



为圆心,  $|PA|$  为半径作圆  $F_1$ , 以  $F_2$  为圆心,  $|PB|$  为半径作圆  $F_2$ , 则两圆公共点的轨迹方程为 ( )

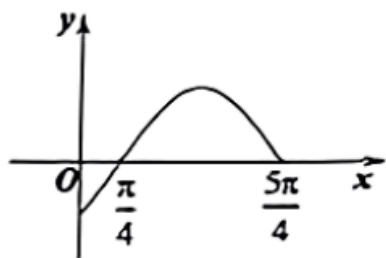
- A.  $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$       B.  $\frac{x^2}{8} - y^2 = 1$       C.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$       D.  $\frac{x^2}{10} + y^2 = 1$

8. 已知函数  $f(x) = \ln x$  和两点  $A(1, 0)$ ,  $B(e^m, m)$ , 设曲线  $y = f(x)$  过原点的切线为  $l$ , 且  $l \parallel AB$ , 则  $m$  所在的大致区间为 ( )

- A.  $(-1, 0)$       B.  $(0, 1)$       C.  $(1, 2)$       D.  $(2, 3)$

二, 选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 已知函数  $f(x) = \sin \omega x + a \cos \omega x (\omega > 0)$  的最大值为  $\sqrt{2}$ , 其部分图象如图所示, 则 ( )



- A.  $\omega = 1$
- B. 函数  $y = f\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$  为偶函数
- C.  $y = f(x)$  在  $[0, m]$  上有 4 个零点, 则  $\frac{13\pi}{4} \leq m < \frac{17\pi}{4}$
- D. 当  $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$  时, 函数  $y = \frac{f(x)}{\cos x}$  的值域为  $(-1, \sqrt{3})$

10. 已知函数  $f(x) = x^3 - ax + 2 (a \in \mathbf{R})$ , 则 ( )

- A.  $f(-2) + f(2) = 4$       B. 若  $a > 0$ , 则  $f(x)$  的极大值点为  $x = \sqrt{\frac{a}{3}}$
- C. 若  $f(x)$  至少有两个零点, 则  $a \geq 3$       D.  $f(x)$  在区间  $(-\infty, -a-1)$  上单调递增

11. 抛物线  $C: y^2 = 4x$  的准线为  $l$ , 过焦点  $F$  的直线与  $C$  交于  $A, B$  两点, 分别过  $A, B$  作  $l$  的垂线, 垂足分别为  $A', B'$ ,

记  $\triangle VAA'F$ ,  $\triangle A'B'F$ ,  $\triangle VBB'F$  的面积分别为  $S_1, S_2, S_3$ , 则 ( )

- A.  $\triangle V A' B' F$  为锐角三角形      B.  $S_2$  的最小值为 4
- C.  $S_1, \frac{1}{2}S_2, S_3$  成等差数列      D.  $S_1, \frac{1}{2}S_2, S_3$  成等比数列

三, 填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 已知  $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{3}{5}$ , 则  $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$  \_\_\_\_\_.

13. 在正项数列  $\{a_n\}$  中,  $\ln a_{n+1} = \ln a_n + 2$ , 且  $a_1 a_3 = e^6$ , 则  $a_n =$  \_\_\_\_\_.

14. 甲口袋中有标号为 1, 2, 3 的三张卡片, 乙口袋中有标号为 4, 5, 6, 7 的四张卡片, 从两个口袋中不放回地随机抽出三张卡片, 每个口袋至少抽一张, 则抽到的三张卡片中至少有一张标号为偶数的不同抽法共有 \_\_\_\_\_ 种 (用数字作答)

**四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.**

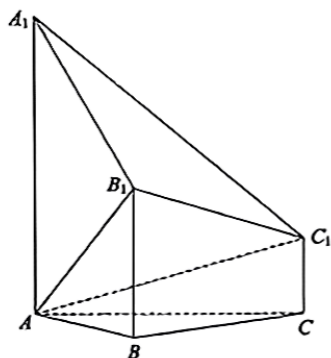
15. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别是  $a, b, c$ , 且  $a \cos B - b \cos A = c - b$ .

(1) 求角  $A$ .

(2) 已知  $A$  的角平分线交  $BC$  于点  $D$ , 若  $c = 2$ ,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$ , 求  $AD$ .

