

2022-2023 学年山东省东营市高二（下）期末数学试卷

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求.

- $(x - \frac{1}{x})(a + y)^6$ 的展开式中，含 $x^{-1}y^4$ 项的系数为 -15，则 $a =$ ()
A. 1 B. -1 C. ± 1 D. ± 2
- 已知 a 为实数，函数 $f(x) = 3x^3 + 2ax^2 + (2+a)x$ 的导函数为 $f'(x)$ ，且 $f'(x)$ 是偶函数，则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 ()
A. $11x - y - 6 = 0$ B. $9x + y - 6 = 0$
C. $5x - 11y + 2 = 0$ D. $6x + 5y - 11 = 0$
- 现有两筐排球，甲筐中有 10 个白色球、5 个红色球，乙筐中有 4 个黄色球、6 个红色球、5 个黑色球. 某排球运动员练习发球时，在甲筐取球的概率为 0.6，在乙筐取球的概率为 0.4. 若该运动员从这两筐球中任取一个排球，则取到红色排球的概率为 ()
A. 0.73 B. 0.36 C. 0.32 D. 0.28
- 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，则 “ $q > 1$ ” 是 “数列 $\{a_n\}$ 为递增数列” 的 ()
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
- 国内现存两件国宝级文物——战国宴乐水陆攻战纹铜壶，分别藏于故宫博物院与四川博物馆. 铜壶上的图像采用“嵌错”制作工艺，铜壶身上的三圈纹饰，将壶身分为四层. 假设第一层与第二层分别看作圆柱与圆台，且圆柱与圆台的高之比为 $\frac{3}{2}$ ，其正视图如图 2 所示，根据正视图，可得圆柱与圆台这两个几何体的体积之比为 () (注： $V_{\text{圆台}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h(R^2 + r^2 + Rr)$)



图1

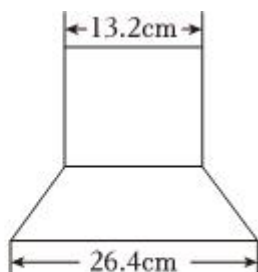


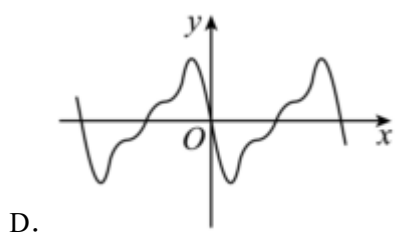
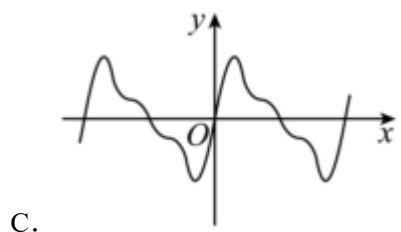
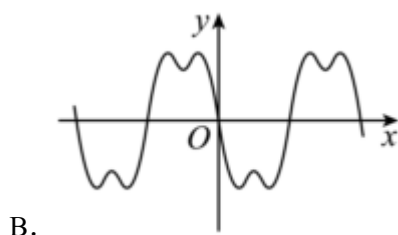
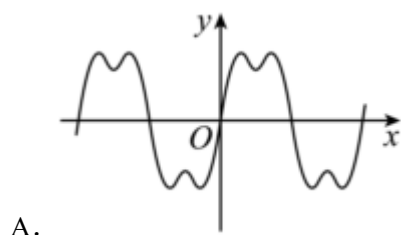
图1

- $\frac{3}{14}$ B. $\frac{9}{14}$ C. $\frac{3}{10}$ D. $\frac{9}{10}$
- 若函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导，且 $f(x) > f'(x)$ ，则当 $a > b$ 时，下列不等式成立的是 ()
A. $e^a f(a) > e^b f(b)$ B. $e^b f(a) > e^a f(b)$

