

北京市丰台区 2022-2023 学年度第二学期综合练习（一）

高三数学

2023.03

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$, $B = \{x | 0 < x \leq 2\}$, 则 $A \cup B =$ ()

- A. $\{x | -1 \leq x \leq 1\}$ B. $\{x | 0 < x \leq 1\}$ C. $\{x | 0 < x \leq 2\}$ D. $\{x | -1 \leq x \leq 2\}$

2. 设 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 且 $a > b$, 则 ()

- A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ B. $a^2 > b^2$ C. $a - c > b - c$ D. $ac > bc$

3. 已知圆 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = r^2$ ($r > 0$) 与 y 轴相切, 则 $r =$ ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 3

4. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上 奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \log_2 x$, 则 $f(-2) =$ ()

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

5. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若角 α 以 x 轴非负半轴为始边, 其终边与单位圆交点的横坐标为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 α 的一个可能取值为 ()

标为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 α 的一个可能取值为 ()

- A. -60° B. -30° C. 45° D. 60°

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $2\cos A \sin B = \sin C$, 则该三角形的形状一定是 ()

- A. 等腰三角形 B. 等边三角形 C. 直角三角形 D. 等腰直角三角形

7. 设无穷等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则“对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $a_n > 0$ ”是“数列 $\{S_n\}$ 为

递增数列”的 ()

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

8. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的顶点是坐标原点 O , 焦点为 F , A 是抛物线 C 上的一点, 点 A 到 x 轴的距离为 $2\sqrt{2}$. 过点 A 向抛物线 C 的准线作垂线、垂足为 B . 若四边形 $ABOF$ 为等腰梯形, 则 p 的值为 ()

A. 1

B. $\sqrt{2}$

C. 2

D. $2\sqrt{2}$

9. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 存在常数 $t (t > 0)$, 使得对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有

$f(x+t) = f(x)$, 当 $x \in [0, t)$ 时, $f(x) = \left| x - \frac{t}{2} \right|$. 若 $f(x)$ 在区间 $(3, 4)$ 上单调递减, 则 t 的

最小值为 ()

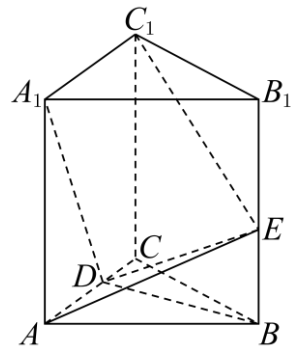
A. 3

B. $\frac{8}{3}$

C. 2

D. $\frac{8}{5}$

10. 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AC \perp BC$, $AC = 2$, $BC = 1$, $AA_1 = 2$, 点 D 在棱 AC 上, 点 E 在棱 BB_1 上, 给出下列三个结论:



①三棱锥 $E - ABD$ 的体积的最大值为 $\frac{2}{3}$;

② $A_1D + DB$ 的最小值为 $\sqrt{2} + \sqrt{5}$;

③点 D 到直线 C_1E 的距离的最小值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

其中所有正确结论的个数为 ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

第二部分（非选择题 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

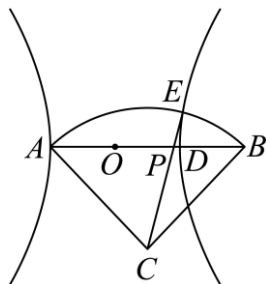
11. 若复数 $\frac{a+i}{1+i}$ ($a \in \mathbf{R}$) 是纯虚数，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2，则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 从 $-2, -1, 1, 2, 3$ 这 5 个数中任取 2 个不同的数，记“两数之积为正数”为事件 A ，“两数均为负数为事件 B ，则 $P(B|A) = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 设函数 $f(x) = \begin{cases} a-x, & x < a, \\ x^3-x, & x \geq a. \end{cases}$ 若 $f(x)$ 存在最小值，则 a 的一个取值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ ； a 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 三等分角是“古希腊三大几何问题”之一，目前尺规作图仍不能解决这个问题. 古希腊数学家 Pappus (约 300~350 前后) 借助圆弧和双曲线给出了一种三等分角的方法：如图，以角的顶点 C 为圆心作圆交角的两边于 A, B 两点；取线段 AB 的三等分点 O, D ；以 B 为焦点， A, D 为顶点作双曲线 H . 双曲线 H 与弧 AB 的交点记为 E ，连接 CE ，则 $\angle BCE = \frac{1}{3} \angle ACB$.

