专题 14 思想方法专题：线段与角计算中的思想方法压轴题四种模型全攻略

【考点导航】

目录

【典型例题】

【考点一 分类讨论思想在线段的计算中的应用】

例题：（2023 秋·云南昆明·七年级统考期末）有 AB、CD 两根木条，长度分别为 24 cm、18 cm，将它们的一端重合且放在同一条直线上，此时 AB、CD 两根木条中点之间的距离为_______cm.

【答案】3 或 21

【分析】假设端点 B 和端点 D 重合，分两种情况如图：① BC 不在 AB 上时，$MN=BM+BN$，② BC 在 AB 上时，$MN=BM-BN$，分别代入数据进行计算即可得解.

【详解】解：假设端点 B 和端点 D 重合

如图，

图1

图2

设较长的木条为 $AB=24\text{cm}$，较短的木条为 $BC=18\text{cm}$，

∵M、N 分别为 AB、BC 的中点，

∴ $BM = 12\text{cm}$， $BN = 9\text{cm}$，

①如图 1， BC 不在 AB 上时， $MN = BM + BN = 12 + 9 = 21$（$cm$），

②如图 2， BC 在 AB 上时， $MN = BM - BN = 12 - 9 = 3$（$cm$），

综上所述，两根木条的中点间的距离是 21cm 或 3cm，

故答案为：3 或 21．

【点睛】本题考查了两点间的距离，主要利用了线段的中点定义，解题的关键是在于要分情况讨论，作出图形更形象直观．

【变式训练】

1．（2023 秋·云南昭通·七年级统考期末）已知线段 $AB = 6cm$，点 C 为线段 AB 的中点，点 D 是直线 AB 上的一点，且 $CD = 2cm$，则线段 BD 的长是（　　）

A．1cm　　B．5cm　　C．1cm 或 5cm　　D．4cm 或 5cm

【答案】C

【分析】根据题意画出图形，由于点 D 的位置不能确定，故应分两种情况进行讨论．

【详解】解：∵线段 $AB = 6\text{cm}$， C 为 AB 的中点，

图1　图2

∴当点 D 如图 1 所示时，

$AC = BC = \frac{1}{2}AB = 3cm$，

$BD = BC + CD = 3 + 2 = 5\text{cm}$；

当点 D 如图 2 所示时，

$BD = BC - CD = 3 - 2 = 1\text{cm}$

∴线段 BD 的长为 1cm 或 5cm.

故选：C．

【点睛】本题考查的是两点间的距离，在解答此题时要注意进行分类讨论，不要漏解．

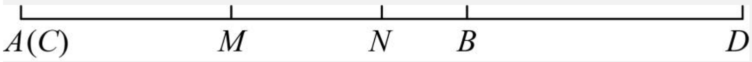
2．（2023 春·山东青岛·七年级统考开学考试）如图，有两根木条，一根 AB 长为 80cm，另一根 CD 长为 130cm，在它们的中点处各有一个小圆孔 M、N（圆孔直径忽略不计， M、N 抽象成两个点），将它们的一端重合，放置在同一条直线上，此时两根木条的小圆孔之间的距离 MN 是__________．

图 1　　　　　　　　　　图 2

【答案】25cm或105cm

【分析】分两种情况画出图形求解即可.

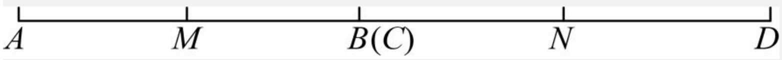
【详解】解：（1）当A、C（或B、D）重合，且剩余两端点在重合点同侧时，



$MN=CN-AM=\frac{1}{2}CD-\frac{1}{2}AB$

$=65-40=25$（厘米）；

（2）当B、C（或A、C）重合，且剩余两端点在重合点两侧时，



$MN=CN+BM=\frac{1}{2}CD+\frac{1}{2}AB$

$=65+40=105$（厘米）.