16. 如图, 在多面体  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $A_1A, B_1B, C_1C$  均垂直于平面  $ABC$ ,  $\angle ABC = 120^\circ$ ,  $A_1A = 4$ ,  $C_1C = 1$ ,

$$AB = BC = B_1B = 2.$$



(1) 求证:  $AB_1 \perp$  平面  $A_1B_1C_1$ .

(2) 求二面角  $A-B_1C_1-C$  的正弦值.

17. 一项没有平局的对抗赛分为两个阶段, 参赛者在第一阶段中共参加 2 场比赛, 若至少有一场获胜, 则进入第二阶段比赛, 否则被淘汰, 比赛结束, 进入第二阶段比赛的参赛者共参加 3 场比赛. 在两个阶段的每场比赛中, 获胜方记 1 分, 负方记 0 分, 参赛者参赛总分是两个阶段得分的总和, 若甲在第一阶段比赛中每场获胜的概率都为  $p$  ( $0 < p < 1$ ), 在第二阶段比赛中每场获胜的概率都为  $\frac{1}{3}$ , 每场比赛是否获胜相互独立. 已知甲参赛总分为 2 分的概率为  $\frac{8}{27}$ .

(1) 求  $p$ .

(2) 求甲参赛总分  $X$  的分布列和数学期望.

18. 设椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$  ( $a > 1$ ) 的右焦点为  $F$ , 右顶点为  $A$ , 已知  $\frac{1}{|OF|} + \frac{1}{|OA|} = \frac{e}{|AF|}$ , 下中  $O$  为原点,  $e$  为椭圆的离心率.

(1) 求  $C$  的方程.

(2) 设点  $P$  为  $C$  上一动点, 过  $P$  作不与坐标轴垂直的直线  $l$ .

①若  $l$  与  $C$  交于另一点  $T$ ,  $E$  为  $PT$  中点, 记  $l$  斜率为  $k$ ,  $OE$  斜率为  $k_0$ , 证明:  $k \cdot k_0$  为定值.

②若  $l$  与  $C$  相切, 且与直线  $x=2$  相交于点  $Q$ , 以  $PQ$  为直径的圆是否恒过定点? 若是, 请求出定点坐标, 若否, 请说明理由.

19. 行列式最早起源于对线性方程组的研究, 起初是一种速记的表达式, 发展到现在已经成为一种非常有用的数学工

具. 已知  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  表示二阶行列式, 规定  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ ,  $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$  表示三阶行列式, 规定

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \text{ 设 } f(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & 3x \\ 3 & -x & 0 \\ 1 & -1 & -x \end{vmatrix}.$$

(1) 求  $f(x)$ .

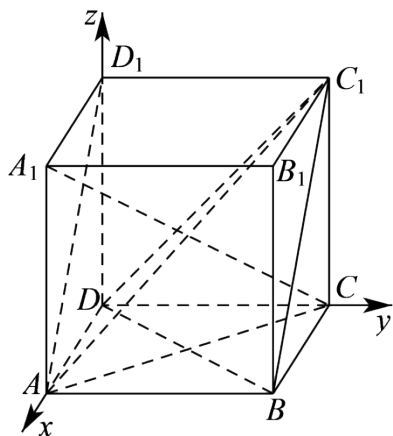
(2) 以  $A_n(x_n, f(x_n))$  为切点, 作直线  $l_{n+1}$  交  $f(x)$  的图象于异于  $A_n$  的另一点  $A_{n+1}(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$ , 其中  $n \in \mathbf{N}$ . 若  $x_0 = 0$ , 当  $n \geq 1$  时, 设点  $A_n$  的横坐标  $x_n$  构成数列  $\{a_n\}$ .

①求  $\{a_n\}$  的通项公式.

②证明:  $\ln\left(1 + \frac{1}{|a_1+1|}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{|a_2+1|}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{|a_n+1|}\right) < 1$ .



【详解】设正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的棱长为1, 以点  $D$  为坐标原点,  $DA, DC, DD_1$  所在直线分别为  $x, y, z$  轴建立空间直角坐标系.



则  $A(1,0,0), B(1,1,0), C(0,1,0), D(0,0,0), A_1(1,0,1), B_1(1,1,1), C_1(0,1,1), D_1(0,0,1)$ .

对于 A 选项,  $\vec{AD_1} = (-1, 0, 1), \vec{A_1C} = (-1, 1, -1)$ .

