

湖北省武汉市部分重点中学 2023 年高三适应性练习卷数学试题

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

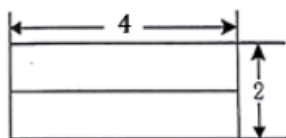
1. 已知 $a > b > 0$ ，则下列不等式正确的是（ ）

- A. $|\sqrt{a} - b| < |\sqrt{b} - a|$ B. $|\sqrt{a} - b| > |\sqrt{b} - a|$
- C. $|e^a - b| < |e^b - a|$ D. $|e^a - b| > |e^b - a|$

2. 双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的渐近线方程是（ ）

- A. $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x$ B. $y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}x$ C. $y = \pm \frac{x}{2}$ D. $y = \pm 2x$

3. 一个空间几何体的正视图是长为 4，宽为 $\sqrt{3}$ 的长方形，侧视图是边长为 2 的等边三角形，俯视图如图所示，则该几何体的体积为（ ）



俯视图

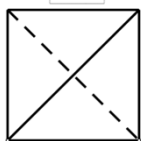
- A. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ B. $4\sqrt{3}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $2\sqrt{3}$

4. 某几何体的三视图如图所示，三视图是腰长为 1 的等腰直角三角形和边长为 1 的正方形，则该几何体中最长的棱长为（ ）。



正视图

左视图



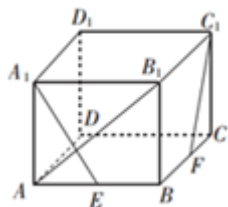
俯视图

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 1 D. $\sqrt{6}$

5. 已知 $a = \log_3 74$, $b = \log_2 m$, $c = \frac{5}{2}$, 若 $a > b > c$, 则正数 m 可以为 ()

- A. 4 B. 23 C. 8 D. 17

6. 如图, 在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = \sqrt{2}AA_1$, E, F 分别为 AB, BC 的中点, 异面直线 AB_1 与 C_1F 所成角的余弦值为 m , 则()



A. 直线 A_1E 与直线 C_1F 异面, 且 $m = \frac{\sqrt{2}}{3}$ B. 直线 A_1E 与直线 C_1F 共面, 且 $m = \frac{\sqrt{2}}{3}$

C. 直线 A_1E 与直线 C_1F 异面, 且 $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$ D. 直线 A_1E 与直线 C_1F 共面, 且 $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$

7. 已知集合 $A = \{x | \log_2 x < 1\}$, 集合 $B = \{y | y = \sqrt{2-x}\}$, 则 $A \cup B =$ ()

- A. $(-\infty, 2)$ B. $(-\infty, 2]$ C. $(0, 2)$ D. $[0, +\infty)$

8. 已知集合 $A = \{2, 3, 4\}$, 集合 $B = \{m, m+2\}$, 若 $A \cap B = \{2\}$, 则 $m =$ ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

9. 音乐, 是用声音来展现美, 给人以听觉上的享受, 熔铸人们的美学趣味. 著名数学家傅立叶研究了乐声的本质, 他证明了所有的乐声都能用数学表达式来描述, 它们是一些形如 $a \sin bx$ 的简单正弦函数的和, 其中频率最低的一项是基本音, 其余的为泛音. 由乐声的数学表达式可知, 所有泛音的频率都是基本音频率的整数倍, 称为基本音的谐波. 下列函数中不能与函数 $y = 0.06 \sin 180000t$ 构成乐音的是 ()

A. $y = 0.02 \sin 360000t$ B. $y = 0.03 \sin 180000t$ C. $y = 0.02 \sin 181800t$

D. $y = 0.05 \sin 540000t$

10. 小王因上班繁忙, 来不及做午饭, 所以叫了外卖. 假设小王和外卖小哥都在 12:00~12:10 之间随机到达小王所居住的楼下, 则小王在楼下等候外卖小哥的时间不超过 5 分钟的概率是 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{3}{4}$

11. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 的直线交椭圆于 A, B 两点, 交 y 轴于点

M ，若 F_1 、 M 是线段 AB 的三等分点，则椭圆的离心率为()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

12. 记 n 个两两无交集的区间的并集为 n 阶区间如 $(-\infty, 1] \cup [2, 3]$ 为 2 阶区间，设函数 $f(x) = \frac{x}{\ln|x|}$ ，则不等式

$f[f(x)] + 3 \leq 0$ 的解集为()

- A. 2 阶区间 B. 3 阶区间 C. 4 阶区间 D. 5 阶区间

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 定义 $\min\{a, b\} = \begin{cases} a, & a \leq b \\ b, & a > b \end{cases}$ ，已知 $f(x) = e^x - \frac{1}{m}$ ， $g(x) = (x-1)(mx + 2m^2 - m - 1)$ ，若

$h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ 恰好有 3 个零点，则实数 m 的取值范围是_____.

14. 我国古代数学著作《九章算术》中记载“今有人共买物，人出八，盈三；人出七，不足四．问人数、物价各几

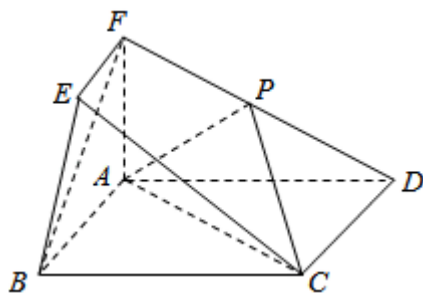
何？”设人数、物价分别为 x 、 y ，满足 $\begin{cases} 8x = y + 3 \\ 7x = y - 4 \end{cases}$ ，则 $x = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $y = \underline{\hspace{1cm}}$ ．

15. 割圆术是估算圆周率的科学方法，由三国时期数学家刘徽创立，他用圆内接正多边形面积无限逼近圆面积，从而得出圆周率．现在半径为 1 的圆内任取一点，则该点取自其内接正十二边形内部的概率为_____.

16. 已知 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{5}$ ，且 $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$ ，则 $\cos \alpha = \underline{\hspace{1cm}}$ ．

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 在如图所示的几何体中，四边形 $ABCD$ 为矩形，平面 $ABEF \perp$ 平面 $ABCD$ ， $EF \parallel AB$ ， $\angle BAF = 90^\circ$ ， $AD = 2$ ， $AB = AF = 2EF = 2$ ，点 P 在棱 DF 上．



(1) 若 P 是 DF 的中点，求异面直线 BE 与 CP 所成角的余弦值；

(2) 若二面角 $D-AP-C$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ，求 PF 的长度．

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = a \ln x + \frac{b}{ex}$ 的图象在 $x = 1$ 处的切线方程是 $y = \left(1 - \frac{2}{e}\right)x + \frac{4}{e} - 1$ ．

(1) 求 a, b 的值;

(2) 若函数 $g(x) = xf(x)$, 讨论 $g(x)$ 的单调性与极值;

(3) 证明: $f(x) > \frac{1}{e^x}$.

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - ae^x - 2a^2x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

20. (12 分) 已知 a, b, c 均为正实数, 函数 $f(x) = \left|x + \frac{1}{a^2}\right| + \left|x - \frac{1}{b^2}\right| + \frac{1}{4c^2}$ 的最小值为 1. 证明:

(1) $a^2 + b^2 + 4c^2 \geq 9$;

(2) $\frac{1}{ab} + \frac{1}{2bc} + \frac{1}{2ac} \leq 1$.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = x \ln x - \frac{a}{2}x^2 - x, a \in R, e \approx 2.71828 \dots$ 是自然对数的底数.

(1) 若 $a = -e$, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 求 a 的取值范围, 并证明: $x_1 x_2 > x_1 + x_2$.