C. $e^bf(b) > e^af(a)$

D. $e^af(b) > e^bf(a)$

7. 数学与音乐有着紧密的关联. 声音中也包含正弦函数, 声音是由于物体的振动产生的能引起听觉的波, 每一个音都是由纯音合成的. 纯音的数学模型是函数 $y = A\sin\omega x$, 我们平时听到的音乐一般不是纯音, 而是有多种波叠加而成的复合音. 已知刻画某复合音的函数为 $\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$, 则其部分图象大致为 ()



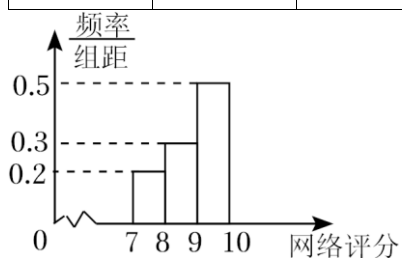
8. 古印度数学家婆什伽罗在《丽拉沃蒂》一书中提出如下问题: 某人给一个人布施, 初日施 2 子安贝 (古印度货币单位), 以后逐日倍增, 问一月共施几何? 在这个问题中, 以一个月 31 天计算, 记此人第 n 日布施了 a_n 子安贝 (其中 $1 \leq n \leq 31, n \in \mathbb{N}^*$), 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若关于 n 的不等式 $a_{n+1}^2 + 256 \geq (S_n + 2)(t + 5)$ 恒成立, 则实数 t 的最大值为 ()
- A. 15 B. 20 C. 24 D. 27

二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对得 2 分, 有选错的得 0 分.

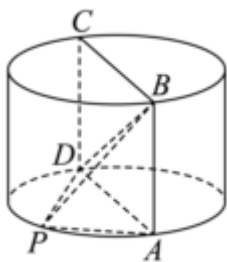
9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 1$, 且 $a_{n+1} = 2a_n + 1$, 满足下列结论正确的是 ()
- A. 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列 B. 数列 $\{a_n + 1\}$ 是等比数列
- C. $a_n = 2^n - 1$ D. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和 $S_n = 2^n - n$
10. 某中学在学校艺术节举行“三独”比赛 (独唱、独奏、独舞), 由于疫情防控原因, 比赛现场只有 9 名教师评委给每位参赛选手评分, 全校 4000 名学生通过在线直播观看并网络评分, 比赛评分采取 10 分制. 某选手比赛后, 现场 9 名教师原始评分中去掉一个最高分和一个最低分, 得到 7 个有效评分如表. 对学生网络评分按 $[7, 8)$, $[8, 9)$, $[9, 10]$ 分成三组, 其频率分布直方图如图所示. 则下列说法正确的是 ()

教师评委	A	B	C	D	E	F	G
------	---	---	---	---	---	---	---

有效评分	9.6	9.1	9.4	8.9	9.2	9.3	9.5
------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----



- A. 现场教师评委 7 个有效评分与 9 个原始评分的中位数相同
- B. 估计全校有 1200 名学生的网络评分在区间 $[8, 9)$ 内
- C. 在去掉最高分和最低分之前, 9 名教师评委原始评分的极差一定大于 0.7
- D. 从学生观众中随机抽取 10 人, 用频率估计概率, X 表示评分不小于 9 分的人数, 则 $E(X) = 5$
11. 如图, 边长为 4 的正方形 $ABCD$ 是圆柱的轴截面, 点 P 为圆弧 $\widehat{AD}$ 上一动点 (点 P 与点 A, D 不重合) $\widehat{AP} = \lambda \widehat{AD}$ ($0 < \lambda < 1$), 则 ()