所以两根木条的小圆孔之间的距离MN是25cm或105cm.

故答案为：25cm或105cm.

【点睛】此题考查了两点之间的距离问题，正确画图很重要，本题渗透了分类讨论的思想，体现了思维的严密性，在今后解决类似的问题时，要防止漏解.

3.（2023 秋·江西吉安·七年级校考期末）在同一直线上有A,B,C,D不重合的四个点，$AB=8,BC=3,CD=5$，则AD的长为________.

【答案】6 或 10 或 16

【分析】由于没有图形，故A,B,C,D四点相对位置不确定，分：点C在B的左侧、右侧，点D在C的左侧、右侧等，不同情况画图分别求解即可.

【详解】解：I．当点C在B的右侧，点D在C的左侧时，如图：

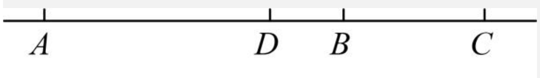


图 1

$\because AB=8$，$BC=3$，$CD=5$，

$\therefore AD=AB+BC-CD=8+3-5=6$，

II．当点C在B的右侧，点D在C的右侧时，如图：

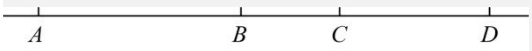


图 2

$\therefore AD = AB + BC - CD = 8 + 3 + 5 = 16$，

III．当点 C 在 B 的左侧，点 D 在 C 的左侧时，如图：

图 3

$\therefore AD = AB - BC - CD = 8 - 3 - 5 = 0$，点 A、D 重合，不合题意，

IV．当点 C 在 B 的左侧，点 D 在 C 的右侧时，如图：

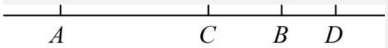


图 4

$\therefore AD = AB - BC + CD = 8 - 3 + 5 = 10$，点 A、D 重合，不合题意，

综上所述：AD 的长为 6 或 10 或 16

故答案为：6 或 10 或 16．

【点睛】本题主要考查两点间的距离，解题的关键是根据点的不同位置进行分类讨论、利用线段之间的和差关系得到 AD 的长度．

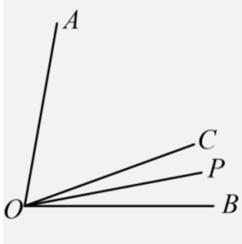
【考点二 分类讨论思想在角的计算中的应用】

例题：（2023 秋·七年级课时练习）已知 $\angle AOB = 80°$，$\angle BOC = 20°$，OP 平分 $\angle BOC$，则 $\angle AOP$ 等于________．

【答案】$70°$ 或 $90°$

【分析】分两种情况：利用角平分线的定义即可求解．

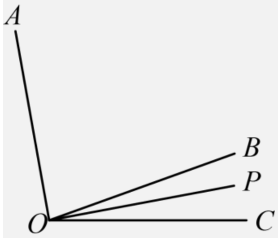
【详解】解：当如图所示时：



$\because OP$ 平分 $\angle BOC$， $\angle AOB = 80°$， $\angle BOC = 20°$，

$\therefore \angle AOP = \angle AOB - \dfrac{1}{2}\angle BOC = 70°$，

当如图所示时：



$\because OP$ 平分 $\angle BOC$， $\angle AOB=80°$， $\angle BOC=20°$，

$\therefore \angle AOP=\angle AOB+\frac{1}{2}\angle BOC=90°$．

故答案为： $70°$ 或 $90°$．

【点睛】本题考查了角平分线的定义，熟练掌握角平分线的定义，利用分类讨论解决问题是解题的关键．

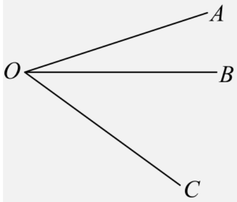
【变式训练】

1．（2022春·黑龙江哈尔滨·六年级统考期末）已知 $\angle AOB=18°$， $\angle AOC=3\angle AOB$，则 $\angle BOC$ 的度数是__．

