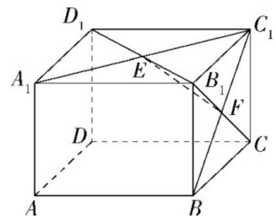
1.4.2　用空间向量研究距离、夹角问题

基础过关练

题组一　用空间向量求空间的距离问题

1.如图所示,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=BC=2$,$AA_1=\sqrt{2}$,E,F 分别是面 $A_1B_1C_1D_1$,面 BCC_1B_1 的中心,则 E,F 两点间的距离为(　　)

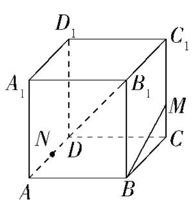


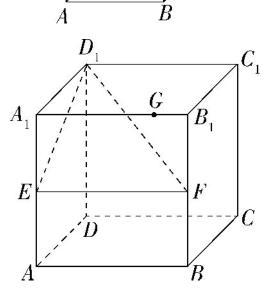
A.1　B.$\frac{\sqrt{5}}{2}$　C.$\frac{\sqrt{6}}{2}$　D.$\frac{3}{2}$

2.已知平面 α 的一个法向量 n=(-2,-2,1),点 A(-1,3,0)在平面 α 内,则点 P(-2,1,4)到 α 的距离为(　　)

A.10　B.3　C.$\frac{8}{3}$　D.$\frac{10}{3}$

3.(2020 山东济南第二中学高二上月考)如图,正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,N 是棱 AD 的中点,M 是棱 CC_1 上的点,且 $CC_1=3CM$,则直线 BM 与 B_1N 之间的距离为________.



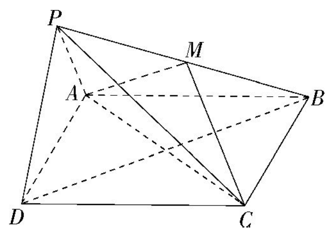


4.(2020 河北唐山第二中学高二上期中)在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E,F 分别为棱 AA_1,BB_1 的中点,G 为棱 A_1B_1 上的一点,且 $A_1G=\lambda(0<\lambda<2)$,则点 G 到平面 D_1EF 的距离为________.深度解析

5.如图,在四棱锥 P-ABCD 中,底面 ABCD 为正方形,平面 PAD⊥平面 ABCD,点 M 在线段 PB 上,PD∥平面 MAC,$PA=PD=\sqrt{6}$,AB=4.

(1)求证:M 为 PB 的中点;

(2)求点 C 到平面 BDP 的距离 d.



题组二　用空间向量求空间角的问题

6.(2020 广东深圳实验学校高二上期中)设平面 α 与平面 β 的夹角为 θ,若平面 α,β 的法向量分别为 n_1,n_2,则 cos θ=(　　)

A.$\frac{n_1\cdot n_2}{|n_1||n_2|}$　B.$\frac{|n_1\cdot n_2|}{|n_1||n_2|}$

C.$\frac{|n_1||n_2|}{n_1\cdot n_2}$　D.$\frac{|n_1||n_2|}{|n_1\cdot n_2|}$

7.(2020 山西大学附属中学高二阶段测试)在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,M 为 A_1B_1 的中点,则异面直线 AM 与 B_1C 所成角的余弦值为(　　)

A.$\frac{\sqrt{10}}{5}$ B.$\frac{\sqrt{10}}{10}$ C.$\frac{\sqrt{3}}{2}$ D.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

8.在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,点 E 为 BB_1 的中点,则平面 A_1ED 与平面 ABCD 的夹角的余弦值为(　　)

A.$\frac{1}{2}$　B.$\frac{2}{3}$　C.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　D.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

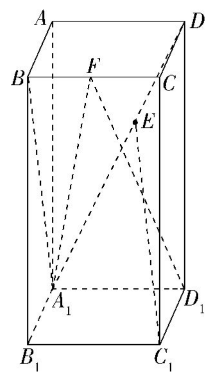
9.在一个二面角的两个面内都和二面角的棱垂直的两个向量分别为(0,-1,3)和(2,2,4),则这个二面角的余弦值为________.

10.已知点E,F分别在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱BB_1,CC_1上,且$B_1E=2EB,CF=2FC_1$,则平面AEF与平面ABC所成角的正切值为________.

11.如图,在长方体$A_1B_1C_1D_1-ABCD$中,$AB=\sqrt{3},BC=1,AA_1=2$,E为A_1D的中点.