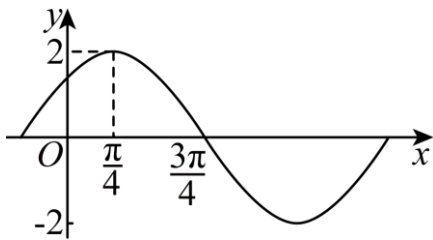


①双曲线 H 的离心率为 $\underline{\hspace{2cm}}$ ；

②若 $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$ ， $|AC| = 3\sqrt{2}$ ， CE 交 AB 于点 P ，则 $|OP| = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题共 6 小题，共 85 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

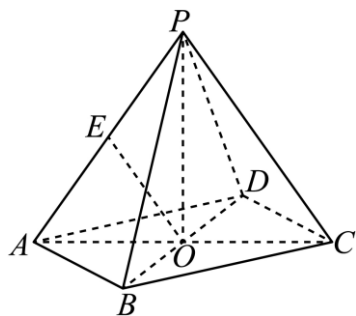
16. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的部分图象如图所示.



(1) 求 $f(x)$ 的解析式；

(2) 若函数 $g(x) = f(x)\sin x$ ，求 $g(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值.

17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面是边长为 2 的菱形, AC 交 BD 于点 O , $\angle BAD = 60^\circ$, $PB = PD$. 点 E 是棱 PA 的中点, 连接 OE , OP .



(1) 求证: $OE \parallel$ 平面 PCD ;

(2) 若平面 PAC 与平面 PCD 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$, 再从条件①, 条件②这两个条件

中选择一个作为已知, 求线段 OP 的长.

条件①: 平面 $PBD \perp$ 平面 $ABCD$;

条件②: $PB \perp AC$.

注: 如果选择条件①和条件②分别解答, 按第一个解答计分.

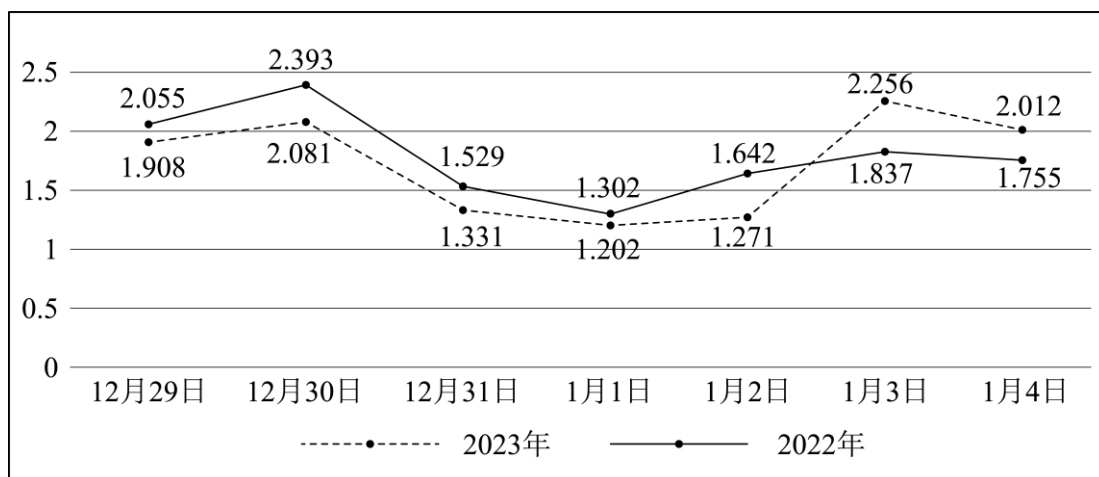
18. 交通拥堵指数 (TPI) 是表征交通拥堵程度的客观指标, TPI 越大代表拥堵程度越高. 某