【答案】 $36°$ 或 $72°$

【分析】分两种情况讨论：①当 OB 在 $\angle AOC$ 的内部时；②当 OB 在 $\angle AOC$ 的外部时，分别求解即可得到答案．

【详解】解：①如图，当 OB 在 $\angle AOC$ 的内部时，

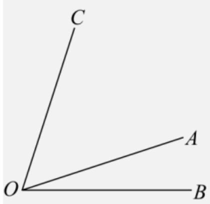


$\because \angle AOB=18°$， $\angle AOC=3\angle AOB$，

$\therefore \angle AOC=54°$，

$\therefore \angle BOC=\angle AOC-\angle AOB=54°-18°=36°$；

②如图，当 OB 在 $\angle AOC$ 的外部时，



$\because \angle AOB=18°$， $\angle AOC=3\angle AOB$，

$\therefore \angle AOC=54°$，

$\therefore \angle BOC=\angle AOC+\angle AOB=54°+18°=72°$；

综上可知， $\angle BOC$ 的度数为 $36°$ 或 $72°$，

故答案为：36° 或 72°.

【点睛】本题考查了角度的和差计算，利用分类讨论的思想解决问题是解题关键.

2．（2022春·黑龙江哈尔滨·六年级校考期中）已知 $\angle AOB=80^\circ$，OC 平分 $\angle AOB$，射线 OM 与 OC 所形成的角度是 10°，那么 $\angle AOM$ 的度数是__________°

【答案】30或50/50或30

【分析】分两种情况：射线 OM 在 OC 的上方和射线 OM 在 OC 的下方，根据角平分线的定义和角的和差分别计算即可.

【详解】解：如图1，

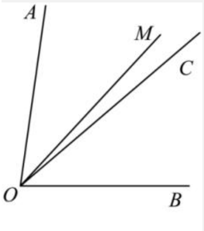


图1

$\because \angle AOB=80^\circ$，$OC$ 平分 $\angle AOB$，

$\therefore \angle AOC=\angle BOC=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times 80^\circ=40^\circ$，

$\because$射线 OM 与 OC 所形成的角度是 10°，

$\therefore \angle COM=10^\circ$，

$\therefore \angle AOM=\angle AOC-\angle COM=40^\circ-10^\circ=30^\circ$；

如图2，

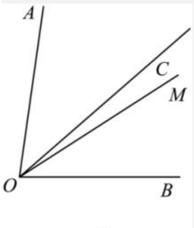


图2

$\because \angle AOB=80^\circ$，$OC$ 平分 $\angle AOB$，

$\therefore \angle AOC=\angle BOC=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times 80^\circ=40^\circ$，

$\because$射线 OM 与 OC 所形成的角度是 10°，

$\therefore \angle COM=10^\circ$，

$\therefore \angle AOM=\angle AOC+\angle COM=40^\circ+10^\circ=50^\circ$；

综上可知 $\angle AOM$ 的度数是 30° 或 50°.

故答案为：30或50.

【点睛】此题考查了角平分线的定义和角的和差计算，分类讨论是解题的关键.

3.（2022春·黑龙江哈尔滨·六年级校考期中）已知射线OC是$\angle AOB$的三等分线，射线OD为$\angle AOB$的平分线，若$\angle AOC=40^\circ$，则$\angle COD=$________.

【答案】20°或10°

【分析】根据三等分线的定义可得$\angle AOC=\frac{1}{3}\angle AOB$或$\angle AOC=\frac{2}{3}\angle AOB$，画出图形，进行分类讨论即可.

