{3}{2}$ 时, 证明: $OP \perp$ 平面 CEF ;

(2) 当 $\triangle PEF$ 为等边三角形时, 求二面角 $P-EF-C$ 的余弦值.

解: (1) 解法一: 连接 OP, CG , 由题意可知 $\angle EAF = 120^\circ$, 且 $AE = AF$,

因此 $EF \perp AO$,

易知 $AE = 2$, 点 G 为 OA 中点,

考虑 $\triangle BCG$ 与 $\triangle AOP$, $\frac{OA}{CB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{AP}{BG} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{1}$, 且 $\angle PAO = \angle GBC = 90^\circ$,

因此 $\triangle BCG \sim \triangle AOP$, 故 $\angle POA + \angle CGB = 90^\circ$,

因此 $OP \perp CG$,

在圆柱中, $DA \perp$ 平面 AEF , $EF \subset$ 平面 AEF ,

因此 $DA \perp EF$,

又因为 $EF \perp AO$, $DA \cap AO = A$, $DA, AO \subset$ 平面 $ABCD$,

因此 $EF \perp$ 平面 $ABCD$,

由于 $PO \subset$ 平面 $ABCD$,

因此 $EF \perp PO$,

由于 $EF \perp PO$, $CG \perp PO$, $EF \cap CG = G$, $EF, CG \subset$ 平面 CEF ,

因此 $OP \perp$ 平面 CEF ;

解法二: 以 A 为原点, 建立如图所示空间直角坐标系,

此时 $O(0, 2, 0)$, $P(0, 0, \frac{3}{2})$, $C(0, 4, 4)$,

由于 $AE = AF$, $\angle EAF = 120^\circ$, 可求出 $E(-\sqrt{3}, 1, 0)$, $F(\sqrt{3}, 1, 0)$,

因此 $\vec{OP} = (0, -2, \frac{3}{2})$, $\vec{CE} = (-\sqrt{3}, -3, -4)$, $\vec{CF} = (\sqrt{3}, -3, -4)$,

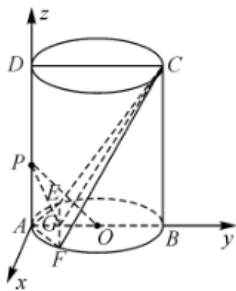
设平面 CEF 的法向量 $\vec{n} = (a, b, c)$, 则 $\begin{cases} -\sqrt{3}a - 3b - 4c = 0, \\ \sqrt{3}a - 3b - 4c = 0, \end{cases}$

不妨令 $b = 2$, 则 $a = 0$, $c = -\frac{3}{2}$, 则 $\vec{n} = (0, 2, -\frac{3}{2})$,

高级中学名校试卷

由于 $\vec{OP} = -\vec{n}$, 因此 $OP \perp$ 平面 CEF ;

(2) 以 A 为坐标原点, 建立如图空间直角坐标系,



则有 $E(-\sqrt{3}, 1, 0)$, $F(\sqrt{3}, 1, 0)$, $C(0, 4, 4)$, $G(0, 1, 0)$, 设 $P(0, 0, k)$,

若 $\triangle PEF$ 为等边三角形, 则 $|\vec{PE}| = |\vec{EF}| = 2\sqrt{3}$,

$\vec{PE} = (-\sqrt{3}, 1, -k)$, $|\vec{PE}| = \sqrt{3+1+k^2} = 2\sqrt{3}$, 于是 $k = 2\sqrt{2}$ 或 $k = -2\sqrt{2}$ (舍去),

由 (1) 知平面 CEF 的法向量为 $\vec{n} = \left(0, 2, -\frac{3}{2}\right)$,

$\vec{PE} = (-\sqrt{3}, 1, -2\sqrt{2})$, $\vec{PF} = (\sqrt{3}, 1, -2\sqrt{2})$,

设平面 PEF 的法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$, 则 $\begin{cases} -\sqrt{3}x_1 + y_1 - 2\sqrt{2}z_1 = 0, \\ \sqrt{3}x_1 + y_1 - 2\sqrt{2}z_1 = 0, \end{cases}$