则  $\vec{AD_1} \cdot \vec{A_1C} = 1 + 0 - 1 = 0$ , 所以,  $AD_1 \perp A_1C$ , A 对.

对于 B 选项,  $\vec{DB} = (1, 1, 0)$ , 则  $\cos \langle \vec{AD_1}, \vec{DB} \rangle = \frac{\vec{AD_1} \cdot \vec{DB}}{|\vec{AD_1}| \cdot |\vec{DB}|} = \frac{-1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$ .

所以,  $AD_1$  与  $BD$  所成角的大小为  $\frac{\pi}{3}$ , B 对.

对于 C 选项, 设平面  $BDC_1$  的法向量为  $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{DC_1} = (0, 1, 1)$ .

则  $\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{DB} = x_1 + y_1 = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{DC_1} = y_1 + z_1 = 0 \end{cases}$ , 取  $y_1 = -1$ , 则  $\vec{m} = (1, -1, 1)$ .

则  $\vec{AD_1} \cdot \vec{m} = -1 + 0 + 1 = 0$ , 所以,  $AD_1 \perp \vec{m}$ .

又因为  $AD_1 \not\subset$  平面  $BDC_1$ , 所以,  $AD_1 \parallel$  平面  $BDC_1$ , C 对.

对于 D 选项, 设平面  $ACC_1$  的法向量为  $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$ ,  $\vec{CC_1} = (0, 0, 1), \vec{CA} = (1, -1, 0)$ .

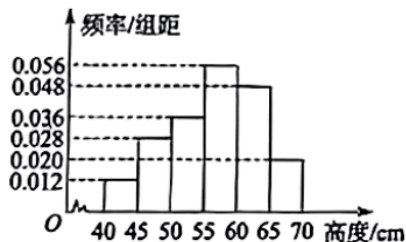
则  $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{CC_1} = z_2 = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{CA} = x_2 - y_2 = 0 \end{cases}$ , 取  $x_2 = 1$ , 则  $\vec{n} = (1, 1, 0)$ .

所以,  $\cos \langle \vec{AD_1}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{AD_1} \cdot \vec{n}}{|\vec{AD_1}| \cdot |\vec{n}|} = -\frac{1}{2}$ .

所以,  $AD_1$  与平面  $ACC_1$  所成角为  $\frac{\pi}{6}$ , D 错.

故选: D.

4. 在践行“乡村振兴”战略的过程中, 某地大力发展特色花卉种植业. 某农户种植一种观赏花卉, 为了解花卉的长势, 随机测量了100枝花的高度(单位: cm), 得到花枝高度的频率分布直方图, 如图所示, 则( )



- A. 样本花卉高度的极差不超过 20cm  
 B. 样本花卉高度的中位数不小于众数  
 C. 样本花的高度的平均数不小于中位数  
 D. 样本花升高度小于 60cm 的占比不超过 70%

【答案】D

【分析】利用极差的定义可判断 A 选项, 利用中位数和众数的定义可判断 B 选项, 利用平均数公式求出样本花卉高度的平均数, 可判断 C 选项, 计算出样本花升高度小于 60cm 的占比, 可判断 D 选项.

【详解】对于 A 选项, 由频率分布直方图可知, 样本花卉高度的极差为  $70 - 40 = 30(\text{cm})$ , A 错.

对于 B 选项, 样本花卉高度的众数为  $\frac{55 + 60}{2} = 57.5(\text{cm})$ .

设样本花卉高度的中位数为  $a\text{cm}$ .

前三个矩形的面积和为  $(0.012 + 0.028 + 0.036) \times 5 = 0.38$ .

前四个矩形的面积和为  $0.38 + 0.056 \times 5 = 0.66$ , 故  $a \in (55, 60)$ .

由中位数的定义可得  $0.38 + (a - 55) \times 0.056 = 0.5$ , 解得  $a \approx 57.14(\text{cm})$ , 则  $a < 57.5$ .

所以, 样本花卉高度的中位数小于众数, B 错.

对于 C 选项, 由频率分布直方图可知.

样本花卉高度的平均数为

$$\bar{x} = 42.5 \times 0.06 + 47.5 \times 0.14 + 52.5 \times 0.18 + 57.5 \times 0.28 + 62.5 \times 0.24 + 67.5 \times 0.1 = 56.5(\text{cm}).$$

且  $\bar{x} < a$ , 所以, 样本花的高度的平均数小于中位数, C 错.

