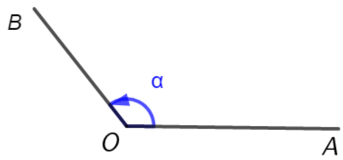
05 第五章 三角函数

目录

知识梳理

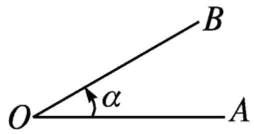
1、角的概念

角可以看成平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形

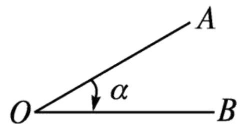


2、角的分类

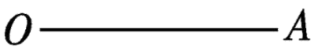
①正角:按逆时针方向旋转所形成的角.



②负角:按顺时针方向旋转所形成的角.



③零角:如果一条射线没有做任何旋转,我们称它形成了一个零角.



3、象限角

（1）**定义：**在直角坐标系中,使角的顶点与原点重合,角的始边与 x 轴的非负半轴重合.那么,角的终边在第几象限,就说这个角是第几象限角.

如果角的终边在坐标轴上,那么就认为这个角不属于任何一个象限.

（2）象限角的常用表示：

第一象限角	$\{\alpha \mid 360^{\circ}k<\alpha<360^{\circ}k+90^{\circ},k\in Z\}$
第二象限角	$\{\alpha \mid 360^{\circ}k+90^{\circ}<\alpha<360^{\circ}k+180^{\circ},k\in Z\}$
第三象限角	$\{\alpha \mid 360^{\circ}k+180^{\circ}<\alpha<360^{\circ}k+270^{\circ},k\in Z\}$ 或 $\{\alpha \mid 360^{\circ}k-180^{\circ}<\alpha<360^{\circ}k-90^{\circ},k\in Z\}$
第四象限角	$\{\alpha \mid 360^{\circ}k+270^{\circ}<\alpha<360^{\circ}k+360^{\circ},k\in Z\}$ 或 $\{\alpha \mid 360^{\circ}k-90^{\circ}<\alpha<360^{\circ}k,k\in Z\}$

4、终边相同的角的集合

所有与角 α 终边相同的角为 $\left\{\beta \mid \beta=k\cdot 360^{\circ}+\alpha，\ k\in Z\right\}$

5、弧度制

长度等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做 1 弧度角，记作 $1\,rad$ ，或 1 弧度，或 1(单位可以省略不写).

6、角度与弧度的换算

弧度与角度互换公式：$180^{\circ}=\pi rad$

$$1rad=\left(\frac{180}{\pi}\right)^{0}=57.30^{\circ}=57^{\circ}18',\quad 1^{\circ}=\frac{\pi}{180}rad$$

7、常用的角度与弧度对应表

角度制	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
弧制度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

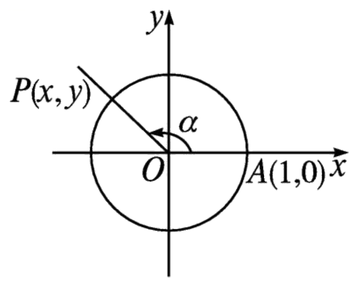
8、扇形中的弧长公式和面积公式

弧长公式：$l=|\alpha|r$（α 是圆心角的弧度数），

扇形面积公式：$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}|\alpha|r^{2}$.

9、任意角的三角函数定义

（1）单位圆定义法：



如图, 设 α 是一个任意角, $\alpha\in R$, 它的终边 OP 与单位圆相交于点 $P(x,y)$

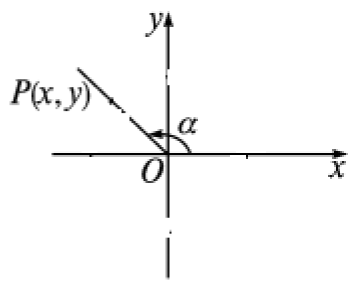
①正弦函数：把点 P 的纵坐标 y 叫做 α 的正弦函数, 记作 $\sin\alpha$, 即 $y=\sin\alpha$

②余弦函数：把点 P 的横坐标 x 叫做 α 的余弦函数, 记作 $\cos\alpha$, 即 $x=\cos\alpha$

③正切函数：把点 P 的纵坐标与横坐标的比值 $\frac{y}{x}$ 叫做 α 的正切, 记作 $\tan\alpha$, 即 $\frac{y}{x}=\tan\alpha$（$x\neq 0$）

我们将正弦函数、余弦函数和正切函数统称为三角函数

（2）终边上任意一点定义法：



在角 α 终边上任取一点 $P(x,y)$，设原点到 $P(x,y)$ 点的距离为

$r=|OP|=\sqrt{x^{2}+y^{2}}$

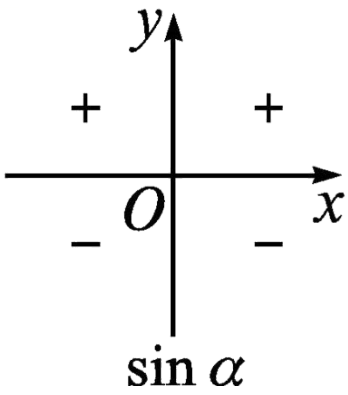
①正弦函数：$\sin\alpha=\frac{y}{r}$

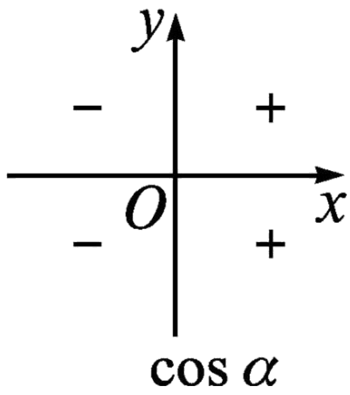
②余弦函数：$\cos\alpha=\frac{x}{r}$

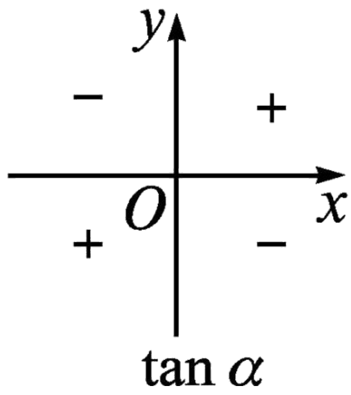
③正切函数：$\tan\alpha=\frac{y}{x}$（$x\neq 0$）

10、三角函数值在各象限的符号

$\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ 在各象限的符号如下:（口诀“一全正, 二正弦, 三正切, 四余弦”）







11、同角三角函数的基本关系

（1）平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

（2）商数关系: $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$（$\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$， $k\in Z$）

诱导公式一

①$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha$　　②$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha$

③$\tan(\alpha+2k\pi)=\tan\alpha$ 其中 $k\in Z$.