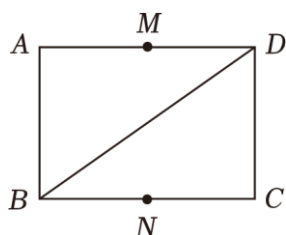
- A. 存在 λ 值, 使得 $AD \perp BP$
- B. 三棱锥 $P-ABD$ 体积的最大值为 $\frac{16}{3}$
- C. 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, 异面直线 PB 与 AD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$
- D. 当直线 PB 与平面 $ABCD$ 所成角最大时, 平面 PAB 截四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的截面面积为 $4\sqrt{2}\pi$
12. 已知函数 $f(x)$ 满足: ① $f(a+x)$ 为偶函数; ② $f(c+x) + f(c-x) = 2d$, $a \neq c$. $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, 则下列结论正确的是 ()
- A. $f'(x)$ 关于 $x=c$ 对称
- B. $f(2x)$ 的一个周期为 $2|c-a|$
- C. $f(f(x))$ 不关于 (c, d) 对称
- D. $f(f(x))$ 关于 $x=a$ 对称

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 其中第 16 题第一空 2 分, 第二空 3 分.

13. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_7 - a_5 + 8 = a_9$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 13 项的和为_____.
14. 若 $X \sim N(1, \sigma^2)$, 且 $P(X \leq a) + P(X \leq \frac{a-1}{2}) = 1$, 则 $a =$ _____.

15. 已知：若函数 $f(x)$, $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导, $f(x) = g(x)$, 则 $f'(x) = g'(x)$. 又英国数学家泰勒发现了一个恒等式 $e^{2x} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$, 则 $a_0 =$ _____, $\sum_{n=1}^{10} \frac{a_{n+1}}{na_n} =$ _____.

16. 如图, 一张 A4 纸的长 $AD = 2\sqrt{2}a$, 宽 $AB = 2a$, M , N 分别是 AD , BC 的中点. 现将 $\triangle ABD$ 沿 BD 折起, 得到以 A, B, C, D 为顶点的三棱锥, 则三棱锥与 $A - BCD$ 的外接球 O 的半径为 _____; 在翻折的过程中, 直线 MN 被球 O 截得的线段长的取值范围是 _____.



四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 已知正项数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$, 且 $\{b_n\}$ 为等比数列, $a_{n+1}^2 - 2a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$, $a_1 = b_1 = 1$, _____.

从条件① $\{b_n\}$ 的前 3 项和 $S_3 = 7$. ② $b_4 = (a_1 + a_2)b_2$. ③ $b_2 \cdot b_4 = 16$. 任选一个补充在上面问题中, 并解答下列问题:

(1) 求证: 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列;

(2) 求数列 $\{a_nb_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

(如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分).

18. (12 分) 2021 年 4 月 7 日, “学习强国”上线“强国医生”功能, 提供智能导诊、疾病自查、疾病百科、健康宣传等多种医疗健康服务.

(1) 为了解“强国医生”的使用次数多少与性别之间的关系, 某调查机构调研了 200 名“强国医生”的使用者得到表中数据, 根据所给数据完成上述表格, 并判断是否有 99.9% 的把握认为“强国医生”的使用次数与性别有关;

	男	女	总计
使用次数多	40		
使用次数少		30	
总计	90		200

(2) 该机构统计了“强国医生”上线 7 天内每天使用该服务的女性人数, “强国医生”上线的第 x 天, 每天使用“强国医生”的女性人数为 y , 得到以下数据:

x	1	2	3	4	5	6	7
-----	---	---	---	---	---	---	---

y	6	11	21	34	66	100	195
-----	---	----	----	----	----	-----	-----

通过观察散点图发现样本点集中于某一条曲线 $y=a\bullet b^x$ 的周围，求 y 关于 x 的回归方程，并预测“强国医生”上线第 12 天使用该服务的女性人数.

附：随机变量 $\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ， $n=a+b+c+d$.