平台计算 TPI 的公式为: $TPI = \frac{\text{实际行程时间}}{\text{畅通行程时间}}$, 并按 TPI 的大小将城市道路拥堵程度划

分为如下表所示的 4 个等级:

TPI	$[1, 1.5)$	$[1.5, 2)$	$[2, 4)$	不低于 4
拥堵等级	畅通	缓行	拥堵	严重拥堵

某市 2023 年元旦及前后共 7 天与 2022 年同期的交通高峰期城市道路 TPI 的统计数据如下图:



(1) 从 2022 年元旦及前后共 7 天中任取 1 天，求这一天交通高峰期城市道路拥堵程度为“拥堵”的概率；

(2) 从 2023 年元旦及前后共 7 天中任取 3 天，将这 3 天中交通高峰期城市道路 TPI 比 2022 年同日 TPI 高的天数记为 X ，求 X 的分布列及数学期望 $E(X)$ ；

(3) 把 12 月 29 日作为第 1 天，将 2023 年元旦及前后共 7 天 交通高峰期城市道路 TPI 依次记为 $a_1, a_2, \dots, a_7$ ，将 2022 年同期 TPI 依次记为 $b_1, b_2, \dots, b_7$ ，记

$c_i = a_i - b_i (i=1, 2, \dots, 7)$ ， $\bar{c} = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 c_i$ 。请直接写出 $|c_i - \bar{c}|$ 取得最大值时 i 的值。

19. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 一个顶点为 $A(0, 1)$ ，焦距为 2。

(1) 求椭圆 E 的方程；

(2) 过点 $P(2, 0)$ 的直线与椭圆 E 交于 B, C 两点，过点 B, C 分别作直线 $l: x = t$ 的垂线 (点 B, C 在直线 l 的两侧)。垂足分别为 M, N ，记 $\triangle BMP$ ， $\triangle MNP$ ， $\triangle CNP$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3 ，试问：是否存在常数 t ，使得 $S_1, \frac{1}{2}S_2, S_3$ 总成等比数列？若存在，求出 t 的值。若不存在，请说明理由。

20. 已知函数 $f(x) = x + \frac{a}{e^x} (a > 0)$ 。

(1) 求函数 $f(x)$ 极值；

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个不相等的零点 x_1, x_2 。

(i) 求 a 的取值范围；

(ii) 证明: $x_1 + x_2 > 2\ln a$.

21. 已知集合 $S_n = \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ ($n \in \mathbf{N}^*, n \geq 4$), 对于集合 S_n 的非空子集 A . 若 S_n 中存在三个互不相同的元素 a, b, c , 使得 $a+b, b+c, c+a$ 均属于 A , 则称集合 A 是集合 S_n 的“期待子集”.

(1) 试判断集合 $A_1 = \{3, 4, 5\}$, $A_2 = \{3, 5, 7\}$ 是否为集合 S_4 的“期待子集”; (直接写出答案, 不必说明理由)

(2) 如果一个集合中含有三个元素 x, y, z , 同时满足① $x < y < z$, ② $x + y > z$, ③ $x + y + z$ 为偶数. 那么称该集合具有性质 P . 对于集合 S_n 的非空子集 A , 证明: 集合 A 是集合 S_n 的“期待子集”的充要条件是集合 A 具有性质 P ;

(3) 若 S_n ($n \geq 4$) 任意含有 m 个元素的子集都是集合 S_n 的“期待子集”, 求 m 的最小值.

北京市丰台区 2022-2023 学年度第二学期综合练习（一）

高三数学

2023.03

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$ ， $B = \{x | 0 < x \leq 2\}$ ，则 $A \cup B =$ ()

A. $\{x | -1 \leq x \leq 1\}$ B. $\{x | 0 < x \leq 1\}$ C. $\{x | 0 < x \leq 2\}$ D.

$\{x | -1 \leq x \leq 2\}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据并集运算求解。

【详解】因为集合 $A = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$ ， $B = \{x | 0 < x \leq 2\}$ ，

所以 $A \cup B = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$ ，

故选:D.