公式二

$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$　　$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$　　$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$

公式三

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$　　$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$　　$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$

公式四

$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$　　$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$　　$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$

公式五

$\sin(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$　　$\cos(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$

公式六

$\sin(\dfrac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha$　　$\cos(\dfrac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$

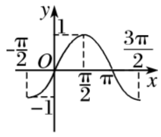
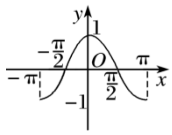
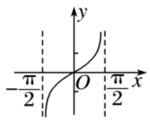
公式七

$\sin(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha)=-\cos\alpha$　　$\cos(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha)=-\sin\alpha$

公式八

$\sin(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cos\alpha$　　$\cos(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha)=\sin\alpha$

12、正弦、余弦、正切函数的图象与性质（下表中 $k\in Z$）

函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
图象			
定义域	R	R	$\{x\mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z\}$
值域	$[-1,1]$	R	R
周期性	2π	2π	π
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数
对称中心	$(k\pi,0)$	$(k\pi+\frac{\pi}{2},0)$	$(\frac{k\pi}{2},0)$
对称轴方程	$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$	$x=k\pi$	无
递增区间	$[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}],k\in$	$[2k\pi-\pi,2k\pi],k$	$(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}),k\in Z$
递减区间	$[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}],k$	$[2k\pi,2k\pi+\pi],k$	无

13、两角和与差的正弦、余弦和正切公式

①两角和与差的正弦公式

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

②两角和与差的余弦公式

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

③两角和与差的正切公式

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

14、二倍角公式

①$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

②$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$；$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$；$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

③ $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

15、降幂公式

$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$　　　　　$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

16、辅助角公式：

$a\sin x \pm b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x\pm\varphi)$（其中 $\tan\varphi = \dfrac{b}{a}$）

17、五点法作图

必备方法：$y = A\sin(\omega x+\varphi)$ 五点法步骤						
③	x	$-\dfrac{\varphi}{\omega}$	$\dfrac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega}$	$\dfrac{\pi-\varphi}{\omega}$	$\dfrac{\frac{3\pi}{2}-\varphi}{\omega}$	$\dfrac{2\pi-\varphi}{\omega}$
①	$\omega x+\varphi$	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π
②	$y = A\sin(\omega x+\varphi)$	0	A	0	$-A$	0

对于复合函数 $y = A\sin(\omega x+\varphi)$，

第一步：将 $\omega x+\varphi$ 看做一个整体，用五点法作图列表时，分别令 $\omega x+\varphi$ 等于 0，$\dfrac{\pi}{2}$，π，$\dfrac{3\pi}{2}$，2π，对应的 y 则取 0，A，0，$-A$，0。，（如上表中，先列出序号①②两行）

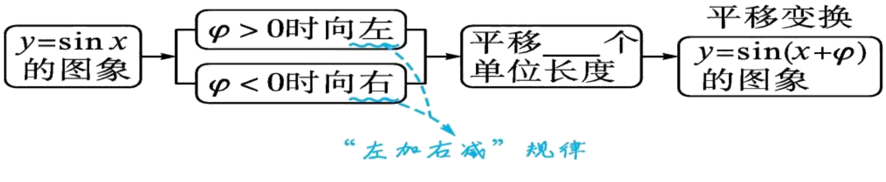
第二步：逆向解出 x（如上表中，序号③行。）

第三步：得到五个关键点为：$(-\dfrac{\varphi}{\omega},0)$，$(\dfrac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega},A)$，$(\dfrac{\pi-\varphi}{\omega},0)$，$(\dfrac{\frac{3\pi}{2}-\varphi}{\omega},-A)$，$(\dfrac{2\pi-\varphi}{\omega},0)$

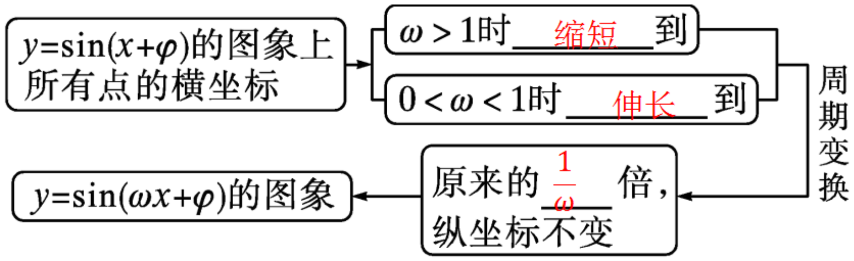
18、三角函数图象变换

参数 A，ω，φ 对函数 $y = A\sin(\omega x+\varphi)$ 图象的影响

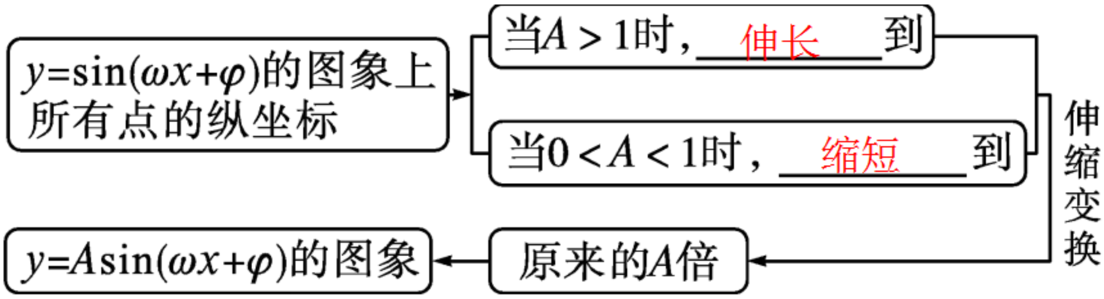
1. φ 对函数 $y=\sin(x+\varphi)$，$x\in R$ 的图象的影响



