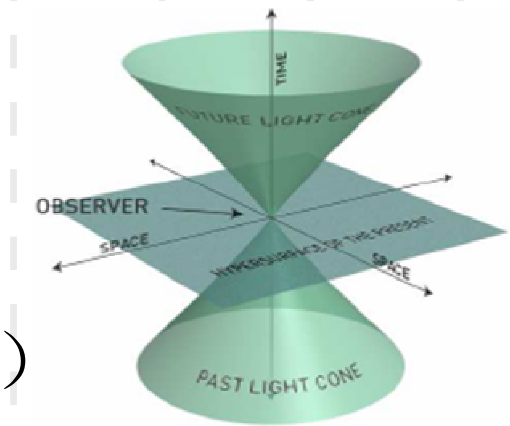
关于空间曲线曲率和挠率的介绍

微分几何的应用

- 理论物理
  - 广义相对论将物理量解释为几何量。具体的说，空间和时间结合在一起由一个流形描述：不同的参照系给出不同的局部坐标；不同参照系之间的关系即是坐标变换。时空流形的度量由所谓Lorentz度量给出，象Riemann几何一样计算出曲率等几何量。
  - Einstein方程说：

时空的物理量（能量动量张量）

等于时空的几何量（Ricci曲率张量）



1. 空间曲线的基本三棱形、伏雷内标架

1) 给出C^2 类曲线 $\vec{r}=\vec{r}(s)$得一单位向量 $\vec{\alpha}=\vec{r}'=\dfrac{d\vec{r}}{ds}$ ，

称 $\vec{\alpha}=\vec{r}'=\dfrac{d\vec{r}}{ds}$ 为 曲线（C）上 P 点的**单位切向量**。

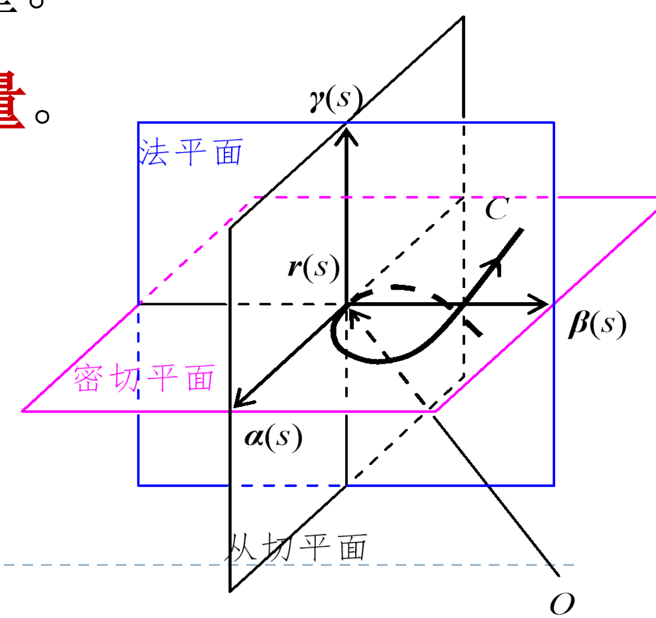
称 $\vec{\beta}=\dfrac{\vec{\alpha}'}{\|\vec{\alpha}'\|}=\dfrac{\vec{r}''}{\|\vec{r}''\|}$ 为曲线在 P 点的**主法向量**,

