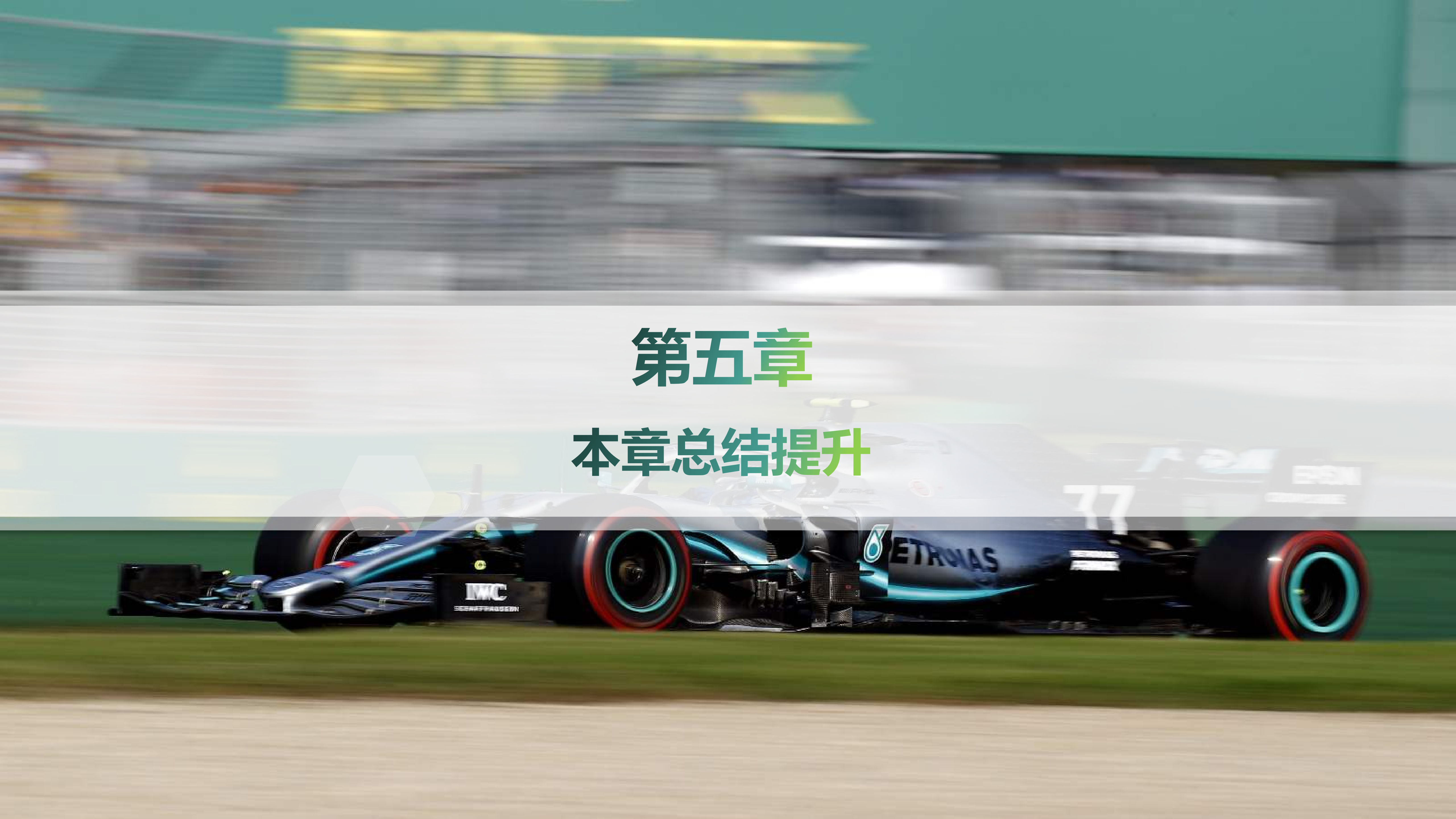


第五章

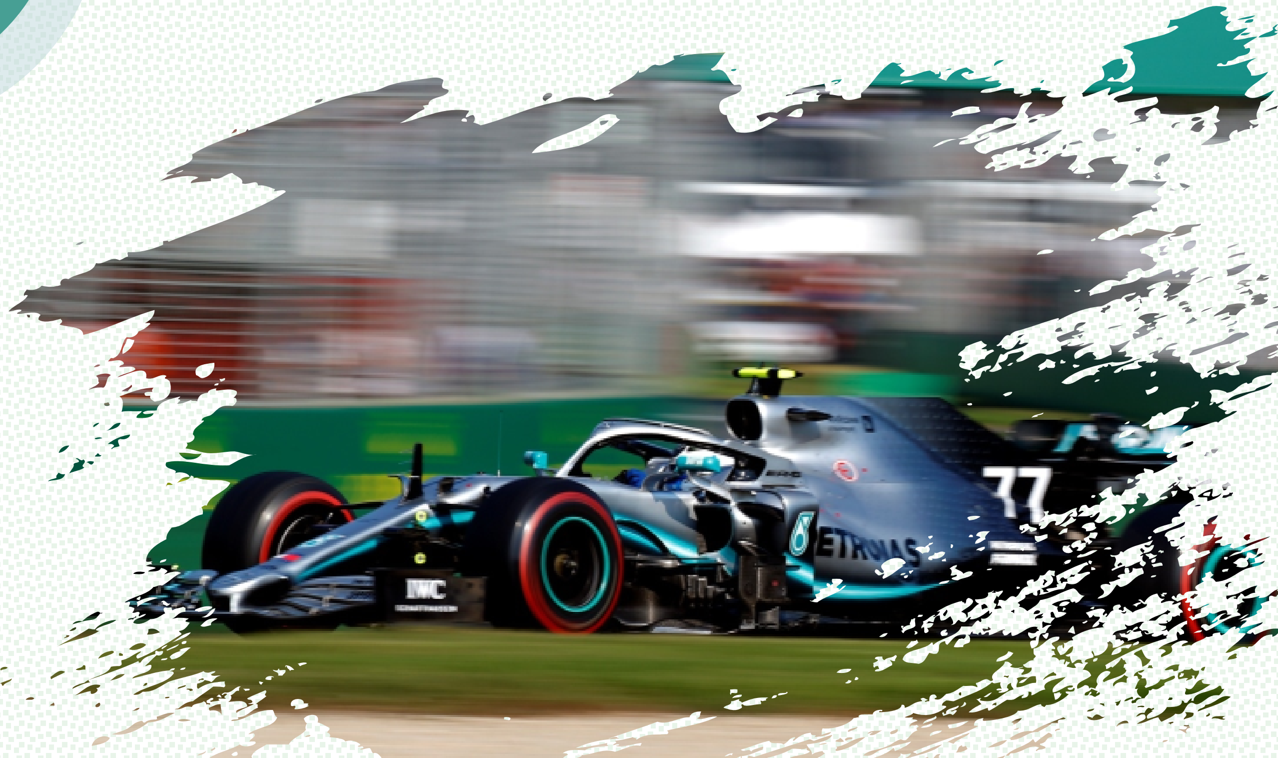
本章总结提升

目录索引

知识网络·整合构建

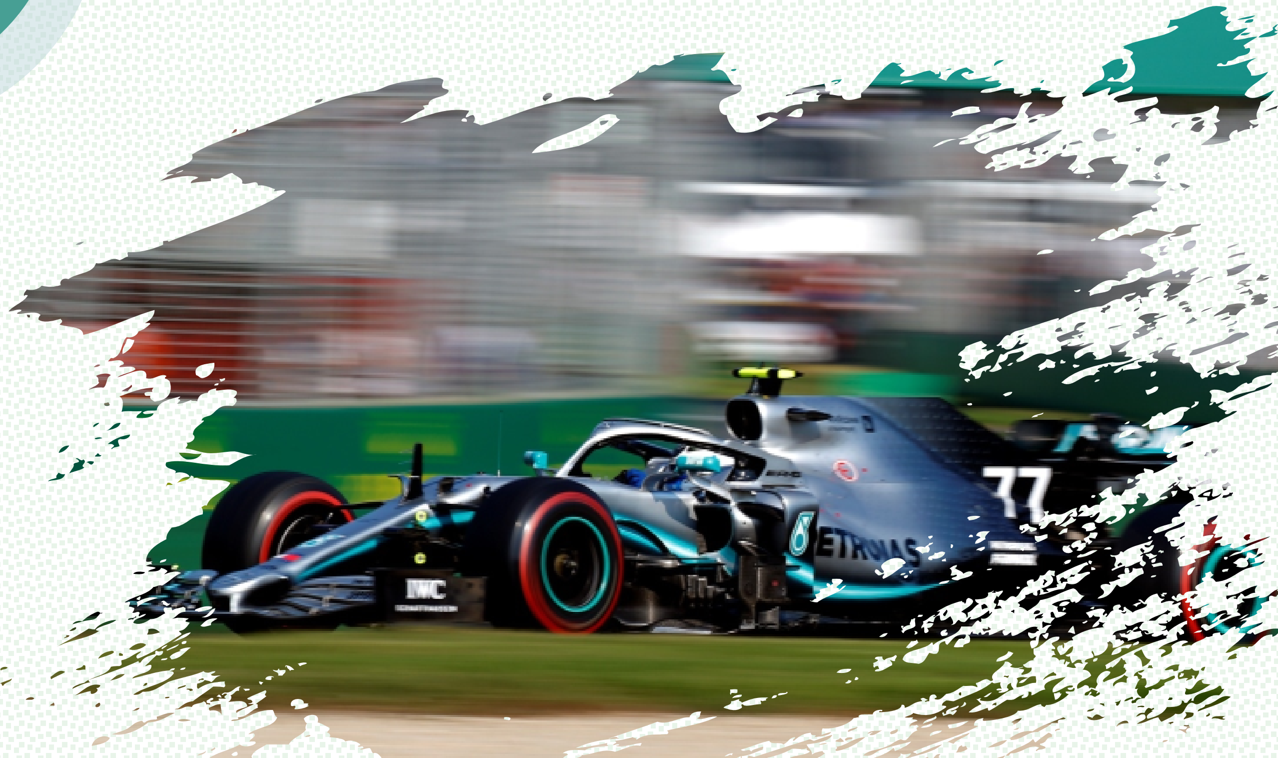
专题突破·素养提升

知识网络·整合构建



- 一元函数的导数及其应用
  - 导数的概念及其意义
    - 瞬时速度 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$ ← 平均速度 $\dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$
    - 瞬时变化率 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ ← 平均变化率 $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
    - 导数的几何意义 ← 曲线的割线斜率 $k=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$
    - 导函数
  - 导数的运算
    - 基本初等函数求导
      - 几个常用函数的导数
        - $f(x)=c$(c为常数)$\Rightarrow f'(x)=0$
        - $f(x)=x\Rightarrow f'(x)=1$
        - $f(x)=x^2\Rightarrow f'(x)=2x$
        - $f(x)=x^3\Rightarrow f'(x)=3x^2$
        - $f(x)=\dfrac{1}{x}\Rightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$