22. (10 分) 已知定点 $A(-3, 0), B(3, 0)$, 直线 AM, BM 相交于点 M , 且它们的斜率之积为 $-\frac{1}{9}$, 记动点 M 的轨迹为曲线 C .

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 过点 $T(1, 0)$ 的直线与曲线 C 交于 P, Q 两点, 是否存在定点 $S(x_0, 0)$, 使得直线 SP 与 SQ 斜率之积为定值,

若存在, 求出 S 坐标; 若不存在, 请说明理由.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. D

【解析】

利用特殊值代入法，作差法，排除不符合条件的选项，得到符合条件的选项.

【详解】

已知 $a > b > 0$ ，赋值法讨论 $a > b > 0$ 的情况：

(1) 当 $a > b \geq 1$ 时，令 $a = 2$ ， $b = 1$ ，则 $|\sqrt{a} - b| < |\sqrt{b} - a|$ ， $|e^a - b| > |e^b - a|$ ，排除 B、C 选项；

(2) 当 $0 < b < a \leq 1$ 时，令 $a = \frac{1}{2}$ ， $b = \frac{1}{3}$ ，则 $|\sqrt{a} - b| > |\sqrt{b} - a|$ ，排除 A 选项.

故选：D.

【点睛】

比较大小通常采用作差法，本题主要考查不等式与不等关系，不等式的基本性质，利用特殊值代入法，排除不符合条件的选项，得到符合条件的选项，是一种简单有效的方法，属于中等题.

2. C

【解析】

根据双曲线的标准方程即可得出该双曲线的渐近线方程.

【详解】

由题意可知，双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的渐近线方程是 $y = \pm \frac{x}{2}$.

故选：C.

【点睛】

本题考查双曲线的渐近线方程的求法，是基础题，解题时要认真审题，注意双曲线的简单性质的合理运用.

3. B

【解析】

由三视图确定原几何体是正三棱柱，由此可求得体积.

【详解】

由题意原几何体是正三棱柱， $V = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} \times 4 = 4\sqrt{3}$.

故选：B.

【点睛】

本题考查三视图，考查棱柱的体积. 解题关键是由三视图还原出原几何体.

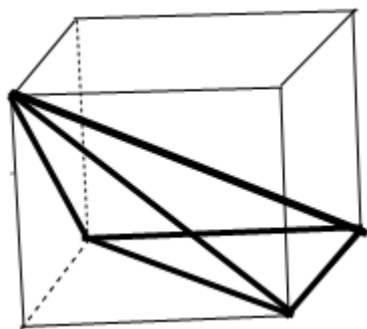
4. B

【解析】

首先由三视图还原几何体，进一步求出几何体的棱长.

【详解】

解：根据三视图还原几何体如图所示，



所以，该四棱锥体的最长的棱长为 $l = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

故选：B.

【点睛】

本题主要考查由三视图还原几何体，考查运算能力和推理能力，属于基础题.

5. C

【解析】

首先根据对数函数的性质求出 a 的取值范围，再代入验证即可；

【详解】

解： $\because 3 = \log_3 27 < a = \log_3 74 < \log_3 81 = 4$, $\therefore$ 当 $m = 8$ 时， $b = \log_2 m = 3$ 满足 $a > b > c$, $\therefore$ 实数 m 可以为 8.

故选：C

【点睛】

本题考查对数函数的性质的应用，属于基础题.

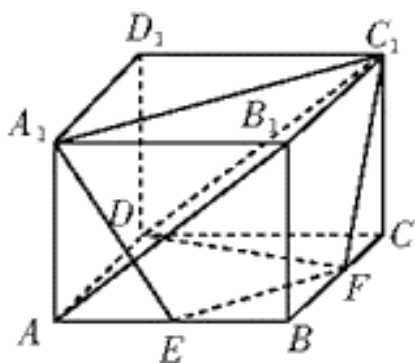
6. B

【解析】

连接 EF , A_1C_1 , C_1D , DF , 由正四棱柱的特征可知 $EF \parallel A_1C_1$, 再由平面的基本性质可知，直线 A_1E 与直线 C_1F 共面., 同理易得 $AB_1 \parallel C_1D$, 由异面直线所成的角的定义可知，异面直线 AB_1 与 C_1F 所成角为 $\angle DC_1F$, 然后再利用余弦定理求解.