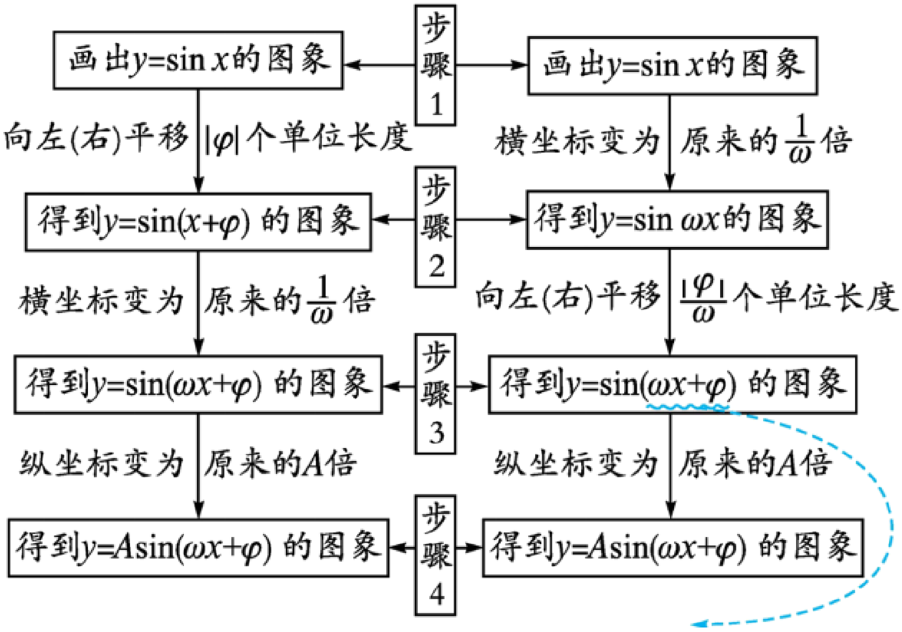
2、ω（$\omega>0$）对函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 图象的影响



3、A（$A>0$）对 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象的影响



4、由 $y=\sin x$ 的图象变换得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$）的图象的两种方法



19、根据图象求解析式

形如 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 的解析式求法：

（1）A,B 求法：

①观察法：A 代表偏离平衡位置的最大距离；B 平衡位置.

②代数法：记 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 的最大值为 M，最小值为 m；则：$\begin{cases} A+B=M \\ -A+B=m \end{cases}$，联立求解.

（2）ω 求法：通过观察图象，计算周期 T，利用公式 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$，求出 ω.

（3）φ 求法：最值代入法：通过观察图象的最高点 (x_1,M)（或者最低点 (x_2,m)）代入解析式

$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 求解.

考点精讲精练

考点一：任意角

真题讲解

例题 1. （2023·河北·高三学业考试）已知α是锐角,那么2α是

A. 第一象限角　　B. 第二象限角

C. 小于$180°$的正角　　D. 不大于直角的正角

【答案】C

【详解】$\because\alpha$是锐角，即$0<\alpha<90°$，$\therefore 0<2\alpha<180°$.

所以2α是小于$180°$的正角．故选：C.

例题 2. （2023 秋·广东佛山·高三统考学业考试）下列各角中与$60°$终边相同的角是（　　）

A. $-300°$　　B. $-240°$　　C. $120°$　　D. $390°$

【答案】A

【详解】$\because -300°=60°-360°$，$-240°=60°-300°$，$120°=60°+60°$，$390°=60°+330°$，

因此，只有 A 选项中的角与$60°$终边相同.

故选：A.

真题演练

1. （2023 秋·福建·高二统考学业考试）已知角的顶点与直角坐标系的原点重合，始边与x轴的非负半轴重合，那么，下列各角与$380°$角终边相同的是（　　）

A. $20°$　　B. $30°$　　C. $40°$　　D. $50°$

【答案】A

【详解】因为与$380°$角终边相同的角的集合为$\{\beta\mid\beta=380°+k\cdot360°,k\in Z\}$，当$k=-1$时，得到$\beta=20°$，又$k\in Z$，所以易知 BCD 均不符合题意.

故选：A.

2. （2023 秋·广东·高三统考学业考试）下列各角中与$437°$角的终边相同的是（　　）

A. $67°$　　B. $77°$　　C. $107°$　　D. $137°$

【答案】B

【详解】与$437°$角的终边相同的角为$\theta=437°+360°\cdot k,k\in Z$，

当$k=-1$时，$\theta=437°-360°=77°$，B 正确；

经验证，其他三个选项均不合要求.

故选：B

考点二：弧度制

真题讲解

例题 1．（2023·广东·高三学业考试）已知扇形的半径为 1，圆心角为60°，则这个扇形的弧长为（　　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　D．60

【答案】B

【详解】易知$60^{\circ}=\frac{\pi}{3}$，由扇形弧长公式可得$l=\frac{\pi}{3}\times 1=\frac{\pi}{3}$.

故选：B

例题 2．（2023·上海·高三统考学业考试）一扇形的圆心角$\alpha=\frac{\pi}{3}$，半径$R=10\,\text{cm}$，则该扇形的面积为_____（cm²）

【答案】$\frac{50\pi}{3}$/$\frac{50}{3}\pi$

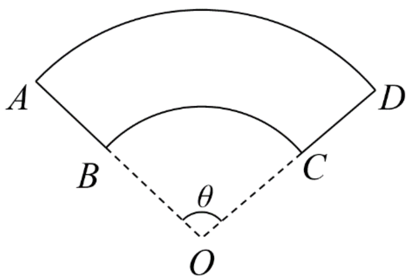
【详解】因为$\alpha=\frac{\pi}{3}$，$R=10\text{cm}$，

所以该扇形的弧长为$l=\alpha R=\frac{10\pi}{3}$（cm），

故该扇形的面积$S=\frac{1}{2}lR=\frac{1}{2}\times\frac{10\pi}{3}\times 10=\frac{50\pi}{3}$（cm²）.

故答案为：$\frac{50\pi}{3}$.

例题 3．（2023 春·江西南昌·高一校考学业考试）某地政府部门欲做一个“践行核心价值观”的宣传牌，该宣传牌形状是如图所示的扇形环面(由扇形OAD挖去扇形OBC后构成的)．已知$OA=2$米，$OB=x$米$(0<x<2)$，线段BA、线段CD与弧$\overset{\frown}{BC}$、弧$\overset{\frown}{AD}$的长度之和为6米，圆心角为θ弧度.