它垂直于单位切向量。

称 $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$ 为曲线在 P 点的**次法向量**。

把两两正交的单位向量 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 称为

曲线在 P 点的伏雷内（*Frenet*)标架。

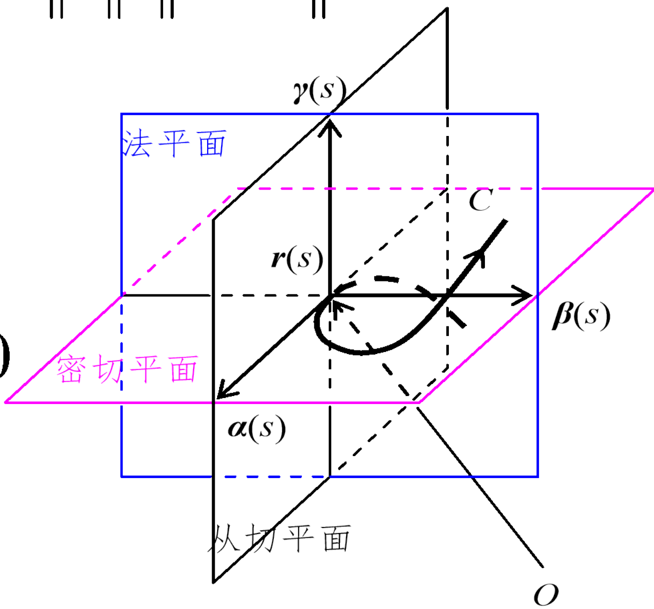


2)　对于曲线（C）的一般参数表示 $\vec{r}=\vec{r}(t)$, 有

$$\vec{\alpha}=\frac{\dot{\vec{r}}}{\left\|\dot{\vec{r}}\right\|},\quad \vec{\gamma}=\frac{\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}}{\left\|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}\right\|},\quad \vec{\beta}=\vec{\gamma}\times\vec{\alpha}=\frac{\left\|\dot{\vec{r}}\right\|^{2}\ddot{\vec{r}}-(\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}})\dot{\vec{r}}}{\left\|\dot{\vec{r}}\right\|\cdot\left\|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}\right\|}$$

3)由任意两个基本向量所确定的平面

分别叫做:



密切平面：　$(\vec{R}-\vec{r})\cdot\vec{\gamma}=0\quad(\vec{R}-\vec{r},\vec{\alpha},\vec{\beta})=0$

法平面：　$(\vec{R}-\vec{r})\cdot\vec{\alpha}=0$

从切平面：　$(\vec{R}-\vec{r})\cdot\vec{\beta}=0$

而由三个基本向量和上面三个平面所构成的图形叫做曲线的基本三棱形。

4）伏雷内（*Frenet*)公式

由定义可得 $\vec{\gamma}' = -\tau(s)\vec{\beta}$

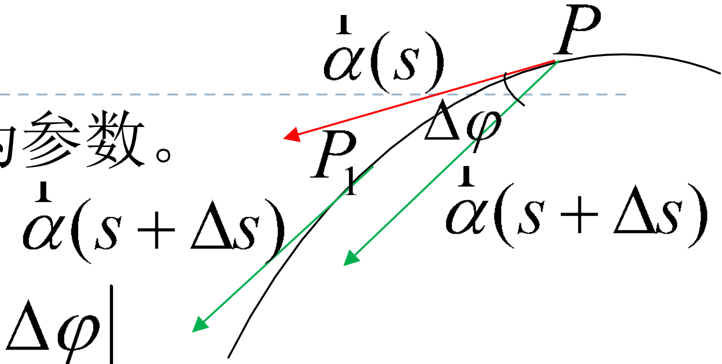
又$\vec{\beta}' = (\vec{\gamma}\times\vec{\alpha})' = \vec{\gamma}'\times\vec{\alpha}+\vec{\gamma}\times\vec{\alpha}' = -\tau(s)\vec{\beta}\times\vec{\alpha}+\vec{\gamma}\times k(s)\vec{\beta}$

$= -k(s)\vec{\alpha}+\tau(s)\vec{\gamma}$

于是有 $$\begin{cases} \vec{\alpha}' = k(s)\vec{\beta} \\ \vec{\beta}' = -k(s)\vec{\alpha}+\tau(s)\vec{\gamma} \\ \vec{\gamma}' = -\tau(s)\vec{\beta} \end{cases}$$

这个公式称为空间曲线的**伏雷内（*Frenet*)公式**。它的系数组成一反称方阵 $$\begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix}$$

2. 空间曲线的曲率，挠率



1）曲率设空间曲线(C)为 C^3的，且以 s 为参数。

定义（C）在 P 点的曲率为 $\kappa(s)=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$

Δs 越小 $\left|\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$ 就越接近曲线在P点的弯曲程度,进一步令$\Delta s\to 0$