$P\left(\chi^2\geqslant k_0\right)$	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
k_0	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828
$\overline{y}$	$\overline{z}$	$\sum_{i=1}^7x_iz_i$	$\sum_{i=1}^7x_iy_i$	$10^{0.6}$	
61.9	1.6	51.8	2522	3.98	

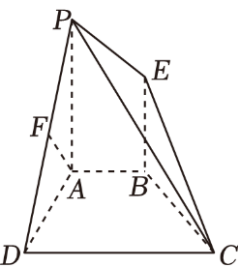
其中 $z_i=\lg y_i$.

参考公式：对于一组数据 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$ ，其回归直线 $\hat{y}=\hat{c}+\hat{d}x$ 的斜率和截距的最

小二乘估计公式分别为 $\hat{d}=\frac{\sum_{i=1}^n(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^n(x_i-\overline{x})^2}$ ， $\hat{c}=\overline{y}-\hat{d}\overline{x}$.

19.（12 分）如图，已知六面体 $ABCDPE$ 的面 $ABCD$ 为梯形， $AB\parallel CD$ ， $AB\perp AD$ ， $AB=2$ ， $CD=AD=4$ ，棱 $PA\perp$ 平面 $ABCD$ ， $PA\parallel BE$ ， $PA=4$ ， $BE=2$ ， F 为 PD 的中点.

- （1）求证： $AF\parallel$ 平面 PBC ；
- （2）求直线 BE 与平面 PCD 所成角的大小.



20.（12 分）某公司生产一种大件产品的日产为 2 件，每件产品质量为一等的概率为 0.5，二等的概率为 0.4，若达不到一、二级，则为不合格，且生产两件产品品质结果相互独立. 已知生产一件产品的利润如表：

等级	一等	二等	三等
利润（万元/每件）	0.8	0.6	- 0.3

- （1）求生产两件产品中至少有一件一等品的概率；

(2) 求该公司每天所获利润 ξ (万元) 的数学期望;

(3) 若该工厂要增加日产能, 公司工厂需引入设备及更新技术, 但增加 n 件产能, 其成本也将相应提升 $n - \ln n$ (万元), 假如你作为工厂决策者, 你觉得该厂目前该不该增产? 请回答, 并说明理由. ($\ln 2 \approx 0.69$, $\ln 3 \approx 1.1$)

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = ax \ln x - 2x$.

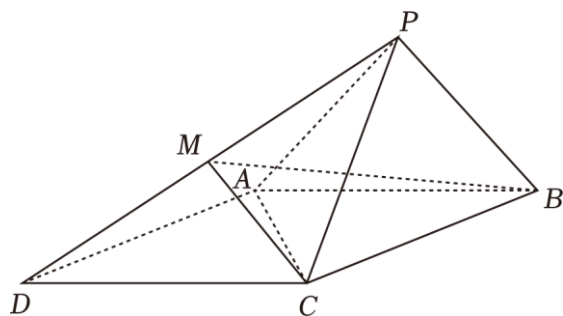
(1) 若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值, 求 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上的值域;

(2) 若函数 $h(x) = \frac{f(x)}{x} - x^2 + 2$ 有 1 个零点, 求 a 的取值范围.

22. (12 分) 如图, 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为菱形, 且 $\angle ABC = 60^\circ$, $AB = PC = 2$, $PA = PB = \sqrt{2}$. M 是棱 PD 上的点, 且四面体 $MPBC$ 的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

(1) 证明: $PM = MD$;

(2) 若过点 C, M 的平面 α 与 BD 平行, 且交 PA 于点 Q , 求平面 BCQ 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值.



2022-2023 学年山东省东营市高二（下）期末数学试卷

参考答案与试题解析

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求.

1. $(x - \frac{1}{x})(a + y)^6$ 的展开式中，含 $x^{-1}y^4$ 项的系数为 -15，则 $a =$ ()

- A. 1 B. -1 C. ± 1 D. ± 2

解： $(a+y)^6$ 的展开式的通项公式为 $C_6^r a^{6-r} y^r$,

令 $r=4$ ，可得 $C_6^r a^{6-r} y^r = 15a^2 y^4$,

所以含 $x^{-1}y^4$ 项的系数为 $-15a^2$,

即 $-15a^2 = -15$ ，解得 $a = \pm 1$.