(1)求直线EC_1与A_1B所成角的余弦值;

(2)若F为BC的中点,求直线EC_1与平面FA_1D_1所成角的正弦值.



能力提升练

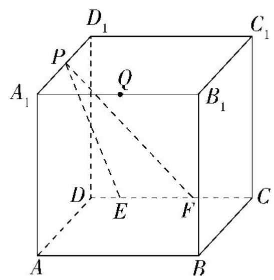
题组一　用空间向量求空间距离

1.(2019山东师范大学附属中学期中,★☆)在空间直角坐标系中,定义:平面α的一般方程为Ax+By+Cz+D=0(A,B,C,D∈R,且A,B,C不同时为零),点$P(x_0,y_0,z_0)$到平面α的距离$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$,则在底面边长与高都为2的正四棱锥P-ABCD中,底面中心O到侧面PAB的距离d等于(　　)

A.$\frac{\sqrt{5}}{5}$ B.$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

C.2 D.5

2.(2020 山东威海高二期中,★☆)如图,在棱长为 a 的正方体 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$ 中,P 为 A_1D_1 的中点,Q 为 A_1B_1 上任意一点,E,F 为 CD 上两个动点,且 EF 的长为定值,则点 Q 到平面 PEF 的距离 (　　)



A.等于$\frac{\sqrt{5}}{5}$a B.和 EF 的长度有关

C.等于$\frac{\sqrt{2}}{3}$a D.和点 Q 的位置有关

3.(多选)(★★)已知正方体 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1,点 E、O 分别是 A_1B_1、A_1C_1 的中点,P 在正方体内部且满足$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$,则下列说法正确的是(深度解析)

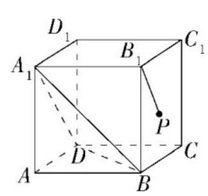
A.点 A 到直线 BE 的距离是$\frac{\sqrt{5}}{5}$

B.点 O 到平面 ABC_1D_1 的距离为$\frac{\sqrt{2}}{4}$

C.平面 A_1BD 与平面 B_1CD_1 间的距离为$\frac{\sqrt{3}}{3}$

D.点 P 到直线 AB 的距离为$\frac{25}{36}$

4.(★☆)如图,正方体 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1,点 P 在正方形 BCC_1B_1 内及其边界上运动,并且总保持 B_1P∥平面 A_1BD,则动点 P 的轨迹的长度是________.

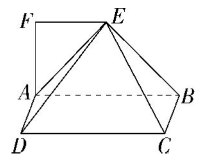


5.(2019 广东广州二中高二期中,★☆)已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4,M、N、P 分别在棱 AB、BC、CC_1 上,且 AM=1,BN=2,CP=3.过 M、N、P 三点的平面交 AC_1 于点 Q,则 A、Q 两点间的距离为__________.

6.(★☆)如图,已知四边形 ABCD 为矩形,四边形 ABEF 为直角梯形,FA⊥AB,AD=AF=FE=1,AB=2,AD⊥BE.

(1)求证:BE⊥DE;

(2)求点 F 到平面 CBE 的距离.



题组二　用空间向量求空间角

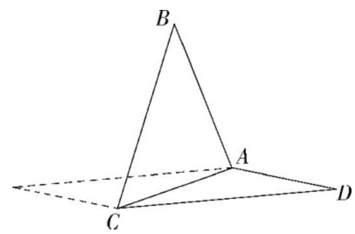
7.(★☆)正四棱锥 S-ABCD 中,SA=AB=2,则直线 AC 与平面 SBC 所成角的正弦值为(　　)

A.$\frac{\sqrt{3}}{6}$　B.$\frac{\sqrt{6}}{6}$　C.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　D.$\frac{\sqrt{6}}{3}$

8.(★☆)在直三棱柱 $A_1B_1C_1$-ABC 中,∠BCA=90°,D_1,F_1 分别是 A_1B_1,A_1C_1 的中点,BC=CA=CC_1,则 BD_1 与 AF_1 所成角的余弦值是(　　)

A.$\frac{\sqrt{30}}{10}$ B.$\frac{1}{2}$　C.$\frac{\sqrt{30}}{15}$ D.$\frac{\sqrt{15}}{10}$

9.(2020 河南省实验中学高二上期中,★☆)已知菱形 ABCD 中,∠ABC=60°,沿对角线 AC 折叠之后,使得平面 BAC⊥平面 DAC,则二面角 B-CD-A 的余弦值为(　　)