        - $f(x)=\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
      - 基本初等函数的导数公式
        - $f(x)=c$(c为常数)$\Rightarrow f'(x)=0$
        - $f(x)=x^{\alpha}$($\alpha\in\mathbf{R}$, 且$\alpha\neq 0$)$\Rightarrow f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$
        - $f(x)=\sin x\Rightarrow f'(x)=\cos x$
        - $f(x)=\cos x\Rightarrow f'(x)=-\sin x$
        - $f(x)=a^x$($a>0$, 且$a\neq 1$)$\Rightarrow f'(x)=a^x\ln a$ — $f(x)=e^x\Rightarrow f'(x)=e^x$
        - $f(x)=\log_a x$($a>0$, 且$a\neq 1$)$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}$ — $f(x)=\ln x\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x}$
    - 导数的四则运算法则
      - $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$
      - $[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
      - $[c\cdot f(x)]'=c\cdot f'(x)$
      - $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}\ (g(x)\neq 0)$
    - 简单复合函数的导数
      - 记法：$y=f(g(x))$
      - 变量代换：$y=f(u), u=g(x)$
      - 逐层求导：$y'_x=y'_u\cdot u'_x$
  - 导数在研究函数中的应用
    - 函数的单调性
    - 函数的极值与最大(小)值
    - 最优化问题

专题突破·素养提升



专题一　导数的计算及几何意义

本部分内容有导数的几何意义,基本初等函数求导法则、导数的运算法则、复合函数求导,主要考查切线方程及切点,与切线平行、垂直问题,处理此类问题一般结合函数的切线转化为点到直线的距离、平行线间的距离问题,然后再研究最值问题.通过求切线方程的有关问题,培养数学运算、数学抽象等核心素养和转化化归的数学思想.

【例1】 (1)设$f'(x)$是函数$f(x)$的导函数,若$f(x)=x\ln(2x-1)$,则$f'(1)=$__________.

2

解析 因为 $f(x)=x\ln(2x-1)$,所以 $f'(x)=\ln(2x-1)+\frac{x}{2x-1}\cdot(2x-1)'=\ln(2x-1)+\frac{2x}{2x-1}$,则

$f'(1)=2$.

(2)函数$f(x)=\frac{1}{x}$图象在点$(2,\frac{1}{2})$处的切线与直线 $ax+y+1=0$ 垂直,则实数 a 的值为____4____.

解析 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$,$\therefore f'(2)=-\frac{1}{4}$.

$\because$切线与直线 $ax+y+1=0$ 垂直,

$\therefore(-\frac{1}{4})\times(-a)=-1$,

解得 $a=-4$.