2. 设 $a, b, c \in R$ ，且 $a > b$ ，则 ()

A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ B. $a^2 > b^2$ C. $a - c > b - c$ D.

$ac > bc$

【答案】C

【解析】

【分析】逐一判断，对 A 取 $a = 2$ ， $b = -1$ ，可得结果；对 B 取 $a = -1$ ， $b = -2$ 可得结果；对 C 利用不等式性质判断即可；对 D 取 $c \leq 0$ 可判断。

【详解】解：A. 取 $a = 2$ ， $b = -1$ ，则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 不成立；

B. 取 $a = -1$ ， $b = -2$ ，则 $a^2 > b^2$ 不成立；

C. $\square a > b$, $\square a - c > b - c$, 正确;

D. 取 $c \leq 0$, $\square a > b$, $\square ac \leq bc$, 因此不成立.

故选: C.

3. 已知圆 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = r^2 (r > 0)$ 与 y 轴相切, 则 $r =$ ()

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. 3

【答案】C

【解析】

【分析】求出圆心和半径, 即可求解.

【详解】圆 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = r^2 (r > 0)$ 的圆心为 $(2, 3)$, 半径为 r .

因为圆与 y 轴相切, 所以 $r = 2$.

故选: C

4. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \log_2 x$, 则 $f(-2) =$ ()

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

【答案】A

【解析】

【分析】根据奇函数的性质及所给函数解析式计算可得.

【详解】因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \log_2 x$,

所以 $f(-2) = -f(2) = -\log_2 2 = -1$.

故选: A

5. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若角 α 以 x 轴非负半轴为始边, 其终边与单位圆交点的横坐标为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 α 的一个可能取值为 ()

标为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 α 的一个可能取值为 ()

A. -60°

B. -30°

C. 45°

D. 60°

【答案】B

【解析】

【分析】根据三角函数的定义得到 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 再根据特殊角的三角函数判断即可.

【详解】依题意可得 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，则 $\alpha = 30^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ 或

$$\alpha = -30^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z},$$

所以 α 的一个可能取值为 -30° .

故选：B

6. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $2\cos A \sin B = \sin C$ ，则该三角形的形状一定是（ ）

- A. 等腰三角形 B. 等边三角形 C. 直角三角形 D. 等腰直角三角形

【答案】A

【解析】

【分析】利用内角和定理及诱导公式得到 $\sin C = \sin(A+B)$ ，利用两角和与差的正弦函数公式化简，代入已知等式变形再利用两角和与差的正弦函数公式化简，得到 $A-B=0$ ，即 $A=B$ ，即可确定出三角形形状.

【详解】解：Q $\triangle ABC$ 中，

$$\sin C = \sin[\pi - (A+B)] = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B,$$

$$\therefore 2\cos A \sin B = \sin C = \sin A \cos B + \cos A \sin B, \text{ 即}$$

$$\sin A \cos B - \cos A \sin B = \sin(A-B) = 0,$$

$$\text{Q } A, B \in (0, \pi), \therefore A-B \in (-\pi, \pi),$$

$$\therefore A-B=0, \text{ 即 } A=B, \text{ 则 } \triangle ABC \text{ 为等腰三角形.}$$

故选：A.

7. 设无穷等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，则“对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ ，都有 $a_n > 0$ ”是“数列 $\{S_n\}$ 为递增数列”的（ ）

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】利用定义法直接判断.

【详解】充分性：因为“对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ ，都有 $a_n > 0$ ”，所以 $S_n = S_{n-1} + a_n > S_{n-1}, n \geq 2$ ，

所以“数列 $\{S_n\}$ 为递增数列”成立.故充分性满足；

必要性：因为“数列 $\{S_n\}$ 为递增数列”，取数列：-1, 1, 3, 5……符合数列 $\{a_n\}$ 为无穷等差数列，且 $\{S_n\}$ 为递增数列，但是 $a_1 = -1 < 0$.故必要性不满足.