A.2　B.$\frac{1}{2}$　C.$\frac{\sqrt{3}}{3}$ D.$\frac{\sqrt{5}}{5}$

10.(2019 黑龙江省实验中学高二月考,★★)如图 1,四边形 ABCD 与四边形 ADEF 分别为正方形和等腰梯形,AD∥EF,AF=$\sqrt{2}$,AD=4,EF=2,沿 AD 边将四边形 ADEF 折起,使得平面 ADEF⊥平面 ABCD,如图 2,动点 M 在线段 EF 上,N,G 分别是 AB,BC 的中点,设异面直线 MN 与 AG 所成的角为 α,则 cos α 的最大值为(　　)

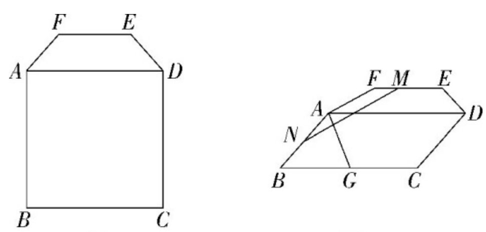
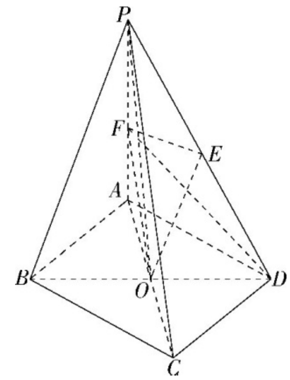


图1　图2

A.$\frac{\sqrt{30}}{10}$ B.$\frac{\sqrt{10}}{5}$ C.$\frac{\sqrt{10}}{10}$ D.$\frac{\sqrt{5}}{5}$

11.(多选)(2020 河北保定高二上期末,★★)如图,在四棱锥 P-ABCD 中,底面 ABCD 为矩形,AD=4,AB=2,平面 PAD⊥平面 ABCD,△PAD 为等腰直角三角形,且∠PAD=$\frac{\pi}{2}$,O 为底面 ABCD 的中心,E 为 PD 的中点,F 在棱 PA 上,若$\frac{FA}{PA}$=λ,λ∈[0,1],则下列说法正确的有(　　)

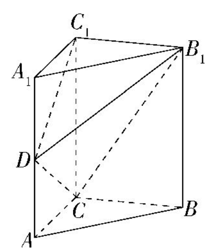


A.异面直线 PO 与 AD 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{21}}{7}$

B.异面直线 PO 与 AD 所成角的余弦值为$\frac{2\sqrt{21}}{21}$

C.若平面 OEF 与平面 DEF 夹角的正弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$,则 $\lambda=\frac{1}{2}$

D.若平面 OEF 与平面 DEF 夹角的正弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$,则 $\lambda=\frac{\sqrt{5}}{2}$



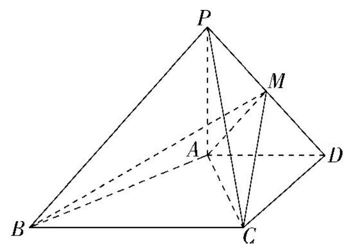
12.(2020 江西高安中学高二上期中,★☆)如图,在直三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中,∠ACB=90°,AC=AA_1=2BC=2,D 为 AA_1 上一点.若二面角 B_1-DC-C_1 的大小为 30°,则 AD 的长为________.

题组三　用空间向量解决探索性问题

13.(2020 浙江温州中学高二上阶段测试,★★)如图,在四棱锥 P-ABCD 中,PA⊥平面 ABCD,AD∥BC,AD⊥CD,且 AD=CD=$2\sqrt{2}$,BC=$4\sqrt{2}$,PA=4.

(1)求证:AB⊥PC;

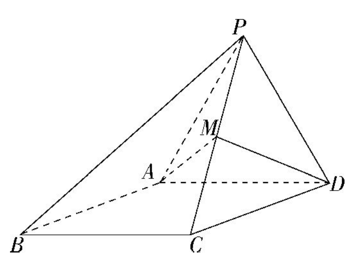
(2)在线段 PD 上是否存在一点 M(不与 P,D 重合),使得平面 MAC 与平面 ACD 夹角的大小为 45°?若存在,求 BM 与平面 MAC 所成角的正弦值;若不存在,请说明理由.



14.(2020湖北华中师大一附中高三期中,★★)如图,四棱锥P-ABCD中,侧面PAD是边长为2的正三角形且与底面垂直,底面ABCD是∠ABC=60°的菱形,M为棱PC上的动点,且$\frac{PM}{PC}=\lambda(\lambda\in[0,1])$.