(1)求θ关于x的函数解析式；

(2)记该宣传牌的面积为y，试问x取何值时，y的值最大?并求出最大值.

【答案】(1) $\theta=\frac{2x+2}{x+2}(0<x<2)$；

(2)当 $x=\frac{1}{2}$ 时，y 的值最大，最大值为 $\frac{9}{4}$.

【详解】（1）根据题意，弧 $\overset{\frown}{BC}$ 的长度为 $x\theta$ 米，弧 $\overset{\frown}{AD}$ 的长度 $AD=2\theta$ 米，

$\therefore 2(2-x)+x\theta+2\theta=6$，

$\therefore\ \theta=\frac{2x+2}{x+2}(0<x<2)$.

（2）依据题意，可知 $y=S_{扇OAD}-S_{扇OBC}=\frac{1}{2}\theta\times2^2-\frac{1}{2}\theta x^2$，

化简得：$y=-x^2+x+2$，$0<x<2$，

$\therefore$ 当 $x=\frac{1}{2}$，$y_{\max}=-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+2=\frac{9}{4}$.

∴当 $x=\frac{1}{2}$ 时，y 的值最大，且最大值为 $\frac{9}{4}$.

真题演练

1．（2023·广东·高三统考学业考试）一个扇形的弧长与面积的数值都是3，则该扇形圆心角的弧度数为(　　)

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{3}{2}$　　D．2

【答案】C

【详解】设扇形的圆心角的弧度数为 α，半径为 r，则 $\begin{cases}\alpha r=3,\\ \frac{1}{2}\alpha r^2=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}r=2,\\ \alpha=\frac{3}{2}\end{cases}$

故选：C.

2．（2023·江西宜春·高一江西省宜丰中学校考学业考试）半径为 $2\mathrm{cm}$，圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的弧长为________ cm.

【答案】$\frac{4\pi}{3}$ / $\frac{4}{3}\pi$

【详解】$l=|\alpha|r=\left|\frac{2\pi}{3}\right|\cdot2=\frac{4\pi}{3}$

故答案为：$\frac{4\pi}{3}$

3．（2023·全国·高一学业考试）彝族图案作为人类社会发展的一种物质文化，有着灿烂历史．按照图案的载体大致分为彝族服饰图案、彝族漆器图案、彝族银器图案等，其中蕴含着丰富的数学文化，如图1，漆器图案中出现的"阿基米德螺线"，该曲线是由一动点匀速离开一个固定点的同时又以固定的角速度绕该固定点转动所形成的轨迹．这些螺线均匀分布，将其简化抽象为图2，若 $OA=2$，则 $\angle AOB$ 所对应的弧长为_____.


图 1

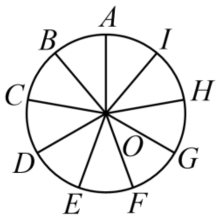


图 2

【答案】$\frac{4\pi}{9}$

【详解】由题意，可知圆心角$\alpha=\angle AOB=\frac{2\pi}{9}$，半径$r=OA=2$，

所以$\angle AOB$所对应的弧长为$l=\alpha r=2\times\frac{2\pi}{9}=\frac{4\pi}{9}$.

故答案为：$\frac{4\pi}{9}$.

考点三：三角函数的概念

真题讲解

例题 1．（2023·广东·高三学业考试）已知角α的始边在x轴的非负半轴上，终边经过点$\left(-3,4\right)$，则$\cos\alpha=$（　）

A．$\frac{4}{5}$　　B．$\frac{3}{5}$　　C．$-\frac{4}{5}$　　D．$-\frac{3}{5}$

【答案】D

【详解】由已知得，$\cos\alpha=\frac{-3}{\sqrt{\left(-3\right)^2+4^2}}=-\frac{3}{5}$.

故选：D.

例题 2．（2023 春·浙江·高二统考学业考试）已知点$(2\sqrt{3},-2)$在角α的终边上，则角α的最大负值为（　）

A．$-\frac{5\pi}{6}$　　B．$-\frac{2\pi}{3}$　　C．$-\frac{\pi}{6}$　　D．$\frac{5\pi}{3}$

【答案】C

【详解】由题意可知点在第四象限，且$\tan\alpha=\frac{-2}{2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以$\alpha=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in Z$，

故当$k=0,\alpha=-\frac{\pi}{6}$此时为最大的负值，

故选：C

例题 3．（2023·北京·高三统考学业考试）在平面直角坐标系xOy中，角α以O为顶点，以Ox

为始边，终边经过点$(-1,1)$，则角α可以是（　）

A．$\frac{\pi}{4}$　　B．$\frac{\pi}{2}$　　C．$\frac{3\pi}{4}$　　D．π

【答案】C

【详解】由题意$\tan\alpha=\frac{1}{-1}=-1$，并且点$(-1,1)$在第二象限，$\therefore\alpha=\frac{3\pi}{4}$；

故选：C.

例题4．（2023·全国·高一学业考试）若角θ的始边与x轴的非负半轴重合，终边过点$p\left(1,\sqrt{3}\right)$，则$2\sin\theta+\cos\theta=$（　）

A．$\frac{1}{2}+\sqrt{3}$　　B．$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$　　D．$\sqrt{3}+1$

【答案】A

【详解】解：因为角θ的始边与x轴的非负半轴重合，终边过点$p\left(1,\sqrt{3}\right)$，所以$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}}=\frac{1}{2}$，

所以$2\sin\theta+\cos\theta=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=\sqrt{3}+\frac{1}{2}$

故选：A

例题5．（2023·广东·高二统考学业考试）已知α是第二象限角，$P\left(x,\sqrt{5}\right)$为其终边上一点，且$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}x$，则$x$等于

A．$\sqrt{3}$　　B．$\pm\sqrt{3}$　　C．$-\sqrt{2}$　　D．$-\sqrt{3}$

【答案】D

【详解】由三角函数的定义得$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}x}{4}=\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$，

解得$x=\pm\sqrt{3}$.

又点$P\left(x,\sqrt{5}\right)$在第二象限内，

所以$x=-\sqrt{3}$．选D.

真题演练

1．（2023春·福建·高二统考学业考试）已知角θ的顶点为坐标原点，始边与x轴的非负半轴重合，终边经过点$(4,3)$，则$\tan\theta$值为（　）

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{4}{5}$　　C. $\frac{4}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$

【答案】D

【详解】已知角θ的顶点为坐标原点，始边与x轴的非负半轴重合，终边经过点$(4,3)$，

由三角函数的定义可得$\tan\theta=\frac{3}{4}$.