规律方法 导数的运算是解决一切导数问题的基础,要熟练掌握基本初等函数的求导法则,掌握导数的和、差、积、商的运算法则.复合函数求导的关键是分清层次,逐层求导,求导时不要忘了对内层函数求导.

变式训练**1**(1)已知曲线$f(x)=a\ln x+x^2$在点(1,1)处的切线与直线$x+y=0$平行,则实数a的值为(A)

A.-3　　B.1　　C.2　　D.3

解析 由$f(x)=a\ln x+x^2$,得$f'(x)=\frac{a}{x}+2x$,则曲线在点(1,1)处的切线斜率为$k=a+2$,由切线与直线$x+y=0$平行,可得$k=-1$,即$a+2=-1$,解得$a=-3$.

(2)设函数$f(x)$,其中$x\in(0,+\infty)$,若$f(e^x)=x+e^{2x}$,则$f'(x)$的最小值为__________.

答案 $2\sqrt{2}$

解析 $\because f(e^x)=x+e^{2x}$, $\therefore f(e^x)=\ln e^x+(e^x)^2$, $\therefore f(x)=\ln x+x^2, x\in(0,+\infty)$,

$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}+2x\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot 2x}=2\sqrt{2}$,当且仅当 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$时取等号,$\therefore f'(x)$的最小值为 $2\sqrt{2}$.

专题二　函数的单调性与导数

利用导数研究函数的性质,主要以指数函数、对数函数、三次函数为载体,研究函数的单调性、极值、最值,并能解决有关的问题;通过求函数的单调性、极值、最值问题,培养逻辑推理、直观想象及数学运算等核心素养.

【例2】 已知函数$f(x)=e^x+ax^2-x$.

(1)当$a=1$时,讨论$f(x)$的单调性;

(2)当$x\geqslant 0$时,$f(x)\geqslant \frac{1}{2}x^3+1$,求$a$的取值范围.

解 (1)当$a=1$时,$f(x)=e^x+x^2-x$,$f'(x)=e^x+2x-1$,令$\varphi(x)=e^x+2x-1$,

由于$\varphi'(x)=e^x+2>0$,

故$f'(x)$是增函数,注意到$f'(0)=0$,

故当$x\in(-\infty,0)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,

当$x\in(0,+\infty)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增.

(2)由 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}x^3+1$,得 $e^x+ax^2-x\geqslant\frac{1}{2}x^3+1$,其中 $x\geqslant0$,

①当 $x=0$ 时,不等式为 $1\geqslant1$,显然成立,符合题意;

②当 $x>0$ 时,分离参数 a,得 $a\geqslant-\frac{e^x-\frac{1}{2}x^3-x-1}{x^2}$,

记 $g(x)=-\frac{e^x-\frac{1}{2}x^3-x-1}{x^2}$,

$g'(x)=-\frac{(x-2)(e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1)}{x^3}$,

令 $h(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1(x\geqslant0)$,

则$h'(x)=e^x-x-1$,

令$t(x)=h'(x),x\geqslant 0$,则$t'(x)=e^x-1\geqslant 0$,且不恒为0,

故$h'(x)$是增函数,$h'(x)\geqslant h'(0)=0$,且不恒为0,

故函数$h(x)$是增函数,$h(x)\geqslant h(0)=0$,

由 $h(x)\geqslant 0$ 可得 $e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1\geqslant 0$ 且不恒为 0,

故当$x\in(0,2)$时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增;

当$x\in(2,+\infty)$时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减.

因此,$g(x)_{max}=g(2)=\frac{7-e^2}{4}$.

综上可得,a 的取值范围是$[\frac{7-e^2}{4},+\infty)$.

规律方法　利用导数判断函数的单调性是解决一切应用问题的基础,一般按照求导、通分、因式分解、分类讨论的思路研究函数的单调性,从而掌握函数图象的变化趋势,达到解决问题的目的.

变式训练**2** 已知函数$f(x)=x^3-3ax^2+2bx$在$x=1$处有极小值-1.

(1)求a,b的值;

(2)求$f(x)$在[0,2]上的值域.

解 (1)$\because$函数$f(x)=x^3-3ax^2+2bx$在$x=1$处有极小值-1,

$\therefore f'(x)=3x^2-6ax+2b, f'(1)=3-6a+2b=0$,①

且$f(1)=1-3a+2b=-1$,②

联立①②,

解得 $a=\frac{1}{3}, b=-\frac{1}{2}$.