【详解】解：∵射线OC是$\angle AOB$的三等分线，

∴$\angle AOC=\frac{1}{3}\angle AOB$或$\angle AOC=\frac{2}{3}\angle AOB$，

当$\angle AOC=\frac{1}{3}\angle AOB$时，如图：

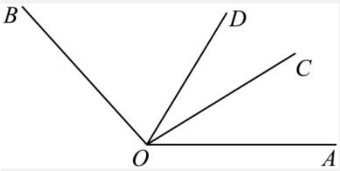
∵$\angle AOC=40^\circ$，$\angle AOC=\frac{1}{3}\angle AOB$，

∴$\angle AOB=120^\circ$，

∵射线OD为$\angle AOB$的平分线，

∴$\angle AOD=\frac{1}{2}\angle AOB=60^\circ$，

∴$\angle COD=\angle AOD-\angle AOC=20^\circ$；



当$\angle AOC=\frac{2}{3}\angle AOB$时，如图：

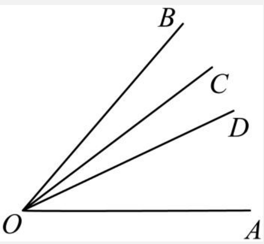
∵$\angle AOC=40^\circ$，$\angle AOC=\frac{2}{3}\angle AOB$，

∴$\angle AOB=60^\circ$，

∵射线OD为$\angle AOB$的平分线，

∴$\angle AOD=\frac{1}{2}\angle AOB=30^\circ$，

∴$\angle COD=\angle AOD-\angle AOC=10^\circ$；

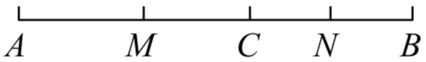


故答案为：20°或10°.

【点睛】本题主要考查了角的三等分线和角平分线，解题的关键是掌握角的三等分线有两条.

【考点三 整体思想及从特殊到一般的思想解决线段和差问题】

例题：（2022秋·河南南阳·七年级统考期末）（1）如图，已知线段AB，点C是线段AB上一点，点M、N分别是线段AC，BC的中点.



①若$AC=BC=4$，则线段MN的长度是_________；

②若$AC=a$，$BC=b$，求线段MN的长度(结果用含a、b的代数式表示)；

（2）在（1）中，把点C是线段AB上一点改为：点C是直线AB上一点，$AC=a$，$BC=b$．其它条件不变，则线段MN的长度是___________（结果用含a、b的代数式表示）

【答案】（1）①4，②$\frac{1}{2}(a+b)$，（2）$\frac{1}{2}(a+b)$或$\frac{1}{2}(b-a)$或$\frac{1}{2}(a-b)$

【分析】（1）①根据线段中点的定义可得$MC=\frac{1}{2}AC=2$，$NC=\frac{1}{2}BC=2$，即可求解；

② $MC=\frac{1}{2}AC=\frac{a}{2}, NC=\frac{1}{2}BC=\frac{b}{2}$，即可求解；

（2）根据题意进行分类讨论即可：当点C在线段AB上时，当点C在点A的左边时，当点C在点B的右边时.

【详解】（1）解：①∵点M、N分别是线段AC，BC的中点，$AC=BC=4$，

$\therefore MC=\frac{1}{2}AC=2$，$NC=\frac{1}{2}BC=2$，

$\therefore MN=MC+NC=2+2=4$，

故答案为：4；

②∵点M、N分别是线段AC，BC的中点，$AC=BC=4$，

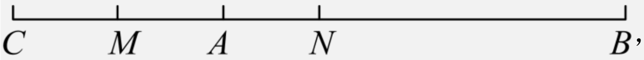
$\therefore MC=\frac{1}{2}AC=\frac{a}{2}, NC=\frac{1}{2}BC=\frac{b}{2}$，