故选：D.

2．（2023·重庆·高二统考学业考试）已知角α的终边位于第二象限，则点$P(\sin\alpha,\cos\alpha)$位于（　）

A．第二象限　　B．第三象限　　C．第四象限　　D．第一象限

【答案】C

【详解】因为角α的终边在第二象限，则$\sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$，

所以点P在第四象限.

故选：C.

3．（2023秋·广东·高三统考学业考试）若θ满足$\sin\theta<0,\tan\theta>0$，则$\theta$的终边在（　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

【答案】C

【详解】由$\sin\theta<0$可知θ的终边在第三象限或第四象限，又$\tan\theta>0$，则θ的终边在第三象限.

故选：C.

4．（2023秋·广东·高三统考学业考试）已知角θ以坐标原点为顶点，以x轴的非负半轴为始边，终边经过点$(2a-1,a+2)$，且$\cos\theta=\frac{3}{5}$，则实数a的值是（　）

A．2　　B．$\frac{11}{2}$　　C．$-\frac{2}{11}$　　D．$-\frac{1}{2}$

【答案】A

【详解】由题意有$\cos\theta=\frac{2a-1}{\sqrt{(2a-1)^2+(a+2)^2}}=\frac{3}{5}\Rightarrow 11a^2-20a-4=0$，解得$a=2$或$a=-\frac{2}{11}$，

由于$\cos\theta=\frac{3}{5}>0$，则$2a-1>0$，所以$a=2$满足题意.

故选：A

5．（2023·广东·高三学业考试）在平面直角坐标系xOy中，已知角θ的始边是x轴的非负半轴，终边经过点$P(1,2)$，则$\tan\theta=$________.

【答案】2

【详解】依题意，$\tan\theta=\frac{2}{1}=2$.

故答案为：2

考点四：同角三角函数基本关系

真题讲解

例题 1．（2023·江苏·高三统考学业考试）已知$\tan\alpha=-3$，则$\dfrac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=$（　）

A．$\dfrac{5}{2}$　　B．$\dfrac{1}{4}$　　C．$-\dfrac{5}{4}$　　D．$-\dfrac{7}{2}$

【答案】B

【详解】由题意$\tan\alpha=-3$，可知$\cos\alpha\neq0$，

则$\dfrac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\dfrac{\tan\alpha+2}{\tan\alpha-1}=\dfrac{-3+2}{-3-1}=\dfrac{1}{4}$，

故选：B

例题 2．（2023 春·福建福州·高二福建省福州延安中学校考学业考试）已知α为第三象限角，且$\cos\alpha=-\dfrac{5}{13}$，则$\tan\alpha$的值为（　）

A．$-\dfrac{12}{13}$　　B．$\dfrac{12}{5}$　　C．$-\dfrac{12}{5}$　　D．$\dfrac{12}{13}$

【答案】B

【详解】$\because\alpha$为第三象限角，且$\cos\alpha=-\dfrac{5}{13}$，

$\therefore\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\dfrac{12}{13}$，

故$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{-\dfrac{12}{13}}{-\dfrac{5}{13}}=\dfrac{12}{5}$.

故选：B.

例题 3．（多选）（2023 春·浙江杭州·高二统考学业考试）已知$\theta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，且$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$，则关于$\theta$表述正确的是（　）

A．$\theta=\dfrac{\pi}{6}$　　B．$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\tan\theta=\sqrt{3}$　　D．$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【答案】AD

【详解】解：因为$\theta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，且$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$，

所以$\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

则 $\theta=\frac{\pi}{6}$， $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$， $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

故选：AD

例题 4．（2023·山西运城·高三校考学业考试）已知 $\tan\alpha=2$，求下列各式的值：

(1) $\frac{3\sin\alpha-5\cos\alpha}{\cos\alpha+2\sin\alpha}$；

(2) $2\sin^2\alpha-3\cos^2\alpha$．

【答案】(1) $\frac{1}{5}$

(2)1

【详解】（1） $\frac{3\sin\alpha-5\cos\alpha}{\cos\alpha+2\sin\alpha}=\frac{3\tan\alpha-5}{1+2\tan\alpha}=\frac{3\times2-5}{1+2\times2}=\frac{1}{5}$

（2） $2\sin^2\alpha-3\cos^2\alpha=\frac{2\sin^2\alpha-3\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\tan^2\alpha-3}{\tan^2\alpha+1}=\frac{2\times2^2-3}{2^2+1}=1$

真题演练

1．（2023·上海·高三统考学业考试）已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{2}$，且 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\cos\alpha-\sin\alpha=($　　$)$

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{1}{2}$

【答案】B

【详解】$\because\left(\sin\alpha+\cos\alpha\right)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{5}{4}$，$\therefore 2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}$，

$\because\left(\cos\alpha-\sin\alpha\right)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，

$\therefore\cos\alpha-\sin\alpha=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又$\because\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore 0<\cos\alpha<\sin\alpha$，即 $\cos\alpha-\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$．

故选：B.

2．（2023·河北·高三学业考试）已知 $\tan\alpha=2$，则 $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{2\cos\alpha}$ 的值为

A．2　　B．$\frac{1}{2}$　　C．-2　　D．$-\frac{1}{2}$

【答案】B

【详解】由题意可知，$\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{2\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha-1}{2}=\frac{1}{2}$，故选：B.

3．（2023·广东·高三统考学业考试）若 $\sin\alpha\cos\alpha>0,\cos\alpha\tan\alpha<0$，则 α 的终边落在

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

【答案】C

【详解】由 $\sin\alpha\cos\alpha>0$ 得 α 的终边落在第一或第三象限，由 $\cos\alpha\tan\alpha<0$ 得 α 的终边落在第三或第四象限，所以 α 的终边落在第三象限，选 C.

4．（2023 春·宁夏银川·高二统考学业考试）已知角 α 是第三象限角，且 $\sin\alpha=-\frac{1}{3}$，则 $\cos\alpha=$_____.

【答案】$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【详解】因为 $\sin\alpha=-\frac{1}{3}$，α 是第三象限角，

所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

故答案为：$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

考点五：诱导公式

真题讲解

例题 1．（2023 春·天津南开·高一学业考试）$\cos 540°$ 的值为（　）.

