



# 4.3.1 等比数列的 概念

# 复习引入

## 1. 等比数列

符号语言:  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q (n \in N^*)$  或  $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q (n \geq 2, n \in N^*)$

## 2. 通项公式

$$a_n = a_1 q^{n-1} \rightarrow a_n = a_m q^{n-m}$$

## 3. 等比中项

$$a, G, b \text{ 成等比数列} \rightarrow \underline{G^2 = a \cdot b, \text{ 即 } G = \pm \sqrt{ab}}$$

## 4. 等比数列的判断

$$\text{证明 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \text{ 或 } \frac{a_n}{a_{n-1}} = q (n \geq 2) \Rightarrow \underline{(a_n)^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

---

## 探究新知

在等差数列  $\{a_n\}$  中，公差为  $d$

(1) 若  $m+n=p+q$ ，则  $a_m+a_n=a_p+a_q$  ( $m,n,p,q \in \mathbb{N}$ )

即：下标和相等，对应项的和相等

特别地，若  $m+n=2k$ ，则

$$a_m+a_n=2a_k \quad (m,n,k \in \mathbb{N})$$

在等比数列  $\{a_n\}$  中，公比为  $q$

(1) 若  $m+n=p+q$ ，则  
 $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$  ( $m,n,p,q \in \mathbb{N}^*$ )

即：下标和相等，对应项的积相等

特别地，若  $m+n=2k$ ，则  $a_m \cdot a_n = a_k^2$  ( $m,n,k \in \mathbb{N}^*$ )

$\Leftrightarrow$  若  $m,n,k$  ( $m,n,k \in \mathbb{N}^*$ ) 成等差数列，则

$a_m, a_k, a_n$

注意：等号两侧的项数必须相同

成等比数列.

---

## 探究新知

### 等差数列:

(2) 在有穷数列中, 与首末两项“等距离”的两项之和等于首末两项的和

$$\text{即: } a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots = a_k + a_{n-k+1} = \dots$$

### 等比数列:

(2) 在有穷数列中, 与首末两项“等距离”的两项之积等于首末两项的积

$$\text{即: } a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = \dots = a_k \cdot a_{n-k+1} = \dots$$

## 小试牛刀

1. 已知  $\{a_n\}$  是一个等比数列，请在下表中的空格处填入适当的数.

$d_1$	$a_3$	$a_5$	$a_7$	9
2	4	8	16	$\pm \sqrt{2}$
50	2	0.08	0.0032	0.2

2. 已知等比数列  $\{a_n\}$  中， $a_1 a_3 = 36$ ， $a_2 + a_4 = 60$ . 求  $a_1$  和公比  $q$ .

$$a_1 = 2, q = 3 \text{ 或 } a_1 = -2, q = -3$$

## 小试牛刀

3. 已知  $\{a_n\}$  是等比数列, 且  $a_1 > 0, a_2 a_4 + 2a_3 a_5 + a_4 a_6 = 36$ ,

那么  $a_3 + a_5$  的值等于. 6

4. 设数列  $\{a_n\}$  是等比数列, 且  $a_5 \cdot a_6 = 81$ , 则

$\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \dots + \log_3 a_{10} =$  20

5. 等比数列  $\{a_n\}$  中,  $a_4 a_7 = -512, a_3 + a_8 = 124$ ,

公比为整数, 则  $a_{10} =$  512

## 典例分析

例 1 用10000元购买某个理财产品一年.

(1) 若以月利率0.400%的复利计息, 12个月能获利多少利息(精确到1元)?

(2) 若以季度复利计息, 存4个季度, 则当每季度利率为多少时, 按季结算的利息不少于按月结算的利息.(精确到 $10^{-5}$ )

	月初本金	月末本利和
1个月	104	$104(1+0.400\%)$
2个月	$104(1+0.400\%)$	$10^4(1+0.400\%)^2$
3个月	$104(1+0.400\%)^2$	$10^4(1+0.400\%)^3$
...	.	.
12个月		$10^4(1+0.400\%)^{12}$

## 典例分析

**例1** 用10000元购买某个理财产品一年.

(1) 若以月利率0.400%的复利计息, 12个月能获利多少利息(精确到1元)?