$\therefore MN=MC+NC=\frac{1}{2}(a+b)$；

（2）当点C在线段AB上时，

由（1）可得：$MN=MC+NC=\frac{1}{2}(a+b)$；

当点 C 在 A 左边时，

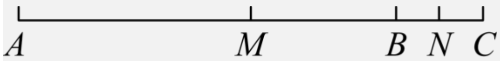


∵点 M、N 分别是线段 AC，BC 的中点，$AC=a$，$BC=b$，

∴ $MC=\frac{1}{2}AC=\frac{a}{2}, NC=\frac{1}{2}BC=\frac{b}{2}$，

∴ $MN=NC-MC=\frac{1}{2}(b-a)$；

当点 C 在点 B 右边时，



∵点 M、N 分别是线段 AC，BC 的中点，$AC=a$，$BC=b$，

∴ $MC=\frac{1}{2}AC=\frac{a}{2}, NC=\frac{1}{2}BC=\frac{b}{2}$，

∴ $MN=MC-NC=\frac{1}{2}(a-b)$；

综上：$MN=\frac{1}{2}(a+b)$ 或 $\frac{1}{2}(b-a)$ 或 $\frac{1}{2}(a-b)$.

故答案为：$\frac{1}{2}(a+b)$ 或 $\frac{1}{2}(b-a)$ 或 $\frac{1}{2}(a-b)$.

【点睛】本题主要考查了线段中点的性质，线段的和差计算，解题的关键是掌握线段中点的定义，具有分类讨论的思想．

【变式训练】

1．（2022秋·全国·七年级专题练习）如图，点 B 在线段 AC 上，点 M、N 分别是 AC、BC 的中点．

(1)若线段 $AC=15$，$BC=\frac{2}{5}AC$，则线段 MN 的长为_

(2)若 B 为线段 AC 上任一点，满足 $AC-BC=m$，其它条件不变，求 MN 的长；

(3)若原题中改为点 B 在直线 AC 上，满足 $AC=a$，$BC=b$，$(a\neq b)$，其它条件不变，求 MN 的长．

【答案】(1) $\frac{9}{2}$

(2) $\frac{1}{2}m$

(3) $\frac{1}{2}(b-a)$

【分析】(1) 先求出 $BC=6$，再由点 M、N 分别是 AC、BC 的中点，可得 $CM=\frac{1}{2}AC=\frac{15}{2}$，$CN=\frac{1}{2}BC=3$，

再由$MN=CM-CN$，即可求解；

（2）由点M、N分别是AC、BC的中点，可得$CM=\frac{1}{2}AC$，$CN=\frac{1}{2}BC$，再由$MN=CM-CN$，即可求解；

（3）分三种情况讨论：当点B在线段AC上时，当点B在AC的延长线上时，当点B在CA的延长线上时，即可求解.

【详解】（1）解：$\because AC=15$，$BC=\frac{2}{5}AC$，

$\therefore BC=6$，

又$\because$点M、N分别是AC、BC的中点，

$\therefore CM=\frac{1}{2}AC=\frac{15}{2}$，$CN=\frac{1}{2}BC=3$，

$\therefore MN=CM-CN=\frac{15}{2}-3=\frac{9}{2}$；

故答案为：$\frac{9}{2}$；

（2）解：$\because$点M、N分别是AC、BC的中点，

$\therefore CM=\frac{1}{2}AC$，$CN=\frac{1}{2}BC$，

$\therefore MN=CM-CN=\frac{1}{2}AC-\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\left(AC-BC\right)=\frac{1}{2}m$；

（3）解：当点B在线段AC上时，

$\because$点M、N分别是AC、BC的中点，

$\therefore CM=\frac{1}{2}AC$，$CN=\frac{1}{2}BC$，

$\therefore MN=CM-CN=\frac{1}{2}AC-\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}(AC-BC)=\frac{1}{2}(a-b)$；

当点B在AC的延长线上时，

$\because$点M、N分别是AC、BC的中点，

$\therefore CM=\frac{1}{2}AC$，$CN=\frac{1}{2}BC$，

$\therefore MN=CM+CN=\frac{1}{2}AC+\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}(AC+BC)=\frac{1}{2}(a+b)$；

当点B在CA的延长线上时，

$\because$点M、N分别是AC、BC的中点，

$\therefore CM=\frac{1}{2}AC$，$CN=\frac{1}{2}BC$，

$\therefore MN=CN-CM=\frac{1}{2}BC-\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\left(BC-AC\right)=\frac{1}{2}\left(b-a\right)$.