A．1　　B．0　　C．-1　　D．不存在

【答案】C

【详解】$\cos 540°=\cos(540°-360°)=\cos 180°=-1$.

故选：C

例题 2．（2023 春·海南·高一统考学业考试）已知 $\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\frac{4}{5}$，则 $\sin\left(\frac{13\pi}{6}-x\right)=$（　）

A．$-\frac{3}{5}$　　B．$\frac{3}{5}$　　C．$-\frac{4}{5}$　　D．$\frac{4}{5}$

【答案】D

【详解】依题意，$\sin\left(\frac{13\pi}{6}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\frac{4}{5}$.

故选：D

例题 3．（2023·河北·高三学业考试）化简：$\frac{\sin(2\pi+\alpha)\cos(\pi-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi-\alpha)\sin(3\pi-\alpha)\sin(-\pi+\alpha)\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)}=$________.

【答案】$\tan\alpha$

【详解】原式$=\frac{\sin\alpha(-\cos\alpha)\sin\alpha(-\sin\alpha)}{-\cos\alpha\sin\alpha(-\sin\alpha)\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha(-\sin\alpha)}{(-\sin\alpha)\cos\alpha}=\tan\alpha$.

故答案为$\tan\alpha$

例题4．（2023秋·广东·高三统考学业考试）已知$\tan(\pi+\alpha)=2$，则$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)-2\cos(\pi+\alpha)}=$______.

【答案】$\frac{3}{4}$/0.75

【详解】解：由题意得：

$\because\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha=2$,

$\therefore\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)-2\cos(\pi+\alpha)}=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha+2\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha+2}=\frac{3}{4}$.

故答案为：$\frac{3}{4}$

例题5．（2023·江西宜春·高一江西省宜丰中学校考学业考试）求下列各式的值

(1) $\sin\frac{25\pi}{6}+\cos\frac{25\pi}{3}+\tan\left(-\frac{25\pi}{4}\right)$.

(2) $\frac{\tan(-150^\circ)\cdot\cos(-570^\circ)\cdot\cos(-1140^\circ)}{\tan(-210^\circ)\cdot\sin(-690^\circ)}$

【答案】(1) 0

(2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【详解】（1）$\sin\frac{25\pi}{6}+\cos\frac{25\pi}{3}+\tan\left(-\frac{25\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}+\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$=\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1=0$;

（2）$\frac{\tan(-150^\circ)\cdot\cos(-570^\circ)\cdot\cos(-1140^\circ)}{\tan(-210^\circ)\cdot\sin(-690^\circ)}$

$=\frac{\tan(-180^\circ+30^\circ)\cdot\cos(-540^\circ-30^\circ)\cdot\cos(-3\times360^\circ-60^\circ)}{\tan(-180^\circ-30^\circ)\cdot\sin(-2\times360^\circ+30^\circ)}$

$=\frac{\tan30^\circ\cdot(-\cos30^\circ)\cdot\cos60^\circ}{-\tan30^\circ\cdot\sin30^\circ}$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

真题演练

1．（2023春·新疆·高二统考学业考试）$\sin 210^{\circ}=$（　）

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$

C．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】A

【详解】由诱导公式可知，$\sin 210^{\circ}=\sin\left(180^{\circ}+30^{\circ}\right)=-\sin 30^{\circ}=-\frac{1}{2}$.

故选：A

2．（2023·湖南衡阳·高二校联考学业考试）若$\sin(\pi-\alpha)=\frac{\sqrt{6}}{3}$，则$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=$（　）

A．$-\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B．$-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D．$\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

【答案】A

【详解】依题意，$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

故选：A

3．（2023春·福建福州·高二福建省福州延安中学校考学业考试）点$A(3,4)$在角θ的终边上，则

$\frac{\sin(\pi+\theta)+2\cos\theta}{\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)-\cos\theta}=$________.

【答案】2

【详解】因为点$A(3,4)$在角θ的终边上，则$\tan\theta=\frac{4}{3}$，

所以$\frac{\sin(\pi+\theta)+2\cos\theta}{\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)-\cos\theta}=\frac{-\sin\theta+2\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\frac{-\tan\theta+2}{\tan\theta-1}=\frac{-\frac{4}{3}+2}{\frac{4}{3}-1}=2$.

故答案为：2

4．（2023·河北·高三学业考试）求值:$\sin(-\frac{23}{6}\pi)+\cos\frac{13}{7}\pi\tan 4\pi-\cos\frac{13}{3}\pi=$________.

【答案】0

【详解】原式$=\sin(-4\pi+\frac{\pi}{6})+\cos(2\pi-\frac{\pi}{7})\tan 4\pi-\cos(4\pi+\frac{\pi}{3})$

$=\sin\frac{\pi}{6}+0-\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+0-\frac{1}{2}=0$.

故答案为：0.

5．（2023 春·江西南昌·高一校考学业考试）已知角α的顶点在坐标原点，始边与x轴的非负半轴重合，终边经过点$P(-8,m)$，且$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$.

(1)求$\tan\alpha$的值；

(2)求$\dfrac{2\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\cos(-\alpha)}{\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(\pi+\alpha)}$的值

【答案】(1)$\frac{3}{4}$

(2)$\frac{5}{4}$

【详解】（1）由三角函数定义得$\sin\alpha=\dfrac{m}{\sqrt{(-8)^2+m^2}}=-\frac{3}{5}$，

两边平方解得$m^2=36$，又$\sin\alpha=-\frac{3}{5}<0$，故$m<0$ ，

$\therefore m=-6$. 即$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{3}{4}$.

（2）$\dfrac{2\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\cos(-\alpha)}{\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(\pi+\alpha)}=\dfrac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{2\cos\alpha}$，

由（1）得$\tan\alpha=\frac{3}{4}$. 原式$=\dfrac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{2\cos\alpha}=\dfrac{1+2\tan\alpha}{2}=\frac{5}{4}$

考点六：三角函数的图象和性质

真题讲解

例题 1．（2023 春·天津河北·高二学业考试）下列函数中，既是其定义域上的单调函数，又是奇函数的是（　）

A．$y=\sin x$　　B．$y=x^3$　　C．$y=\tan x$　　D．$y=3^x$

【答案】B

【详解】$y=3^x$是非奇非偶函数，不符合题意.