对于 D 选项, 由 B 选项可知, 样本花升高度小于 60cm 的占比为 66%, D 对.

故选: D.

5. 设等比数列  $\{a_n\}$  公比为  $q$ , 则 “ $q > 1$ ” 是 “ $\{a_n\}$  为递增数列” 的 ( )

- A. 充要条件  
 B. 充分不必要条件  
 C. 必要不充分条件  
 D. 即不充分也不必要条件

【答案】D

【分析】要判断 “ $q > 1$ ” 与 “等比数列  $\{a_n\}$  为递增数列” 之间的条件关系.

需要分别从充分性和必要性两方面进行分析,即看“ $q > 1$ ”能否推出“等比数列 $\{a_n\}$ 为递增数列”,以及“等比数列 $\{a_n\}$ 为递增数列”能否推出“ $q > 1$ ”.

【详解】假设 $q > 1$ .对于等比数列 $\{a_n\}$ ,其通项公式为 $a_n = a_1 q^{n-1}$ .

当 $q = 2, a_1 = -2$ 时,根据通项公式可得 $a_2 = a_1 q = -2 \times 2 = -4$ .

此时 $a_2 < a_1$ ,等比数列 $\{a_n\}$ 不是递增数列.

这说明仅仅 $q > 1$ 不能保证等比数列 $\{a_n\}$ 一定是递增数列.

所以“ $q > 1$ ”不是“等比数列 $\{a_n\}$ 为递增数列”的充分条件.

假设等比数列 $\{a_n\}$ 为递增数列,那么 $a_{n+1} > a_n$ .

由通项公式可得 $a_n = a_1 q^{n-1}, a_{n+1} = a_1 q^n$ ,所以 $a_1 q^n > a_1 q^{n-1}$ .

当 $a_1 < 0$ 时,不等式两边同时除以 $a_1 q^{n-1}$ (因为 $a_1 < 0, q^{n-1} > 0$ ,不等号方向改变).

得到 $q^n < q^{n-1}$ .例如当 $n = 2$ 时, $q^2 < q$ ,解得 $0 < q < 1$ .

这说明等比数列 $\{a_n\}$ 为递增数列时,不一定有 $q > 1$ .

所以“ $q > 1$ ”不是“等比数列 $\{a_n\}$ 为递增数列”的必要条件.

则“ $q > 1$ ”是“ $\{a_n\}$ 为递增数列”的既不充分又不必要条件.

故选: D.

6. 已知圆台的母线长为4,高为 $\sqrt{7}$ ,体积为 $7\sqrt{7}\pi$ ,则圆台的侧面积为( )

A.  $48\pi$

B.  $24\pi$

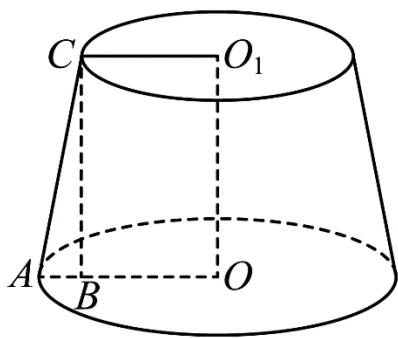
C.  $20\pi$

D.  $10\pi$

【答案】C

【分析】利用母线长和高,求出上底面半径和下底面半径的等式关系,然后利用体积求出上底面半径和下底面半径的另一个等式关系,然后求出上下底面半径,再用侧面积公式即可求解.

【详解】如下图所示.



设圆台上底面半径为 $r$ ,下底面半径为 $R$ ,则 $R > r$ .

设 $AC$ 为圆台的一条母线,连接 $OA, O_1C$ ,则四边形 $OO_1CA$ 为直角梯形.

过点  $C$  在平面  $OO_1CA$  内作  $CB \perp OA$ , 垂足为点  $B$ .

根据题意,  $AC = 4$ ,  $OO_1 = \sqrt{7}$ ,  $O_1C = r$ ,  $OA = R$ .

因为  $O_1C \parallel OA$ ,  $OO_1 \perp OA$ ,  $BC \perp OA$ , 则四边形  $OO_1CB$  为矩形.

所以,  $BC = OO_1 = \sqrt{7}$ ,  $OB = O_1C = r$ , 则  $AB = OA - OB = R - r$ .