故选：C.

2. 已知 a 为实数，函数 $f(x) = 3x^3 + 2ax^2 + (2+a)x$ 的导函数为 $f'(x)$ ，且 $f'(x)$ 是偶函数，则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 ()

- A. $11x - y - 6 = 0$ B. $9x + y - 6 = 0$
C. $5x - 11y + 2 = 0$ D. $6x + 5y - 11 = 0$

解： $\because$ 由已知可得 $f'(x) = 9x^2 + 4ax + 2 + a$ 是偶函数，

$\therefore f'(-x) = 9x^2 - 4ax + 2 + a = 9x^2 + 4ax + 2 + a = f'(x)$,

解得 $a = 0$ ，故 $f'(x) = 9x^2 + 2$ ， $f(x) = 3x^3 + 2x$ ，

$\therefore f(1) = 5$ ， $f'(1) = 11$ ，

故曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - 5 = 11(x - 1)$.

即 $11x - y - 6 = 0$.

故选：A.

3. 现有两筐排球，甲筐中有 10 个白色球、5 个红色球，乙筐中有 4 个黄色球、6 个红色球、5 个黑色球. 某排球运动员练习发球时，在甲筐取球的概率为 0.6，在乙筐取球的概率为 0.4. 若该运动员从这两筐球中任取一个排球，则取到红色排球的概率为 ()

- A. 0.73 B. 0.36 C. 0.32 D. 0.28

解：设事件 $A =$ “运动员从这两筐球中任取一个排球，则取到红色排球”，

事件 $B =$ “运动员从甲筐球中取球”，事件 $C =$ “运动员从乙筐球中取球”，

由题意可得 $P(A|B) = \frac{5}{10+5} = \frac{1}{3}$ ， $P(B) = 0.6$ ， $P(A|C) = \frac{6}{4+6+5} = \frac{2}{5}$ ，

$P(C) = 0.4$ ，由全概率公式可得

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|C)P(C) = \frac{1}{3} \times 0.6 + \frac{2}{5} \times 0.4 = 0.36.$$

故选：B.

4. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，则“ $q > 1$ ”是“数列 $\{a_n\}$ 为递增数列”的（ ）

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

解：等比数列 $-1, -2, -4, \dots$ ，满足公比 $q = 2 > 1$ ，但 $\{a_n\}$ 不是递增数列，充分性不成立.

若 $a_n = -1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 为递增数列，但 $q = \frac{1}{2} > 1$ 不成立，即必要性不成立，

故“ $q > 1$ ”是“ $\{a_n\}$ 为递增数列”的既不充分也不必要条件，

故选：D.

5. 国内现存两件国宝级文物——战国宴乐水陆攻战纹铜壶，分别藏于故宫博物院与四川博物馆. 铜壶上的图像采用“嵌错”制作工艺，铜壶身上的三圈纹饰，将壶身分为四层. 假设第一层与第二层分别看作圆柱与圆台，且圆柱与圆台的高之比为 $\frac{3}{2}$ ，其正视图如图2所示，根据正视图，可得圆柱与圆台这两个几何体的体积之比为（ ）（注： $V_{\text{圆台}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h(R^2 + r^2 + Rr)$ ）



图1

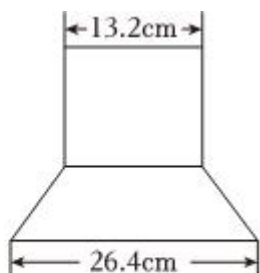


图1

- A. $\frac{3}{14}$
- B. $\frac{9}{14}$
- C. $\frac{3}{10}$
- D. $\frac{9}{10}$

解：由题意知：圆柱的底面直径为 13.2cm ，设高为 $3t\text{cm}$ ；

圆台的上下底面直径分别为 13.2cm 和 26.4cm ，圆柱与圆台的高之比为 $\frac{3}{2}$ ，则高为 $2t(\text{cm})$ ，

$\therefore$ 圆柱的体积 $V_1 = \pi \times 6.6^2 \times 3t = 130.68t\pi(\text{cm}^3)$ ；