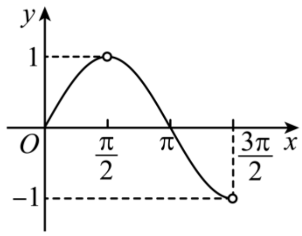
$y=\tan x$ 在其定义域 $\left\{x \mid x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z\right\}$ 上不是单调函数，不符合题意.

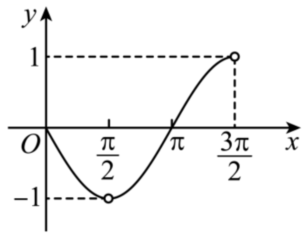
$y=\sin x$ 在其定义域 R 上不是单调函数，不符合题意.

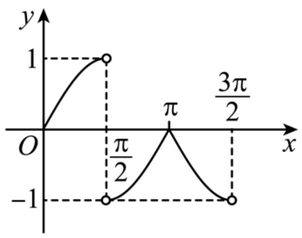
$y=x^3$ 在其定义域 R 上单调递增，且为奇函数，符合题意.

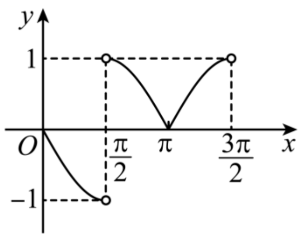
故选：B

例题 2．（2023 春·江西南昌·高一校考学业考试）如图所示，函数 $y=\cos x\left|\tan x\right|$ （$0\le x<\dfrac{3\pi}{2}$ 且 $x\neq\dfrac{\pi}{2}$）的图像是（　　）.

A. 

B. 

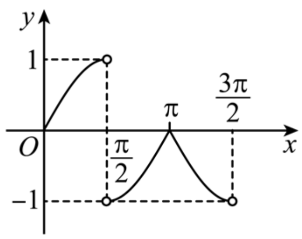
C. 

D. 

【答案】C

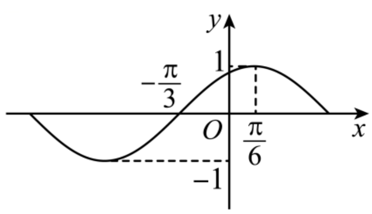
【详解】$y=\cos x\left|\tan x\right|=\begin{cases}\sin x,0\le x<\dfrac{\pi}{2}\text{或}\pi\le x<\dfrac{3\pi}{2}\\ -\sin x,\dfrac{\pi}{2}<x<\pi\end{cases}$，

根据正弦函数的图象，作出函数图象如下图所示，



故选：C.

例题 3．（2023·湖南衡阳·高二校联考学业考试）函数 $y=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(A>0,\omega>0,\left|\varphi\right|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象如图所示，则（　　）



A. $\varphi=-\frac{\pi}{6}$　　B. $\varphi=\frac{\pi}{3}$　　C. $\varphi=\frac{\pi}{12}$　　D. $\varphi=\frac{\pi}{6}$

【答案】B

【详解】由图可知 $A=1$， $\frac{T}{4}=\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{2}, T=2\pi=\frac{2\pi}{\omega}, \omega=1$，

则 $y=\sin(x+\varphi)$，

则当 $x=\frac{\pi}{6}$时， $y=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=1$，

由于 $-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{6}+\varphi<\frac{2\pi}{3}$，所以 $\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}, \varphi=\frac{\pi}{3}$.

故选：B

例题 4．（2023 春·河北·高二统考学业考试）已知函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 在区间 $\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增，且 $|f(x)|=1$ 在区间 $[0,\pi]$ 上有且仅有一个解，则 ω 的取值范围是（　）

A. $\left(0,\frac{3}{4}\right)$　　B. $\left[\frac{3}{4},\frac{3}{2}\right)$　　C. $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$　　D. $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$

【答案】D

【详解】令 $\omega x\in\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$，解得 $x\in\left[\frac{2k\pi}{\omega}-\frac{\pi}{2\omega},\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{2\omega}\right]$， $k\in Z$，

而函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 在区间 $\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增，

所以 $\begin{cases}-\frac{\pi}{2\omega}\le-\frac{2}{3}\pi\\ \frac{\pi}{2\omega}\ge\frac{\pi}{3}\\ \omega>0\end{cases}$，解得 $0<\omega\le\frac{3}{4}$，

当 $x\in[0,\pi]$时， $\omega x\in[0,\omega\pi]$，

因为 $|f(x)|=1$ 在区间 $[0,\pi]$ 上有且仅有一个解，

所以 $\begin{cases}\omega\pi\ge\frac{\pi}{2}\\ \omega\pi<\frac{3\pi}{2}\end{cases}$，解得 $\frac{1}{2}\le\omega<\frac{3}{2}$.

综上所述， ω 的取值范围是 $\frac{1}{2}\le\omega\le\frac{3}{4}$.

故选：D.

例题 5．（2023 春·江西南昌·高一校考学业考试）已知 $f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 在 $[0,m]$ 上的最大值为 $\frac{1}{2}$，则实数

m 的最大值为________.

【答案】$\frac{2\pi}{3}$ / $\frac{2}{3}\pi$

【详解】由 $x\in[0,m]$，得 $2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},2m+\frac{\pi}{3}\right]$，

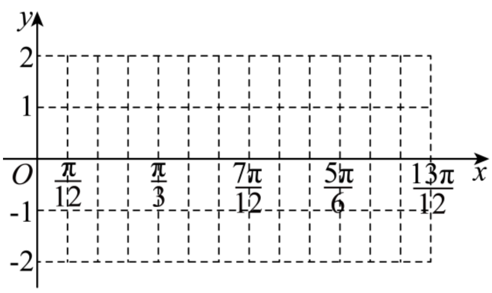
因为 $f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 在 $[0,m]$ 上的最大值为 $\frac{1}{2}$，

所以 $\frac{\pi}{3}<2m+\frac{\pi}{3}\le\frac{5\pi}{3}$，解得 $0<m\le\frac{2\pi}{3}$，

所以实数 m 的最大值为 $\frac{2\pi}{3}$.

故答案为：$\frac{2\pi}{3}$.

6．（2023 春·江西南昌·高一校考学业考试）已知函数 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$



(1)请用“五点法”画出函数 $f(x)$ 在一个周期上的图象（先在所给的表格中填上所需的数字，再画图）；

x		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$	
$2x-\frac{\pi}{6}$	0				2π
$f(x)$			0		

(2)求 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值及相应的 x 值.