(1)求证:△PBC为直角三角形;

(2)试确定λ的值,使得平面PAD与平面ADM夹角的余弦值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.



答案全解全析

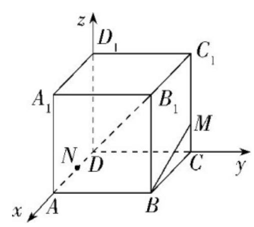
基础过关练

1.C　以点 A 为原点,AB 所在直线为 x 轴,AD 所在直线为 y 轴,AA_1所在直线为 z 轴建立空间直角坐标系,则点 $E(1,1,\sqrt{2})$,$F\left(2,1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,所以$|\overrightarrow{EF}|=\sqrt{(2-1)^2+(1-1)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,故选 C.

2.D　由已知得$\overrightarrow{PA}=(1,2,-4)$,故点 P 到平面 α 的距离为$\frac{|\overrightarrow{PA}\cdot n|}{|n|}=\frac{|-2-4-4|}{3}=\frac{10}{3}$.故选 D.

3.答案　$\frac{6\sqrt{89}}{89}$

解析　设正方体的棱长为 1,如图,建立空间直角坐标系,



则 $B(1,1,0)$,$B_1(1,1,1)$,$M\left(0,1,\frac{1}{3}\right)$,$N\left(\frac{1}{2},0,0\right)$,$\therefore \overrightarrow{BB_1}=(0,0,1)$,$\overrightarrow{BM}=\left(-1,0,\frac{1}{3}\right)$,$\overrightarrow{B_1N}=\left(-\frac{1}{2},-1,-1\right)$.

设直线 BM 与 B_1N 的公垂线方向上的向量 $n=(x,y,z)$,由 $n\cdot\overrightarrow{BM}=0$,$n\cdot\overrightarrow{B_1N}=0$,

得$\begin{cases}-x+\frac{1}{3}z=0,\\-\frac{1}{2}x-y-z=0,\end{cases}$

令 x=2,则 z=6,y=-7,$\therefore n=(2,-7,6)$.

设直线 BM 与 B_1N 之间的距离为 d,则 $d=\frac{|\overrightarrow{BB_1}\cdot n|}{|n|}=\frac{6}{\sqrt{89}}=\frac{6\sqrt{89}}{89}$.

4.答案　$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

解析　由题意得 $A_1B_1\parallel EF$,$A_1B_1\not\subset$平面 D_1EF,$EF\subset$平面 D_1EF,所以 $A_1B_1\parallel$平面 D_1EF,则点 G 到平面 D_1EF 的距离等于点 A_1 到平面 D_1EF 的距离.以 D 为原点,DA,DC,DD_1所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴建立空间直角坐标系 Dxyz,则 $D_1(0,0,2)$,$E(2,0,1)$,$F(2,2,1)$,$A_1(2,0,2)$,所以$\overrightarrow{D_1E}=(2,0,-1)$,$\overrightarrow{D_1F}=(2,2,-1)$,$\overrightarrow{A_1E}=(0,0,-1)$.

设平面 D_1EF 的法向量为 $n=(x,y,z)$,则$\begin{cases}2x-z=0,\\2x+2y-z=0,\end{cases}$

令 x=1,则 y=0,z=2,
所以平面 D_1EF 的一个法向量 n=(1,0,2).

点 A_1 到平面 D_1EF 的距离为$\left|\frac{\overrightarrow{A_1E}\cdot n}{|n|}\right|=\left|\frac{-1\times2}{\sqrt{5}}\right|=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,即点 G 到平面 D_1EF 的距离为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

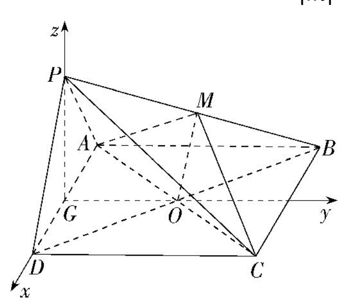
解题反思　当直线 l 与一个平面 α 平行时,这条直线上任意一点到该平面的距离都相等,本题利用 A_1B_1∥平面 D_1EF,将点 G 到平面 D_1EF 的距离转化为点 A_1 到平面 D_1EF 的距离,在计算过程中摆脱了对参数 λ 的依赖,简化了解题过程.