则 $\left|\dfrac{\Delta\ \varphi}{\Delta\ s}\right|$ 的极限就应该是曲线在P点的弯曲程度。

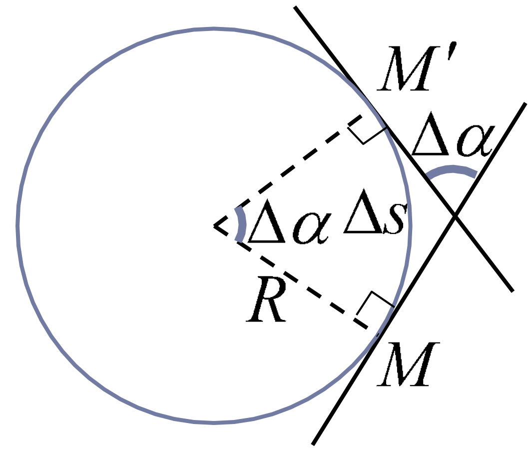
曲率的几何意义是曲线的切向量对于弧长的旋转速度。

曲率越大，曲线的弯曲程度就越大，因此它反映了曲线的弯曲程度。

例. 求半径为R 的圆上任意点处的曲率

.

解: 如图所示，



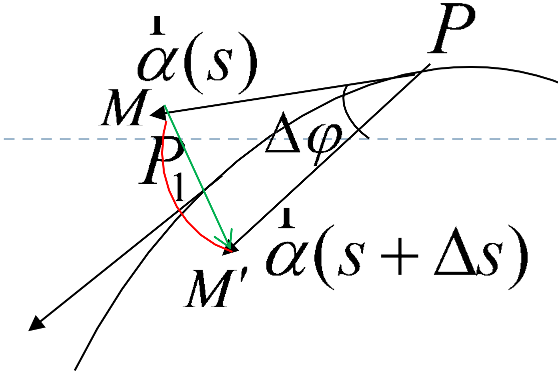
$$\Delta s = R\Delta\alpha$$

$$\therefore \quad \kappa = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right| = \frac{1}{R}$$

可见: R 愈小, 则K 愈大，圆弧弯曲得愈厉害；

R 愈大, 则K 愈小，圆弧弯曲得愈小 .

$$\kappa(s)=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|=\left\|\vec{\alpha}'\right\|=\left\|\vec{r}''\right\|$$



$$\because\ \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\Delta\varphi\cdot 1|}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|}{\Delta s}\frac{MM'}{\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|}$$

$$=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\left\|\vec{\alpha}(s+\Delta s)-\vec{\alpha}(s)\right\|}{\Delta s}\frac{MM'}{\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\left\|\vec{\alpha}(s+\Delta s)-\vec{\alpha}(s)\right\|}{\Delta s}$$

$$=\left\|\vec{\alpha}'(s)\right\|$$

$$\therefore\ \kappa(s)=\left\|\vec{\alpha}'(s)\right\|=\left\|\vec{r}''\right\|=\left\|\vec{r}''\times\vec{r}'\right\|$$

例： 空间曲线 $\vec{r}=\vec{r}(s)$ 为直线的充要条件是曲率 $\kappa(s)=0$

证明：若为直线 $\vec{r}=s\vec{a}+\vec{b}$，其中 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 都是常向量，$\|\vec{a}\|=1$