故“对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ ，都有 $a_n > 0$ ”是“数列 $\{S_n\}$ 为递增数列”的充分而不必要条件.

故选：A

8. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的顶点是坐标原点 O ，焦点为 F ， A 是抛物线 C 上的一点，

点 A 到 x 轴的距离为 $2\sqrt{2}$. 过点 A 向抛物线 C 的准线作垂线、垂足为 B . 若四边形 $ABOF$ 为等腰梯形，则 p 的值为 ()

A. 1

B. $\sqrt{2}$

C. 2

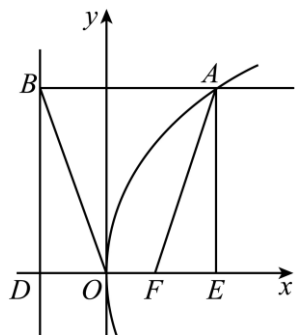
D. $2\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】过点 A 向 x 轴作垂线、垂足为 E . 设准线交 x 轴于 D . 利用几何法求出直角三角形 AEF 的三边，利用勾股定理即可求解.

【详解】如图示：



过点 A (不妨设为第一象限点) 向 x 轴作垂线、垂足为 E . 设准线交 x 轴于 D .

因为四边形 $ABOF$ 为等腰梯形，所以 $|OB| = |AF|$ ， $\angle FOB = \angle OFA$.

所以 $\angle DOB = \angle EFA$.

又 $\angle BDO = \angle AEF = 90^\circ$,

所以 $\triangle BDO \cong \triangle AEF$ ，所以 $|OD| = |FE| = \frac{p}{2}$ ，

$$\text{所以 } |DE| = |DO| + |OF| + |FE| = \frac{3p}{2}.$$

$$\text{所以 } |AB| = |DE| = \frac{3p}{2}.$$

$$\text{由抛物线的定义可得: } |AF| = |AB| = \frac{3p}{2}.$$

$$\text{在直角三角形 } AEF \text{ 中, } |AF| = \frac{3p}{2}, |EF| = \frac{p}{2}, |AE| = y_A = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{由勾股定理可得: } \left(\frac{p}{2}\right)^2 + (2\sqrt{2})^2 = \left(\frac{3p}{2}\right)^2, \text{ 解得: } p = 2.$$

故选: C

9. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 存在常数 $t(t > 0)$, 使得对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有

$$f(x+t) = f(x), \text{ 当 } x \in [0, t) \text{ 时, } f(x) = \left|x - \frac{t}{2}\right|. \text{ 若 } f(x) \text{ 在区间 } (3, 4) \text{ 上单调递减, 则 } t \text{ 的}$$

最小值为 ()

A. 3

B. $\frac{8}{3}$

C. 2

D. $\frac{8}{5}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据函数的周期性和绝对值型函数的单调性进行求解即可.

【详解】因为存在常数 $t(t > 0)$, 使得对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x+t) = f(x)$,

所以函数的周期为 t ,

当 $x \in [0, t)$ 时, 函数 $f(x) = \left|x - \frac{t}{2}\right|$ 在 $[0, \frac{t}{2})$ 单调递减,

所以当 $x \geq 0$ 时, 函数 $f(x) = \left|x - \frac{t}{2}\right|$ 在 $[nt, \frac{(2n+1)t}{2}) (n \in \mathbf{N}^*)$ 上单调递减,

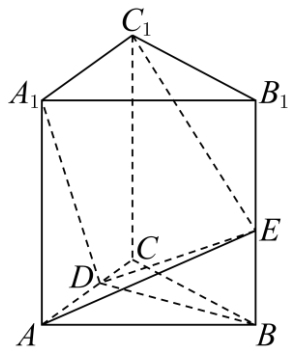
因为 $f(x)$ 在区间 $(3, 4)$ 上单调递减,

$$\text{所以有 } \begin{cases} nt \leq 3 \\ \frac{(2n+1)t}{2} \geq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \leq \frac{3}{n} \\ t \geq \frac{8}{2n+1} \end{cases} \Rightarrow \frac{8}{3} \leq t \leq 3,$$

故选: B

【点睛】关键点睛：根据函数的周期的性质，结合绝对值型函数的单调性是解题的关键.