【答案】(1)答案见解析；

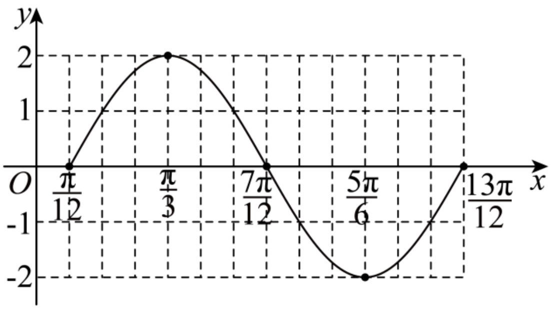
(2) $x=\frac{\pi}{12}$ 时，$f(x)$ 取最小值 0；$x=\frac{\pi}{3}$ 时，$f(x)$ 取最大值 1.

【详解】（1）分别令 $2x-\frac{\pi}{6}=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$，可得：

x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{12}$

$2x-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$	0	1	0	-1	0

画出函数 $f(x)$ 在一个周期的图像如图所示：

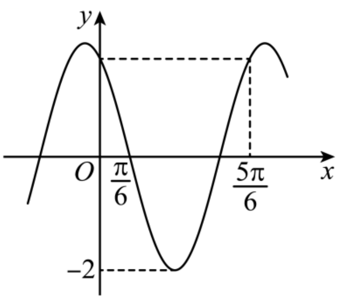


（2）因为 $x\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $2x-\frac{\pi}{6}\in\left[0,\frac{5\pi}{6}\right]$，

所以当 $2x-\frac{\pi}{6}=0$，即 $x=\frac{\pi}{12}$ 时，$f(x)$ 取最小值 0；

当 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，$f(x)$ 取最大值 1.

例题 7．（2023·山西·高二统考学业考试）已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\pi\right)$ 的部分图像如图示，且 $f(0)=f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$，$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$．



(1)求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2)若 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，求 $f(x)$ 的最大值和最小值．

【答案】(1) $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$

(2) $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{3}$，$f(x)$ 的最小值为 -2

【详解】（1）由图像可知 $A=2$，因为 $f(0)=f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$，所以函数 $f(x)$ 图像的一条对称轴为直线 $x=\frac{0+\frac{5\pi}{6}}{2}=\frac{5\pi}{12}$，

设 $f(x)$ 的最小正周期为 T，则 $\frac{T}{4}=\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}$，即 $T=\pi$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，又 $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=-2$，所以

$2\sin\left(\frac{5\pi}{6}+\varphi\right)=-2$，即 $\sin\left(\frac{5\pi}{6}+\varphi\right)=-1$，

所以 $\frac{5\pi}{6}+\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，即 $\varphi=2k\pi-\frac{4\pi}{3}$，$k\in Z$．因为 $|\varphi|<\pi$，所以 $\varphi=\frac{2\pi}{3}$，所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$．

（2）$\because x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\therefore 2x+\frac{2\pi}{3}\in\left[\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right]$，

$\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)\in\left[-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right], f(x)=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)\in\left[-2,\sqrt{3}\right]$，

当 $2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}$，即 $x=\frac{5\pi}{12}$，$f(x)$ 的最小值为 -2；

当 $2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$，即 $x=0$，$f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{3}$．

真题演练

1．（2023春·新疆·高二统考学业考试）已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$，则 $f(x)$ 的一个单调递增区间是（　）

A．$[0,\frac{\pi}{2}]$　　B．$[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$

C．$[0,\pi]$　　D．$[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$

【答案】A

【详解】函数 $f(x)=\sqrt{2}\cos(\frac{3\pi}{2}+x)=\sqrt{2}\sin x$，由正弦函数的性质知，

函数 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$、$[0,\pi]$ 上都不单调，在 $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ 上单调递减，即选项 BCD 都不是，

函数 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增，A 是.

故选：A

2．（2023·湖南衡阳·高二校联考学业考试）下列关于函数 $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的说法正确的是（　）

A．图象关于点 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ 成中心对称　　B．图象关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 成轴对称

C．在区间 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$ 上单调递增　　D．在区间 $\left(-\frac{5\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增

【答案】A

【详解】当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时， $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ ，所以 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ 是函数 $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的中心对称，

所以 A 选项正确，B 选项错误.

C 选项，注意到 $x=\frac{\pi}{4}$ 时， $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ ， 而 $\tan\frac{\pi}{2}$ 不存在，所以 C 选项错误.

D 选项，注意到 $x=-\frac{3\pi}{4}$ 时， $x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}$ ， 而 $\tan\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ 不存在，所以 D 选项错误.

故选：A

3．（2023 春·湖南邵阳·高三统考学业考试）函数 $f\left(x\right)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的最小正周期为（　　）

A． $\frac{\pi}{2}$　　　　B． π　　　　C． 2π　　　　D． 4π

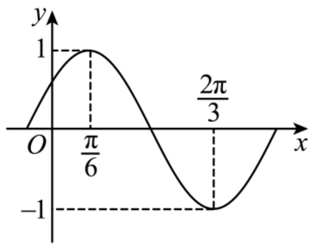
【答案】B

【详解】由函数 $f\left(x\right)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ ，根据最小正周期的计算公式，

可得函数 $f\left(x\right)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

故选：B.

4．（2023 春·湖南邵阳·高三统考学业考试）已知 $f\left(x\right)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，则 $f\left(x\right)$ 的解析式为（　　）



A． $f\left(x\right)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$　　　　B． $f\left(x\right)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$

C． $f\left(x\right)=\sin(x+\frac{\pi}{6})$　　　　D． $f\left(x\right)=\sin(x+\frac{\pi}{3})$

【答案】A

【详解】由函数 $f\left(x\right)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象，可得 $A=1$ 且 $\frac{1}{2}T=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ ，

可得 $T=\pi$ ， 所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$ ， 即 $f\left(x\right)=\sin(2x+\varphi)$ ，

又由 $f(\frac{\pi}{6})=\sin(2\times\frac{\pi}{6}+\varphi)=\sin(\frac{\pi}{3}+\varphi)=1$ ， 解得 $\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$ ，

即 $\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in Z$ ， 因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$ ， 所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$ ， 所以 $f\left(x\right)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$.