专题 02 数列（解答题 12 种考法）

1．（2023·甘肃酒泉·统考三模）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，$(2n-1)a_{n+1}=(2n+3)a_n(n\in \mathrm{N}^*)$．

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\{\dfrac{1}{a_n}\}$的前n项和S_n．

【答案】(1)$a_n=(2n-1)(2n+1)$（$n\in \mathrm{N}^*$）

(2)$S_n=\dfrac{n}{2n+1}$

【解析】（1）因为$(2n-1)a_{n+1}=(2n+3)a_n$，（$n\in \mathrm{N}^*$），

所以$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{2n+3}{2n-1}$，（$n\in \mathrm{N}^*$），

所以$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{5}{1}$，$\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{7}{3}$，$\dfrac{a_4}{a_3}=\dfrac{9}{5}$，…，$\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\dfrac{2n-1}{2n-5}$，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{2n+1}{2n-3}$（$n\geq 2$且$n\in \mathrm{N}^*$），

所以$\dfrac{a_2}{a_1}\times\dfrac{a_3}{a_2}\times\dfrac{a_4}{a_3}\times\cdots\times\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{5}{1}\times\dfrac{7}{3}\times\dfrac{9}{5}\times\cdots\times\dfrac{2n-1}{2n-5}\times\dfrac{2n+1}{2n-3}$（$n\geq 2$且$n\in \mathrm{N}^*$），

整理得：$\dfrac{a_n}{a_1}=\dfrac{(2n-1)(2n+1)}{1\times 3}$（$n\geq 2$且$n\in \mathrm{N}^*$），即$a_n=\dfrac{(2n-1)(2n+1)}{3}a_1$，（$n\geq 2$且$n\in \mathrm{N}^*$），

又因为$a_1=3$，所以$a_n=(2n-1)(2n+1)$，（$n\geq 2$且$n\in \mathrm{N}^*$），

当$n=1$时，$a_1=1\times 3=3$适合上式，

所以$a_n=(2n-1)(2n+1)$，（$n\in \mathrm{N}^*$）．

（2）由（1）知，$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})$，

所以$S_n=\dfrac{1}{2}\times(1-\dfrac{1}{3})+\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5})+\cdots+\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})=\dfrac{1}{2}\times(1-\dfrac{1}{2n+1})=\dfrac{n}{2n+1}$，

即$S_n=\dfrac{n}{2n+1}$．

2．（2023·安徽滁州·校考模拟预测）已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n=a_{n+1}-2\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)在a_n与a_{n+1}之间插入n个数，使这$n+2$个数组成一个公差为d_n的等差数列，求数列$\left\{\dfrac{1}{d_n}\right\}$的前$n$项和$T_n$．

【答案】(1)$a_n=2^n$

(2)$T_n=3-\dfrac{n+3}{2^n}$．

【解析】（1）$S_n=a_{n+1}-2\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$，

当$n\geq 2$时，$S_{n-1}=a_n-2$，两式相减可得，$a_{n+1}=2a_n\left(n\geq 2\right)$，故等比数列$\{a_n\}$的公比为$2$，

$\because a_2=a_1+2=2a_1$，$\therefore a_1=2$，故数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^n$．

（2）由(1)得：$a_n=2^n$，$a_{n+1}=2^{n+1}$，故$a_{n+1}=a_n+(n+1)d_n$，即$\dfrac{1}{d_n}=\dfrac{n+1}{2^n}$，

$T_{\mathrm{n}}=2\times\dfrac{1}{2}+3\times\dfrac{1}{2^2}+4\times\dfrac{1}{2^3}+\cdots+(n+1)\dfrac{1}{2^n}$①，

$\dfrac{1}{2}T_n=2\times\dfrac{1}{2^2}+3\times\dfrac{1}{2^3}+4\times\dfrac{1}{2^4}+\cdots+(n+1)\cdot\dfrac{1}{2^{n+1}}$②，

①－②得：$\dfrac{1}{2}T_n=2\times\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)-(n+1)\cdot\dfrac{1}{2^{n+1}}=1+\dfrac{\frac{1}{4}[1-(\frac{1}{2})^{n-1}]}{1-\frac{1}{2}}-(n+1)\cdot\dfrac{1}{2^{n+1}}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{n+3}{2^{n+1}}$，

故$T_n=3-\dfrac{n+3}{2^n}$．

3（2023秋·安徽合肥·高三合肥一中校考阶段练习）在等差数列$\{a_n\}$中，$a_4=7$，$a_3+2a_8=35$，数列$\{b_n\}$的前n项和为S_n，且$3b_n-2S_n=1$．

(1)求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

(2)若$c_n=\dfrac{a_n}{b_n}$，求数列$\{c_n\}$的前n项和T_n．

【答案】(1)$a_n=2n-1$，$b_n=3^{n-1}$

(2)$T_n=3-\dfrac{n+1}{3^{n-1}}$

【解析】（1）解：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

则$a_3+2a_8=a_4-d+2(a_4+4d)=3a_4+7d=21+7d=35$，解得$d=2$，

所以，$a_n=a_4+(n-4)d=7+2(n-4)=2n-1$，

数列$\{b_n\}$的前n项和为S_n，且$3b_n-2S_n=1$，

当$n=1$时，则有$3b_1-2S_1=b_1=1$，

当$n\geq 2$时，由$3b_n-2S_n=1$可得$3b_{n-1}-2S_{n-1}=1$，

上述两个等式作差可得$3b_n-3b_{n-1}-2b_n=0$，即$b_n=3b_{n-1}$，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/748111021040006037