10. 如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AC \perp BC$ ， $AC=2$ ， $BC=1$ ， $AA_1=2$ ，点 D 在棱 AC 上，点 E 在棱 BB_1 上，给出下列三个结论：



- ①三棱锥 $E-ABD$ 的体积的最大值为 $\frac{2}{3}$ ；
 ② A_1D+DB 最小值为 $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ ；
 ③点 D 到直线 C_1E 的距离的最小值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

其中所有正确结论的个数为 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【答案】C

【解析】

【分析】根据锥体的体积公式判断①，将 $\triangle VABC$ 翻折到与矩形 ACC_1A_1 共面时连接 A_1B 交 AC 于点 D ，此时 A_1D+DB 取得最小值，利用勾股定理求出距离最小值，即可判断②，建立空间直角坐标系，利用空间向量法求出点到距离，再根据函数的性质计算可得.

【详解】在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中 $BB_1 \perp$ 平面 ABC ，

对于①：因为点 E 在棱 BB_1 上 $BB_1=AA_1=2$ ，所以 $BE \in [0,2]$ ，又

$$V_{E-ABD} = \frac{1}{3} BE \cdot S_{\triangle VABD},$$

又 $AC \perp BC$ ， $AC=2$ ， $BC=1$ ，点 D 在棱 AC 上，所以 $AD \in [0,2]$ ，

$$S_{\triangle VABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BC = \frac{1}{2} AD \in [0,1],$$

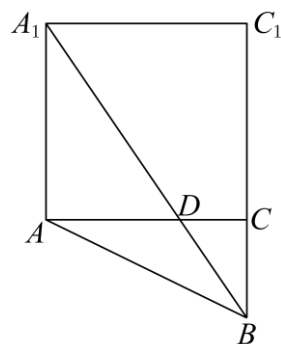
所以 $V_{E-ABD} = \frac{1}{3} BE \cdot S_{\triangle VABD} \leq \frac{2}{3}$ ，当且仅当 D 在 C 点、 E 在 B_1 点时取等号，故①正确；

对于②：如图将 $\triangle ABC$ 翻折到与矩形 ACC_1A_1 共面时连接 A_1B 交 AC 于点 D ，此时

$A_1D + DB$ 取得最小值，

因为 $A_1C_1 = CC_1 = 2$ ， $BC = 1$ ，所以 $BC_1 = 3$ ，所以 $A_1B = \sqrt{A_1C_1^2 + C_1B^2} = \sqrt{13}$ ，

即 $A_1D + DB$ 的最小值为 $\sqrt{13}$ ，故②错误；



对于③：如图建立空间直角坐标系，设 $D(a, 0, 0)$ ， $a \in [0, 2]$ ， $E(0, 1, c)$ ， $c \in [0, 2]$ ，

$C_1(0, 0, 2)$ ，

所以 $\overrightarrow{C_1D} = (a, 0, -2)$ ， $\overrightarrow{C_1E} = (0, 1, c-2)$ ，

$$\begin{aligned} \text{则点 } D \text{ 到直线 } C_1E \text{ 的距离 } d &= \sqrt{|\overrightarrow{C_1D}|^2 - \left(\frac{|\overrightarrow{C_1D} \cdot \overrightarrow{C_1E}|}{|\overrightarrow{C_1E}|} \right)^2} = \sqrt{a^2 + 4 - \left(\frac{-2(c-2)}{\sqrt{(c-2)^2 + 1}} \right)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + 4 - \frac{4(c-2)^2}{(c-2)^2 + 1}}, \end{aligned}$$