【点睛】本题主要考查了有关线段中点的计算，根据题意，准确得到线段之间的数量关系是解题的关键.

2．（2022秋·河北石家庄·七年级石家庄市第四十一中学校考期中）（1）如图1，点C在线段AB上，M，N分别是AC，BC的中点,若$AB=12$，$AC=8$，求MN的长.

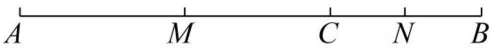


图1

（2）设$AB=a$，C是线段AB上任意一点（不与点A，B重合）.

图2

①如图2，当M，N分别是AC，BC的中点时，MN的长是___________；

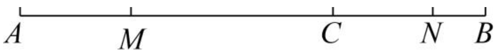


图3

②如图3，若M，N分别是AC，BC的三等分点，即$AM=\frac{1}{3}AC$，$BN=\frac{1}{3}BC$，请直接写出线段MN的长.

【答案】（1）6 （2）①$\frac{1}{2}a$ ②$\frac{2}{3}a$

【分析】（1）由$AB=12, AC=8$，得$BC=AB-AC=4$，根据M，N分别是AC，BC的中点，即得$CM=\frac{1}{2}AC=4$，$CN=\frac{1}{2}BC=2$，故$MN=CM+CN=6$；

（2）①由M，N分别是AC，BC的中点，知$CM=\frac{1}{2}AC, CN=\frac{1}{2}BC$，即得$MN=\frac{1}{2}AC+\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AB$，故$MN=\frac{1}{2}a$；

②由$AM=\frac{1}{3}AC, BN=\frac{1}{3}BC$，知$CM=\frac{2}{3}AC, CN=\frac{2}{3}BC$，即得$MN=CM+CN=\frac{2}{3}AC+\frac{2}{3}BC=\frac{2}{3}AB$，故$MN=\frac{2}{3}a$；

【详解】解：（1）$\because AB=12, AC=8$

$\therefore BC=AB-AC=4$

$\because$ M，N分别是AC，BC的中点

$\therefore CM=\frac{1}{2}AC=4, CN=\frac{1}{2}BC=2$

$\therefore MN=CM+CN=6$

故答案为：6

（2）①∵ M，N 分别是 AC， BC 的中点

$\therefore CM=\frac{1}{2}AC, CN=\frac{1}{2}BC$

$\therefore MN=\frac{1}{2}AC+\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AB$

$\because AB=a$

$\therefore MN=\frac{1}{2}a$

故答案为： $\frac{1}{2}a$

②∵ $AM=\frac{1}{3}AC, BN=\frac{1}{3}BC$

$\therefore CM=\frac{2}{3}AC, CN=\frac{2}{3}BC$

$\therefore MN=CM+CN=\frac{2}{3}AC+\frac{2}{3}BC=\frac{2}{3}AB$

$\because AB=a$

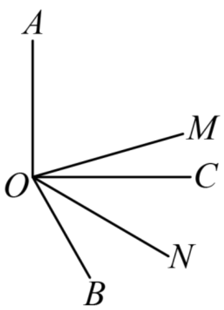
$\therefore MN=\frac{2}{3}a$

故答案为： $\frac{2}{3}a$

【点睛】本题考查线段的中点、线段的和差，解题的关键是掌握线段中点的定义及线段和差运算．

【考点四 整体思想及从特殊到一般的思想解决角和差问题】

例题：（2023 秋·全国·七年级课堂例题）已知：如图，OC 在 $\angle AOB$ 的内部，OM 平分 $\angle AOB\left(\angle AOB<180^{\circ}\right)$，$ON$ 平分 $\angle BOC$．



(1)当 $\angle AOC=90^{\circ}$，$\angle BOC=60^{\circ}$ 时， $\angle MON=$___________°；

(2)当 $\angle AOC=80^{\circ}$，$\angle BOC=60^{\circ}$ 时， $\angle MON=$___________°；