由勾股定理可得  $AB^2 + BC^2 = AC^2$ , 即  $(R - r)^2 + 7 = 16$ , 可得  $R - r = 3$ , ①

又因为圆台的体积为  $V = \frac{1}{3} \times \sqrt{7} \pi \times (R^2 + Rr + r^2) = 7\sqrt{7}$ , 可得  $R^2 + Rr + r^2 = 21$ , ②

所以, 
$$\begin{cases} R - r = 3 \\ R^2 + Rr + r^2 = 21 \\ R > r \end{cases}$$
 解得 
$$\begin{cases} R = 4 \\ r = 1 \end{cases}$$
.

所以, 圆台的侧面积为  $S = \frac{1}{2} \times 2\pi \times (R + r) \times 4 = 4\pi \times 5 = 20\pi$ .

故选: C.

7. 已知  $A, B$  为直线  $l$  上的两个定点,  $|AB| = 2$ ,  $P$  为  $l$  上的动点. 在平面直角坐标系中,  $F_1(-3, 0)$ ,  $F_2(3, 0)$ , 以  $F_1$  为

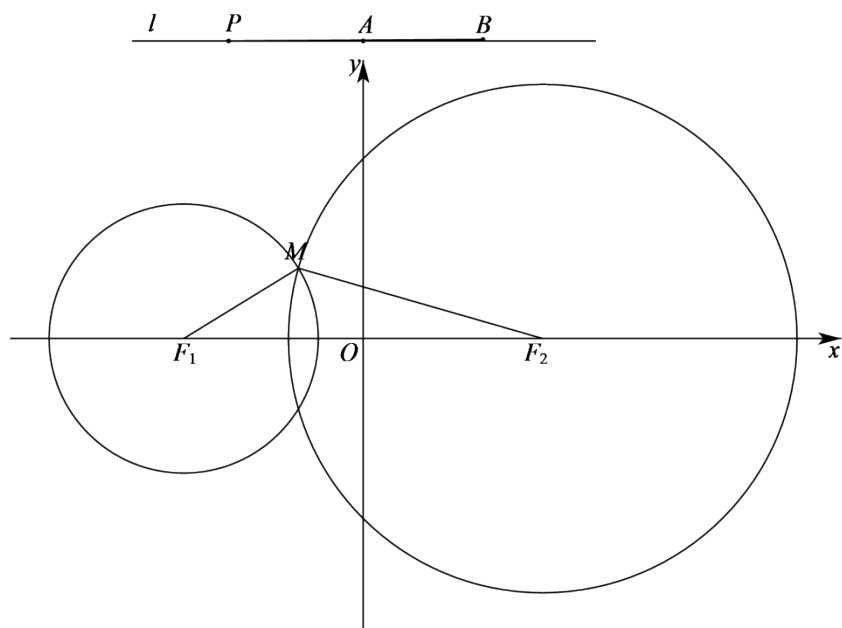
圆心,  $|PA|$  为半径作圆  $F_1$ , 以  $F_2$  为圆心,  $|PB|$  为半径作圆  $F_2$ , 则两圆公共点的轨迹方程为 ( )

- A.  $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$       B.  $\frac{x^2}{8} - y^2 = 1$       C.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$       D.  $\frac{x^2}{10} + y^2 = 1$

【答案】A

【分析】作出图形, 分析可知, 点  $P$  不在线段  $AB$  (不包括端点) 上, 对点  $P$  的位置关系进行分类讨论, 结合双曲线的定义可求得动点的轨迹方程.

【详解】如下图所示:



设圆  $F_1$ , 圆  $F_2$  的半径分别为  $r, R$ , 则  $r = |PA|$ ,  $R = |PB|$ .

设两圆的一个公共点为  $M$ ，由题意可知，点  $P$  不能与点  $A$  或点  $B$  重合。

若点  $P$  在线段  $AB$ （不包括端点）上运动时，则  $|MF_1| + |MF_2| = r + R = |PA| + |PB| = |AB| = 2$ 。

事实上， $|MF_1| + |MF_2| \geq |F_1F_2| = 6$ ，此时点  $M$  不存在。

当点  $P$  在以点  $A$  为端点以  $\overrightarrow{BA}$  的方向为方向的射线上时。

此时， $|MF_2| - |MF_1| = R - r = |PB| - |PA| = |AB| = 2$ 。

当点  $P$  在以点  $B$  为端点且以  $\overrightarrow{AB}$  的方向为方向的射线上时。

此时， $|MF_1| - |MF_2| = r - R = |PA| - |PB| = |AB| = 2$ 。

综上， $||MF_1| - |MF_2|| = 2 < |F_1F_2| = 6$ 。

所以，动点  $M$  的轨迹是以点  $F_1, F_2$  为焦点的双曲线。

设该双曲线的标准方程为  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ，焦距为  $2c$ 。

$$\text{则} \begin{cases} 2a = 2 \\ 2c = 6 \\ c = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}, \text{可得} \begin{cases} a = 1 \\ b = 2\sqrt{2} \end{cases}.$$