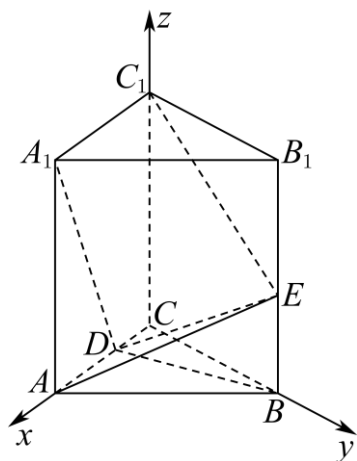
当 $c = 2$ 时 $d = \sqrt{a^2 + 4} \geq 2$ ，

当 $0 \leq c < 2$ 时 $0 < (c-2)^2 \leq 4$ ， $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{(c-2)^2}$ ， $1 + \frac{1}{(c-2)^2} \geq \frac{5}{4}$ ，则

$$0 < \frac{4}{1 + \frac{1}{(c-2)^2}} \leq \frac{16}{5},$$

所以当 $\frac{4(c-2)^2}{(c-2)^2 + 1}$ 取最大值 $\frac{16}{5}$ ，且 $a^2 = 0$ 时 $d_{\min} = \sqrt{4 - \frac{16}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，

即当 D 在 C 点 E 在 B 点时点 D 到直线 C_1E 的距离的最小值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，故③正确；



故选：C

第二部分（非选择题 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 若复数 $\frac{a+i}{1+i}$ ($a \in \mathbf{R}$) 是纯虚数，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -1

【解析】

【分析】根据复数代数形式的除法运算化简复数，再根据复数的概念得到方程（不等式），解得即可.

$$\text{【详解】 } \frac{a+i}{1+i} = \frac{(a+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{a-ai+i-i^2}{2} = \frac{a+1}{2} + \frac{1-a}{2}i,$$

$$\text{因为 } \frac{a+i}{1+i} (a \in \mathbf{R}) \text{ 是纯虚数, 所以 } \begin{cases} \frac{a+1}{2} = 0 \\ \frac{1-a}{2} \neq 0 \end{cases}, \text{ 解得 } a = -1.$$

故答案为：-1

12. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2，则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 4

【解析】

【分析】根据正方形的性质及数量积的定义计算可得.

【详解】因为正方形 $ABCD$ 的边长为 2，所以 $\angle CAB = 45^\circ$ ， $|\overrightarrow{AB}| = 2$ ，

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2} = 2\sqrt{2},$$

所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos \angle CAB = 2 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4$.

故答案为：4

13. 从 $-2, -1, 1, 2, 3$ 这5个数中任取2个不同的数，记“两数之积为正数”为事件 A，“两数均为负数为事件 B. 则 $P(B|A) =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{4}$ 0.25

【解析】

【分析】根据古典概型的概率公式求出 $P(A)$ ， $P(AB)$ ，再由条件概率的概率公式计算可得.

【详解】从 $-2, -1, 1, 2, 3$ 这5个数中任取2个不同的数有 $C_5^2 = 10$ 种取法，

其中满足两数之积为正数的有 $C_2^2 + C_3^2 = 4$ 种取法，

满足两数之积为正数且两数均为负数的有 $C_2^2 = 1$ 种取法，

所以 $P(A) = \frac{4}{10}$ ， $P(AB) = \frac{1}{10}$ ，

所以 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{4}$.

故答案为： $\frac{1}{4}$

14. 设函数 $f(x) = \begin{cases} a-x, & x < a, \\ x^3-x, & x \geq a. \end{cases}$ 若 $f(x)$ 存在最小值，则 a 的一个取值为_____； a 的最大值为_____.

【答案】 $[-1, 1]$ (≤ 1 的任一实数，答案不唯一)； $[-1, 1]$

【解析】

【分析】利用导数讨论函数 $f(x)$ 的单调性，分析取最值的情况，进行求解.

【详解】记函数 $g(x) = x^3 - x, x \in \mathbb{R}$ ，则 $g'(x) = 3x^2 - 1$.

令 $g'(x) = 0$ ，解得： $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/748113030126006134>