**解:** (1) 设这笔钱存 $n$ 个月以后的本利和组成一个数列 $\{a_n\}$ ,  
则 $\{a_n\}$ 是等比数列.

首项 $a_1=10^4(1+0.400\%)$ ,                  公比 $q=1+0.400\%$

所以,  $a_{12}=10^4(1+0.400\%)^{12} \approx 10490.97$

所以, 12个月后的利息为 $10490.97-10000 \approx 491$ (元)

**利息=本利和-本金**



---

## 典例分析

**例 1** 用10000元购买某个理财产品一年.

(2) 若以季度复利计息, 存4个季度, 则当每季度利率为多少时, 按季结算的利息不少于按月结算的利息. (精确到10<sup>-5</sup>)

**解** : 设季度利率为 $r$ , 这笔钱存 $n$ 个季度以后的本利和组成一个数列 $\{b_n\}$ , 则 $\{b_n\}$ 也是一个等比数列,

首项 $b_1=10^4(1+r)$ , 公比 $q=1+r$

所以,  $b_4=10^4(1+r)^4$

因此, 以季度复利计息, 存4个季度后的利息为 $[10^4(1+r)^4-10^4]$  元

解不等式 $[10^4(1+r)^4-10^4] \geq 491$ , 得  $r \geq 1.206\%$

所以, 当季度利率不小于1.206%时, 按季结算的利息不少于按月结算的利息.

---

## 典例分析

**例2** 已知数列  $\{a_n\}$  的首项  $a_1=3$ .

(1) 若数列  $\{a_n\}$  为等差数列, 公差  $d=2$ , 证明数列  $\{3^{a_n}\}$  为等比数列;

(2) 若数列  $\{a_n\}$  为等比数列, 公比  $q=\frac{1}{9}$ , 证明数列  $\{\log_3 a_n\}$  为等差数列

分析: 如何证明一个数列为等差数列或者等比数列

等差数列:  $a_{n+1}-a_n=d$

等比数列: ~~“ $a=q$ ”~~

先求通项公式

利用定义

---

证明: (1) 由  $a_1=3, d=2$ , 得  $\{a_n\}$  的通项公式为

$$a_n = 2n + 1$$

设  $b_n = 3^{a_n}$  则  $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3^{2n+3}}{3^{2n+1}} = 9$

则

所以  $\{b_n\}$  是以 27 为首项, 9 为公比的等比数列

(2) 由  $a_1 = 3, q = \frac{1}{9}$ , 得  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = 3 \times \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} = 3^{3-2n}$

两边取以 3 为底的对数, 得  $\log_3 a_n = \log_3 3^{3-2n} = 3 - 2n$

所以  $\log_3 a_{n+1} - \log_3 a_n = [3 - 2(n+1)] - (3 - 2n) = -2$

又  $\log_3 a_1 = \log_3 3 = 1$

所以  $\{\log_3 a_n\}$  是首项为 1, 公差为 -2 的等差数列

## 探究新知

**思考:** 已知  $b > 0$  且  $b \neq 1$ , 如果数列  $\{a_n\}$  是等差数列, 那么数列  $\{b^{a_n}\}$  是否一定是等比数列? 如果数列  $\{a_n\}$  是各项均为正的等比数列, 那么数列  $\{\log b^{a_n}\}$  是否一定是等差数列?

$$\underline{b = b = b}$$

性质1: 数列  $\{a_n\}$  是等差数列  
 $\Leftrightarrow$  数列  $\{b^{a_n}\}$  是等比数列.

$$\underline{\log b^{a_n} = \log b \cdot a_n}$$

性质2: 数列  $\{a_n\}$  是正项等比数列  
 $\Leftrightarrow$  数列  $\{\log b^{a_n}\}$  是等差数列.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：  
<https://d.book118.com/756152004223010141>