(2)由(1)得$f(x)=x^3-x^2-x$,

$\therefore f'(x)=3x^2-2x-1=(x-1)(3x+1), x\in[0,2]$.

令$f'(x)=3x^2-2x-1>0$,得$1<x\leqslant 2$;

令$f'(x)=3x^2-2x-1<0$,得$0\leqslant x<1$,

$\therefore$函数$f(x)$在区间$[0,1)$上单调递减,在区间$(1,2]$上单调递增.

又$f(0)=0, f(1)=-1, f(2)=8-4-2=2$,

$\therefore f(x)$在$[0,2]$上的值域为$[-1,2]$.

专题三　与导数有关的综合性问题

导数是研究函数性质以及解决实际问题的强有力的工具,从近几年高考题看,利用导数研究方程的根、函数的零点、证明不等式这些知识点常考到,一般出现在解答题中.其实质就是利用求导数的方法研究函数的性质及图象,解决该类问题的方法通常是构造一个函数,然后利用导数研究这个函数的单调性,再结合给定区间和函数在该区间端点处的函数值,使问题得以求解.

通过利用导数解决实际问题,培养数学建模能力.通过利用导数解决函数方程问题,提升逻辑推理、直观想象及数学运算等核心素养.

【例3】 已知函数$f(x)=x\ln x$.

(1)求$f(x)$的最小值;

(2)若对所有$x\geq 1$都有$f(x)\geq ax-1$,求实数a的取值范围;

(3)若关于x的方程$f(x)=b$恰有两个不相等的实数根,求实数b的取值范围.

解 (1)$f(x)$的定义域是$(0,+\infty)$,$f'(x)=1+\ln x$,

令 $f'(x)>0$,解得 $x>\frac{1}{e}$;

令 $f'(x)<0$,解得 $0<x<\frac{1}{e}$,

故 $f(x)$在$(0,\frac{1}{e})$上单调递减,在$(\frac{1}{e},+\infty)$上单调递增,故 $f(x)$的最小值

$f(x)_{\min}=f(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}\ln \frac{1}{e}=-\frac{1}{e}$.

(2)当 $x\geqslant 1$ 时,$f(x)\geqslant ax-1$ 恒成立,等价于 $x\ln x\geqslant ax-1(x\geqslant 1)$恒成立,等价于

$a\leqslant \ln x+\frac{1}{x}(x\geqslant 1)$恒成立.

令 $g(x)=\ln x+\frac{1}{x}$,则 $a\leqslant g(x)_{\min}$ 当 $x\geqslant 1$ 时恒成立.

$\because g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$,

$\therefore$ 当$x\geqslant 1$时,$g'(x)\geqslant 0$,且不恒为0,$\therefore g(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增,

$\therefore g(x)_{\min}=g(1)=1$,

$\therefore a\leqslant 1$,即实数a的取值范围为$(-\infty,1]$.

(3)若关于x的方程$f(x)=b$恰有两个不相等的实数根,则$y=b$的图象和$y=f(x)$的图象在$(0,+\infty)$上有两个不同的交点.

由(1)知$f(x)$在$(0,\frac{1}{e})$上单调递减,在$(\frac{1}{e},+\infty)$上单调递增,$f(x)_{\min}=f(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}=-\frac{1}{e}$,又当$0<x<\frac{1}{e}$时,$f(x)<0$,当 $x>1$ 时,$f(x)>0$,故当$-\frac{1}{e}<b<0$ 时,满足 $y=b$ 的图象和 $y=f(x)$的图象在$(0,+\infty)$上有两个不同的交点,即若关于x的方程$f(x)=b$恰有两个不相等的实数根,则$-\frac{1}{e}<b<0$,即 $b\in(-\frac{1}{e},0)$.

规律方法　综合性问题一般伴随着分类讨论、数形结合、构造函数等数学思想方法,关键是分类讨论时,是否做到了不重不漏、数形结合时是否掌握了函数图象的变化趋势、构造函数时是否合理等.

变式训练**3**已知函数$f(x)=e^x-ax-1(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论$f(x)$的单调性;

(2)若$f(x)$在$[0,1]$上有两个零点,求a的取值范围.

解　(1)函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$,$f'(x)=e^x-a$,当$a\leqslant 0$时,$f'(x)>0$在$\mathbf{R}$上恒成立,所以$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增;当$a>0$时,由$f'(x)=0$,得$x=\ln a$,所以当$x\in(-\infty,\ln a)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;

当$x\in(\ln a,+\infty)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增.

综上,当$a\leqslant 0$时,$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增;

当$a>0$时,$f(x)$在$(\ln a,+\infty)$上单调递增,在$(-\infty,\ln a)$上单调递减.