圆台的体积 $V_2 = \frac{1}{3}(\pi \times 6.6^2 + \sqrt{\pi \times 6.6^2 \times \pi \times 13.2^2} + \pi \times 13.2^2) \times 2t \approx 203.28t\pi(\text{cm}^3)$ ，

$\therefore$ 圆柱与圆台这两个几何体的体积之比为 $\frac{V_1}{V_2} = \frac{130.68t\pi}{203.28t\pi} = \frac{9}{14}$.

故选：B.

6. 若函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导，且 $f(x) > f'(x)$ ，则当 $a > b$ 时，下列不等式成立的是（ ）

- A. $e^a f(a) > e^b f(b)$ B. $e^b f(a) > e^a f(b)$
C. $e^b f(b) > e^a f(a)$ D. $e^a f(b) > e^b f(a)$

解：令 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ ，则 $g'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$ ；

$$\because f(x) > f'(x),$$

$$\therefore \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} < 0,$$

$$\therefore g(x) = \frac{f(x)}{e^x} \text{ 在 } \mathbf{R} \text{ 上是减函数,}$$

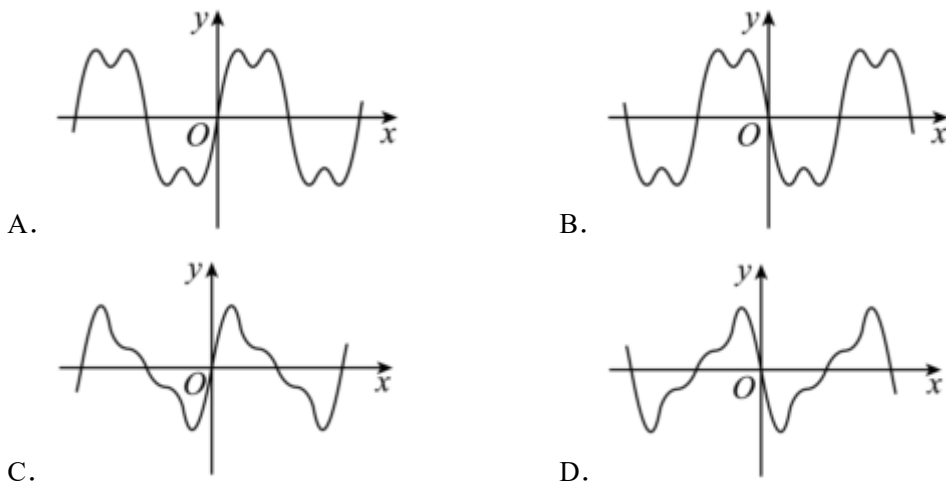
$$\text{又 } \because a > b,$$

$$\therefore \frac{f(a)}{e^a} < \frac{f(b)}{e^b};$$

$$\text{故 } e^a f(b) > e^b f(a),$$

故选：D.

7. 数学与音乐有着紧密的关联. 声音中也包含正弦函数, 声音是由于物体的振动产生的能引起听觉的波, 每一个音都是由纯音合成的. 纯音的数学模型是函数 $y = A \sin \omega x$, 我们平时听到的音乐一般不是纯音, 而是有多种波叠加而成的复合音. 已知刻画某复合音的函数为 $\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$, 则其部分图象大致为（ ）



$$\text{解: 令 } y = f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x,$$

$$\text{则 } f'(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$$

$$= \cos x (1 - 2 \sin^2 x) + \cos 2x (1 + \cos x) = (1 + 2 \cos x) \cos 2x,$$

当 $x \in [0, \pi]$ 时, 由 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}$,

当 $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3})$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4})$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (\frac{3\pi}{4}, \pi)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