5.解析　(1)证明:如图,设 AC∩BD=O,∵四边形 ABCD 为正方形,
∴O 为 BD 的中点.
连接 OM.
∵PD∥平面 MAC,PD⊂平面 PBD,
平面 PBD∩平面 MAC=OM,
∴PD∥OM,
∴$\frac{BO}{BD}=\frac{BM}{BP}$,即 M 为 PB 的中点.
(2)取 AD 的中点 G,∵PA=PD,
∴PG⊥AD,∵平面 PAD⊥平面 ABCD,且平面 PAD∩平面 ABCD=AD,∴PG⊥平面 ABCD,连接 OG,则 PG⊥OG,由 G 是 AD 的中点,O 是 AC 的中点,可得 OG∥DC,则 OG⊥AD.
以 G 为坐标原点,GD、GO、GP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系.
由 PA=PD=$\sqrt{6}$,AB=4,得 D(2,0,0),P(0,0,$\sqrt{2}$),C(2,4,0),B(-2,4,0),M$\left(-1,2,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,则$\overrightarrow{DP}$=(-2,0,$\sqrt{2}$),$\overrightarrow{DB}$=(-4,4,0).

设平面 BDP 的法向量为 m=(x,y,z),

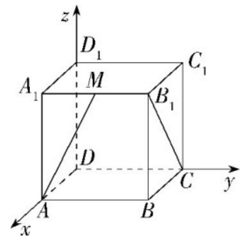
则由$\begin{cases}m\cdot\overrightarrow{DP}=0,\\m\cdot\overrightarrow{DB}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}-2x+\sqrt{2}z=0,\\-4x+4y=0,\end{cases}$取 z=$\sqrt{2}$,得 m=(1,1,$\sqrt{2}$).

又$\overrightarrow{CM}=\left(-3,-2,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,则点 C 到平面 BDP 的距离 d=$\frac{|\overrightarrow{CM}\cdot m|}{|m|}$=2.



6.B　由两个平面的夹角概念知,$\cos\theta=\left|\frac{n_1\cdot n_2}{|n_1||n_2|}\right|=\frac{|n_1\cdot n_2|}{|n_1||n_2|}$,故选 B.

7.A　以 D 为坐标原点,建立如图所示的空间直角坐标系,



设正方体的棱长为 1,则 A(1,0,0),A_1(1,0,1),B_1(1,1,1),C(0,1,0),

∴$\overrightarrow{B_1C}$=(-1,0,-1),

∴$|\overrightarrow{B_1C}|=\sqrt{2}$,

∵M 为 A_1B_1 的中点,

∴$M\left(1,\frac{1}{2},1\right)$.

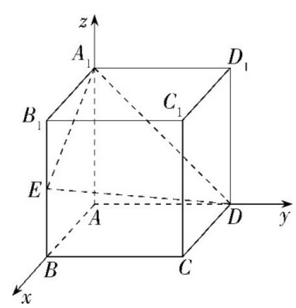
∴$\overrightarrow{AM}=\left(0,\frac{1}{2},1\right)$,

∴$|\overrightarrow{AM}|=\frac{\sqrt{5}}{2}$,

∴异面直线 AM 与 B_1C 所成角的余弦值为$|\cos\langle\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B_1C}\rangle|=\left|\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{B_1C}}{|\overrightarrow{AM}|\cdot|\overrightarrow{B_1C}|}\right|=\frac{\sqrt{10}}{5}$.故选 A.

8.B　以 A 为原点,AB,AD,AA_1 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系,设正方体的棱长为 1,则 A_1(0,0,1),$E\left(1,0,\frac{1}{2}\right)$,D(0,1,0),

∴$\overrightarrow{A_1D}$=(0,1,-1),$\overrightarrow{A_1E}=\left(1,0,-\frac{1}{2}\right)$.



设平面 A_1ED 的法向量为 n_1=(x,y,z),则有$\begin{cases}\overrightarrow{A_1D}\cdot n_1=0,\\ \overrightarrow{A_1E}\cdot n_1=0,\end{cases}$即$\begin{cases}y-z=0,\\ x-\frac{1}{2}z=0,\end{cases}$令 x=1,得$\begin{cases}y=2,\\ z=2,\end{cases}$

∴n_1=(1,2,2).

易得平面 ABCD 的一个法向量 $n_2=\overrightarrow{AA_1}$=(0,0,1),∴$|\cos\langle n_1,n_2\rangle|=\frac{2}{3\times1}=\frac{2}{3}$,