【详解】

如图所示：



连接 EF ， A_1C_1 ， C_1D ， DF ，由正方体的特征得 $EF \parallel A_1C_1$ ，

所以直线 A_1E 与直线 C_1F 共面.

由正四棱柱的特征得 $AB_1 \parallel C_1D$ ，

所以异面直线 AB_1 与 C_1F 所成角为 $\angle DC_1F$.

设 $AA_1 = \sqrt{2}$ ，则 $AB = \sqrt{2}AA_1 = 2$ ，则 $DF = \sqrt{5}$ ， $C_1F = \sqrt{3}$ ， $C_1D = \sqrt{6}$ ，

由余弦定理，得 $m = \cos \angle DC_1F = \frac{3+6-5}{2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

故选：B

【点睛】

本题主要考查异面直线的定义及所成的角和平面的基本性质，还考查了推理论证和运算求解的能力，属于中档题.

7. D

【解析】

可求出集合 A ， B ，然后进行并集的运算即可.

【详解】

解： $A = \{x \mid 0 < x < 2\}$ ， $B = \{y \mid y \geq 0\}$ ；

$\therefore A \cup B = [0, +\infty)$.

故选 D.

【点睛】

考查描述法、区间的定义，对数函数的单调性，以及并集的运算.

8. A

【解析】

根据 $m = 2$ 或 $m + 2 = 2$ ，验证交集后求得 m 的值.

【详解】

因为 $A \cap B = \{2\}$ ，所以 $m = 2$ 或 $m + 2 = 2$. 当 $m = 2$ 时， $A \cap B = \{2, 4\}$ ，不符合题意，当 $m + 2 = 2$ 时， $m = 0$. 故选

A.

【点睛】

本小题主要考查集合的交集概念及运算，属于基础题.

9. C

【解析】

由基本音的谐波的定义可得 $f_1 = nf_2$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 利用 $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ 可得 $\omega_1 = n\omega_2$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 即可判断选项.

【详解】

由题, 所有泛音的频率都是基本音频率的整数倍, 称为基本音的谐波,

由 $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$, 可知若 $f_1 = nf_2$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 则必有 $\omega_1 = n\omega_2$ ($n \in \mathbf{N}^*$),

故选: C

【点睛】

本题考查三角函数的周期与频率, 考查理解分析能力.