因此，两圆公共点的轨迹方程为  $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$ 。

故选：A。

8. 已知函数  $f(x) = \ln x$  和两点  $A(1, 0)$ ,  $B(e^m, m)$ ，设曲线  $y = f(x)$  过原点的切线为  $l$ ，且  $l \parallel AB$ ，则  $m$  所在的大致区间为（ ）

- A.  $(-1, 0)$                       B.  $(0, 1)$                       C.  $(1, 2)$                       D.  $(2, 3)$

【答案】C

【分析】求导，利用导数求得切线  $l$  的斜率  $k = \frac{1}{e}$ ，根据直线平行可得  $e^m - em - 1 = 0$ ，构建  $g(m) = e^m - em - 1$ ，可知  $m$  为  $g(m)$  的非零零点，求导，利用导数判断其单调性结合零点存在性定理分析判断。

【详解】由题意可知：  $y = f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ，且  $f'(x) = \frac{1}{x}$ 。

设切点坐标为  $(x_0, \ln x_0)$ ，则切线  $l$  的斜率  $k = f'(x_0) = \frac{1}{x_0}$ 。

则切线  $l$  的方程为  $y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0)$ 。

若切线过原点，则  $-\ln x_0 = \frac{1}{x_0}(-x_0) = -1$ ，解得  $x_0 = e$ 。

可在切线  $l$  的  $k = \frac{1}{e}$ .

若  $l \parallel AB$ , 且直线  $AB$  的斜率  $k_{AB} = \frac{m}{e^m - 1} (m \neq 0)$ .

则  $k_{AB} = k$ , 即  $\frac{m}{e^m - 1} = \frac{1}{e}$ , 整理可得  $e^m - em - 1 = 0$ .

构建  $g(m) = e^m - em - 1$ , 则  $g'(m) = e^m - e$ .

可知  $m$  为  $g(m)$  的非零零点.

令  $g'(m) > 0$ , 解得  $m > 1$ , 令  $g'(m) < 0$ , 解得  $m < 1$ .

可知  $g(m)$  在  $(-\infty, 1)$  内单调递减, 在  $(1, +\infty)$  内单调递增.

则  $g(m)$  分别在  $(-\infty, 1)$ ,  $(1, +\infty)$  内至多一个零点

且  $g(0) = 0, g(1) = -1 < 0, g(2) = e^2 - 2e - 1 > 0$ .

又因为  $m \neq 0$ , 所以  $m$  所在的大致区间为  $(1, 2)$ .

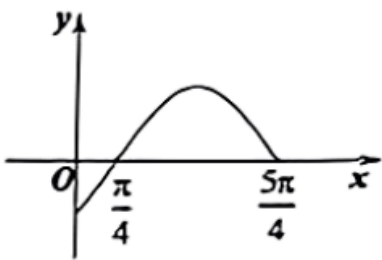
故选: C.

**【点睛】** 方法点睛: 对于函数零点的个数的问题, 利用导数和数形结合的数学思想来求解. 这类问题求解的通法是:

- (1) 构造函数, 这是解决此类题的关键点和难点, 并求其定义域.
- (2) 求导数, 得单调区间和极值点.
- (3) 数形结合, 挖掘隐含条件, 确定函数图象与  $x$  轴的交点情况进而求解.

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 已知函数  $f(x) = \sin \omega x + a \cos \omega x (\omega > 0)$  的最大值为  $\sqrt{2}$ , 其部分图象如图所示, 则 ( )



A.  $\omega = 1$

B. 函数  $y = f\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$  为偶函数

C.  $y = f(x)$  在  $[0, m]$  上有 4 个零点, 则  $\frac{13\pi}{4} \leq m < \frac{17\pi}{4}$

D. 当  $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$  时, 函数  $y = \frac{f(x)}{\cos x}$  的值域为  $(-1, \sqrt{3})$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/757154064036006166>