并且 $\kappa(s)=\|\vec{r}''\|=\|\vec{a}'\|=0$

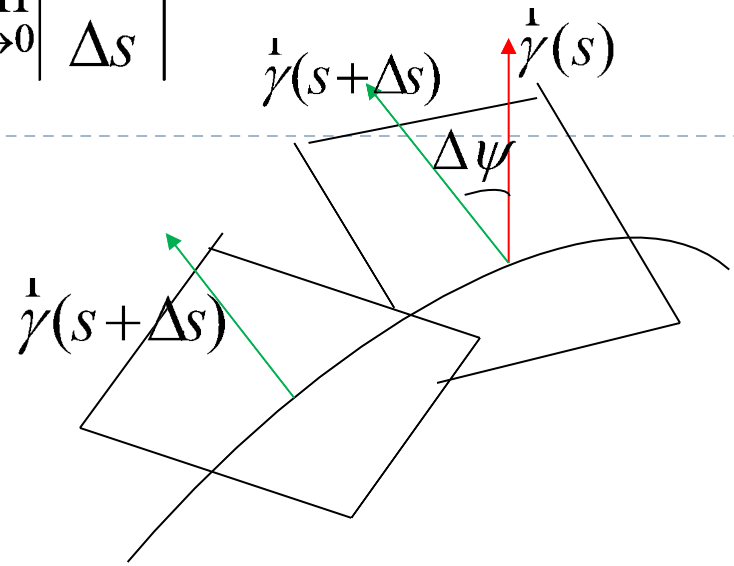
反之，若 $\kappa(s)=0$，则 $\kappa(s)=\|\vec{r}''\|=0$

于是 $\vec{r}=s\vec{a}+\vec{b}$

所以该曲线是直线.

2)挠率

与曲率类似有 $\|\vec{\gamma}'\| = \lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\dfrac{\Delta\psi}{\Delta s}\right|$



$$\vec{\beta} = \frac{\vec{r}''}{\|\vec{r}''\|} = \frac{\vec{\alpha}'}{\|\vec{\alpha}'\|} = \frac{\vec{\alpha}'}{k(s)}$$

$$\vec{\alpha}' = k(s)\vec{\beta}\ ,$$

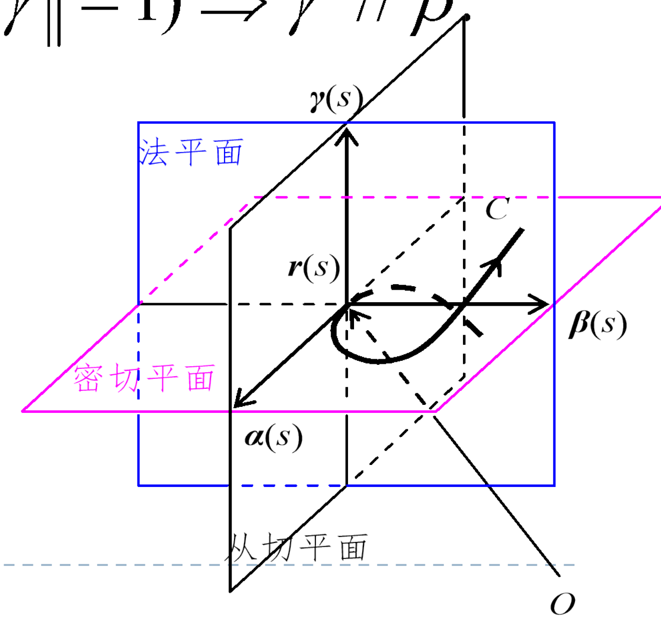
$$\vec{\gamma}' = (\vec{\alpha}\times\vec{\beta})'$$

$$= k(s)\vec{\beta}\times\vec{\beta} + \vec{\alpha}\times\vec{\beta}'$$

$$= \vec{\alpha}\times\vec{\beta}' \qquad \Rightarrow \vec{\gamma}'\perp\vec{\alpha}\ ,\vec{\gamma}\perp\vec{\gamma}'.(\|\vec{\gamma}\|=1) \Rightarrow \vec{\gamma}' \,//\, \vec{\beta}$$

定义 曲线（C）在 P 点的挠率为

$$\tau(s) = \begin{cases} +\|\vec{\gamma}'\|, & \text{当 } \vec{\gamma}' \text{和 } \vec{\beta} \text{ 异向} \\ -\|\vec{\gamma}'\|, & \text{当 } \vec{\gamma}' \text{和 } \vec{\beta} \text{ 同向} \end{cases}$$



挠率的绝对值是曲线的次法向量对于弧长的旋转速度。挠率恒为零的曲线是平面曲线