取 $y_1 = 2\sqrt{2}$, 则 $z_1 = 1$, $x_1 = 0$, $\vec{m} = (0, 2\sqrt{2}, 1)$,

设二面角 $P-EF-C$ 为 α , 由图知 α 为锐角, $\cos \alpha = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{4\sqrt{2} - \frac{3}{2}}{3 \times \frac{5}{2}} = \frac{8\sqrt{2} - 3}{15}$.

21. 已知过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F , 斜率为 2 的直线交抛物线于 A, B 两点, 且 $|AB| = 10$.

(1) 求抛物线的方程;

(2) 抛物线的准线与 x 轴交于点 F' , 过点 F' 的直线 l 交抛物线于 M, N 两点, 当

$\vec{F'M} \cdot \vec{F'N} = 64$ 时, 求直线 l 的方程.

解: (1) 由题意可知, 设直线 AB 的方程是 $y = 2\left(x - \frac{p}{2}\right)$,

A, B 两点的坐标分别为 (x_3, y_3) , (x_4, y_4) ,

$$\text{与} \begin{cases} y^2 = 2px \\ y = 2\left(x - \frac{p}{2}\right) \end{cases} \text{联立, 消去 } y, \text{ 得 } 4x^2 - 6px + p^2 = 0, \text{ 所以 } x_3 + x_4 = \frac{3}{2}p,$$

$$\text{由抛物线定义得 } |AB| = x_3 + x_4 + p = \frac{3}{2}p + p = \frac{5}{2}p = 10,$$

所以 $p = 4$, 从而抛物线方程是 $y^2 = 8x$;

(2) 由题意可知, 直线 MN 的斜率存在且不为 0, $F'(-2, 0)$, 设直线 MN 的方程是

$$y = k(x + 2), \text{ 设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$$

$$\text{联立方程得 } \begin{cases} y = k(x + 2) \\ y^2 = 8x \end{cases}, \text{ 化简得 } k^2x^2 + (4k^2 - 8)x + 4k^2 = 0, \text{ 由 } \Delta = 64 - 64k^2 > 0,$$

$$\text{解得 } k^2 < 1, \text{ 则 } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{8 - 4k^2}{k^2} \\ x_1x_2 = 4 \end{cases}$$

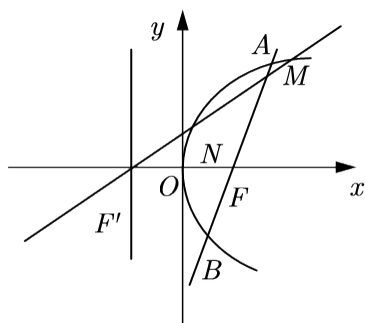
$$\text{所以 } y_1y_2 = k^2(x_1 + 2)(x_2 + 2),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{F'M} \cdot \overrightarrow{F'N} = (x_1 + 2, y_1) \cdot (x_2 + 2, y_2) = (x_1 + 2)(x_2 + 2) + y_1y_2$$

$$= (k^2 + 1)(x_1 + 2)(x_2 + 2) = (k^2 + 1)[x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4] = \frac{16(k^2 + 1)}{k^2} = 64,$$

$$\text{所以 } \frac{16(k^2 + 1)}{k^2} = 64, \text{ 解得 } k^2 = \frac{1}{3}, \text{ 即 } k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 满足 } \Delta > 0,$$

$$\text{所以直线 } l \text{ 的方程为 } y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 2).$$



22. 已知数列 $\left\{ \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \right\}$ 是以公比为 3, 首项为 3 的等比数列, 且 $a_1 = 1$.

(1) 求出 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{na_n}{a_n + 2}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若不等式 $2S_n > \lambda - \frac{n+1}{3^n}$ 对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/748107107133006054>