10. C

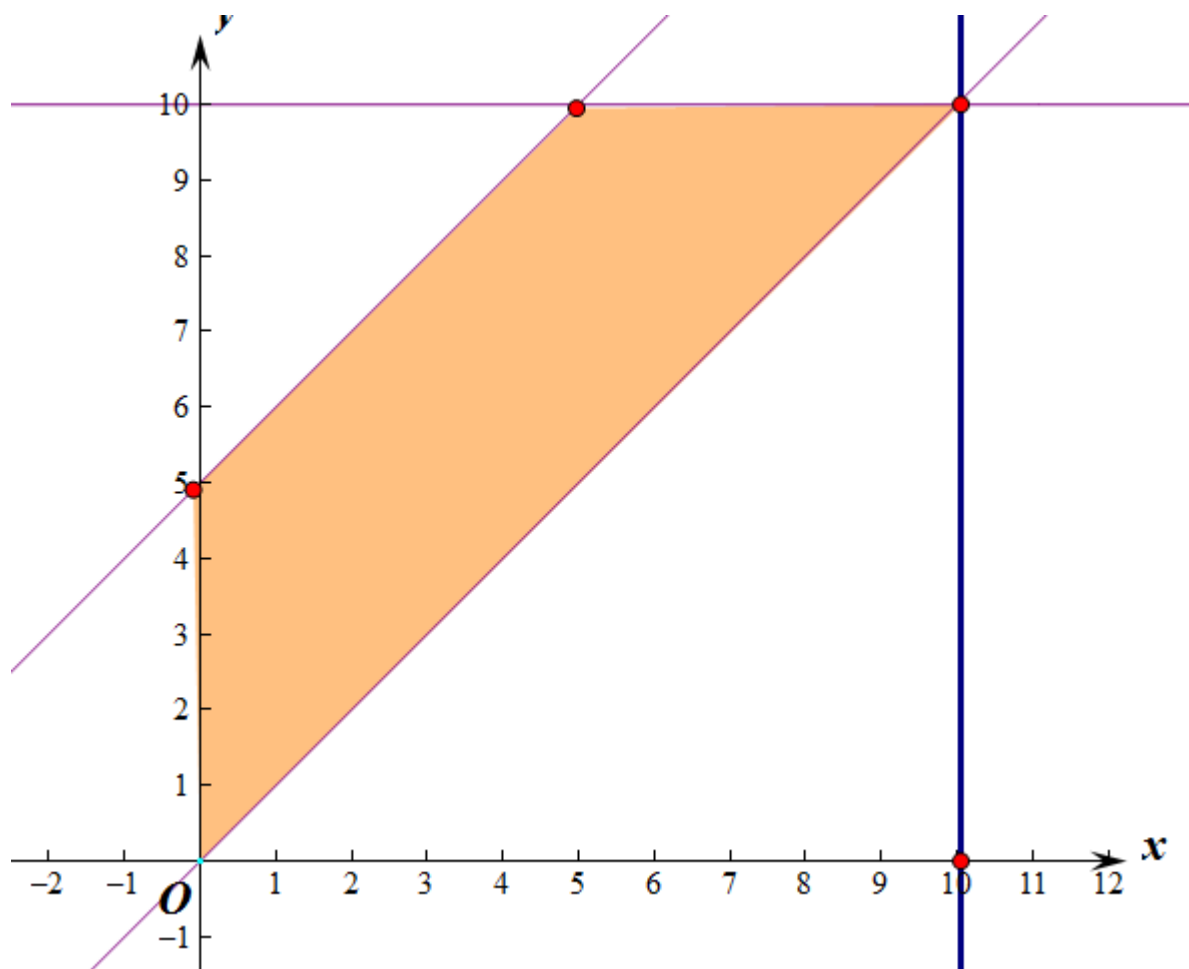
【解析】

设出两人到达小王的时间, 根据题意列出不等式组, 利用几何概型计算公式进行求解即可.

【详解】

设小王和外卖小哥到达小王所居住的楼下的时间分别为 x, y , 以 12:00 点为开始算起, 则有 $\begin{cases} x \leq y \\ y - x \leq 5 \end{cases}$, 在平面直角

坐标系内, 如图所示: 图中阴影部分表示该不等式组的所表示的平面区域,



所以小王在楼下等候外卖小哥的时间不超过 5 分钟的概率为：

$$P = \frac{10 \times 10 - \frac{1}{2} \times 10 \times 10 - \frac{1}{2} \times 5 \times 5}{10 \times 10} = \frac{3}{8}.$$

故选：C

【点睛】

本题考查了几何概型中的面积型公式，考查了不等式组表示的平面区域，考查了数学运算能力.

11. D

【解析】

根据题意，求得 A, M, B 的坐标，根据点在椭圆上，点的坐标满足椭圆方程，即可求得结果.

【详解】

由已知可知， M 点为 AF_1 中点， F_1 为 BM 中点，

故可得 $x_{F_1} + x_A = 2x_M = 0$ ，故可得 $x_A = c$ ；

代入椭圆方程可得 $\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，解得 $y = \pm \frac{b^2}{a}$ ，不妨取 $y_A = \frac{b^2}{a}$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/748121043051006137>