(3)当$\angle AOC=80°$，$\angle BOC=50°$时，$\angle MON=$__________$°$；

(4)猜想：不论$\angle AOC$和$\angle BOC$的度数是多少，$\angle MON$的度数总等于________的度数的一半．

【答案】(1) 45

(2)40

(3)40

(4)$\angle AOC$

【分析】（1）（2）（3）利用角平分线的定义求得$\angle AOM$和$\angle NOC$的度数，再求得$\angle MOC$，进一步计算即可求解；

（4）由（1）（2）（3）可得出结论；

【详解】（1）解：∵$\angle AOC=90°$，$\angle BOC=60°$，

∴$\angle AOB=90°+60°=150°$，

∵OM平分$\angle AOB$，

∴$\angle AOM=\frac{1}{2}\angle AOB=75°$，

∴$\angle MOC=90°-75°=15°$，

又∵ON平分$\angle BOC$，

∴$\angle NOC=\frac{1}{2}\angle BOC=30°$，

∴$\angle MON=\angle MOC+\angle NOC=15°+30°=45°$，

故答案为：45；

（2）解：∵$\angle AOC=80°$，$\angle BOC=60°$，

∴$\angle AOB=80°+60°=140°$，

∵OM平分$\angle AOB$，

∴$\angle AOM=\frac{1}{2}\angle AOB=70°$，

∴$\angle MOC=80°-70°=10°$，

又∵ON平分$\angle BOC$，

∴$\angle NOC=\frac{1}{2}\angle BOC=30°$，

∴$\angle MON=\angle MOC+\angle NOC=10°+30°=40°$，

故答案为：40；

（3）解：∵$\angle AOC=80°$，$\angle BOC=50°$，

$\therefore \angle AOB = 80° + 50° = 130°$，

$\because OM$ 平分 $\angle AOB$，

$\therefore \angle AOM = \frac{1}{2}\angle AOB = 65°$，

$\therefore \angle MOC = 80° - 65° = 15°$，

又 $\because ON$ 平分 $\angle BOC$，

$\therefore \angle NOC = \frac{1}{2}\angle BOC = 25°$，

$\therefore \angle MON = \angle MOC + \angle NOC = 15° + 25° = 40°$，

故答案为：40；

（4）解：由以上（1）（2）（3）得出结论 $\angle MON = \frac{1}{2}\angle AOC$，

即不论 $\angle AOC$ 和 $\angle BOC$ 的度数是多少，$\angle MON$ 的度数总等于 $\angle AOC$ 的度数的一半.

故答案为：$\angle AOC$.

【点睛】此题考查了角平分线的定义、角的计算，关键是根据角平分线定义得出所求角与已知角的关系转化求解.

【变式训练】

1.（2023 秋·重庆开州·七年级统考期末）已知 O 为直线 AB 上一点，将一直角三角板 OMN 的直角顶点放在点 O 处．射线 OC 平分 $\angle MOB$.

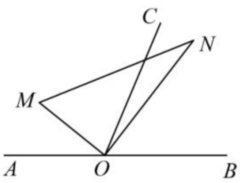


图 1

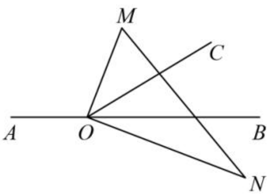


图 2

(1)如图 1，若 $\angle AOM = 40°$，求 $\angle CON$ 的度数；

(2)在图 1 中，若 $\angle AOM = \alpha$，直接写出 $\angle CON$ 的度数（用含 α 的代数式表示）；

(3)将图 1 中的直角三角板 OMN 绕顶点 O 顺时针旋转至图 2 的位置，当 $\angle AOC = 3\angle BON$ 时，求 $\angle AOM$ 的度数.

【答案】(1)20°

(2) $\angle CON = \frac{1}{2}\alpha$

(3)144°

【分析】（1）根据角平分线的定义和余角的性质即可得到结论；