所以当 $x = \frac{2\pi}{3}$ 时, $f(x)$ 取极小值, 当 $x = \frac{\pi}{4}$ 和 $x = \frac{3\pi}{4}$ 时, $f(x)$ 取极大值,

由于 $f(0) = 0$, $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2}$, $f(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $f(\frac{3\pi}{4}) = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} > 0$, $f(\pi) = 0$,

可得 $f(\frac{\pi}{4}) > f(\frac{3\pi}{4})$, 当 $x \in (0, \pi)$ 时, $f(x) > 0$,

结合图象, 只有 C 选项满足.

故选: C.

8. 古印度数学家婆什伽罗在《丽拉沃蒂》一书中提出如下问题: 某人给一个人布施, 初日施 2 子安贝 (古印度货币单位), 以后逐日倍增, 问一月共施几何? 在这个问题中, 以一个月 31 天计算, 记此人第 n 日布施了 a_n 子安贝 (其中 $1 \leq n \leq 31$, $n \in \mathbf{N}^*$), 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若关于 n 的不等式 $a_{n+1}^2 + 256 \geq (S_n + 2)(t + 5)$ 恒成立, 则实数 t 的最大值为 ()

A. 15

B. 20

C. 24

D. 27

解: 因为数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列,

故 $a_n = 2^n (1 \leq n \leq 31, n \in \mathbf{N}^*)$, 所以 $S_n = \frac{2(1-2^n)}{1-2} = 2^{n+1} - 2$.

由 $a_{n+1}^2 + 256 \geq (S_n + 2)(t + 5)$, 得 $2^{2n+2} + 256 \geq (t+5) \cdot 2^{n+1}$,

整理得 $t \leq \frac{256}{2^{n+1}} + 2^{n+1} - 5$ 对任意 $1 \leq n \leq 31$, 且 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立,

又 $\frac{256}{2^{n+1}} + 2^{n+1} - 5 \geq 2\sqrt{\frac{256}{2^{n+1}} \cdot 2^{n+1}} - 5 = 27$,

当且仅当 $2^{n+1} = 16$, 即 $n = 3$ 时等号成立,

所以 $t \leq 27$, 即实数 t 的最大值为 27.

故选: D.

二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$ ，且 $a_{n+1}=2a_n+1$ ，满足下列结论正确的是（ ）

- A. 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列
B. 数列 $\{a_n+1\}$ 是等比数列
C. $a_n = 2^n - 1$
D. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和 $S_n = 2^n - n$

解：由题意数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$ ，且满足 $a_{n+1}=2a_n+1$ ，则 $a_2=3$ ， $a_3=7$ ，

则 $\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{a_3}{a_2}$ ，故数列 $\{a_n\}$ 不是等比数列， A 错误；

由 $a_{n+1}=2a_n+1$ 得 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$ ， $a_n+1 \neq 0$ ，否则与 $a_1=1$ 矛盾，

则 $\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1} = 2$ ，则数列 $\{a_n+1\}$ 是等比数列， B 正确；

由 B 分析知数列 $\{a_n+1\}$ 是等比数列，首项为 $a_1+1=2$ ，公比为 $q=2$ ，

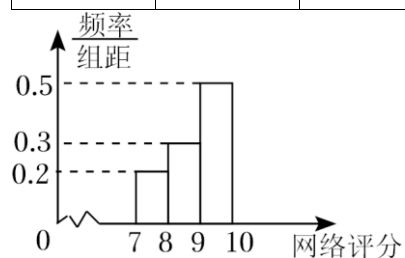
则 $a_n+1 = 2 \times 2^{n-1}$ ，所以 $a_n = 2^n - 1$ ， C 正确；

数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 $(2^1 - 1) + (2^2 - 1) + \cdots + (2^n - 1) = \frac{2(1-2^n)}{1-2} - n = 2^{n+1} - n - 2$ ， D 错误。

故选： BC 。

10. 某中学在学校艺术节举行“三独”比赛（独唱、独奏、独舞），由于疫情防控原因，比赛现场只有9名教师评委给每位参赛选手评分，全校4000名学生通过在线直播观看并网络评分，比赛评分采取10分制。某选手比赛后，现场9名教师原始评分中去掉一个最高分和一个最低分，得到7个有效评分如表。对学生网络评分按 $[7, 8)$ ， $[8, 9)$ ， $[9, 10]$ 分成三组，其频率分布直方图如图所示。则下列说法正确的是（ ）

教师评委	A	B	C	D	E	F	G
有效评分	9.6	9.1	9.4	8.9	9.2	9.3	9.5



- A. 现场教师评委7个有效评分与9个原始评分的中位数相同
B. 估计全校有1200名学生的网络评分在区间 $[8, 9)$ 内
C. 在去掉最高分和最低分之前，9名教师评委原始评分的极差一定大于0.7
D. 从学生观众中随机抽取10人，用频率估计概率， X 表示评分不小于9分的人数，则 $E(X) = 5$

解：对于 A ，由中位数的定义得：现场教师评委7个有效评分与9个原始评分的中位数相同，故 A 正确；

对于 B ，估计全校有 $4000 \times 0.3 = 1200$ 名学生的网络评分在区间 $[8, 9)$ 内，故 B 正确；

对于 C ，在去掉最高分和最低分之前，9 名教师评委原始评分的极差一定大于等于 $9.6 - 8.9 = 0.7$ ，故 C 错误；

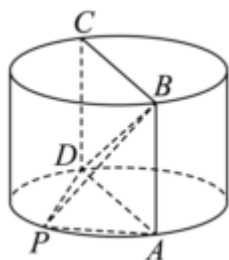
对于 D ，由频率分布直方图得频率不小于 9 分的频率为 0.5，

从学生观众中随机抽取 10 人，用频率估计概率， X 表示评分不小于 9 分的人数，

则 $E(X) = 10 \times 0.5 = 5$ ，故 D 正确。

故选：ABD。

11. 如图，边长为 4 的正方形 $ABCD$ 是圆柱的轴截面，点 P 为圆弧 $\widehat{AD}$ 上一动点（点 P 与点 A, D 不重合）
 $\widehat{AP} = \lambda \widehat{AD}$ ($0 < \lambda < 1$)，则 ()



A. 存在 λ 值，使得 $AD \perp BP$

B. 三棱锥 $P - ABD$ 体积的最大值为 $\frac{16}{3}$

C. 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时，异面直线 PB 与 AD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$

D. 当直线 PB 与平面 $ABCD$ 所成角最大时，平面 PAB 截四棱锥 $P - ABCD$ 外接球的截面面积为 $4\sqrt{2}\pi$

解：对于 A ，由已知得 $AD \perp AB$ ，

若 $AD \perp BP$ ，又 $AB \cap BP = B$ ， $\therefore AD \perp$ 平面 BAP ，而 $AP \subset$ 平面 BAP ，得 $AD \perp AP$ ，此时显然不成立，故 A 错误；

对于 B ，在三棱锥 $P - ABD$ 中， $AB \perp$ 面 APD ，则 AB 是三棱锥 $B - PAD$ 的高，

当点 P 是半圆弧 AD 的中点时，三棱锥 $B - PAD$ 的底面积 $S_{\triangle PAD}$ 取得最大值，

$\therefore$ 三棱锥 $P - ABD$ 的体积取得最大值为 $\frac{1}{3} \times 4 \times \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{4}{2} = \frac{16}{3}$ ，故 B 正确；

对于 C ，当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时，则 P 为线段 AD 的中点，

以 AD 的中点 E 为原点，分别以 EP, EA 为 x, y 轴，建立空间直角坐标系，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/755341011343011210>