

新疆兵团八师一四三团一中 2024 年高三下学期期末考试数学试题高三期末试题

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时请按要求用笔。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁，不要折暴、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + mx^2\right)^5$ 的展开式中 x^5 的系数是 -10，则实数 $m =$ ()

- A. 2 B. 1 C. -1 D. -2

2. 抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F ，点 $A(6, y_0)$ 是 C 上一点， $|AF| = 2p$ ，则 $p =$ ()

- A. 8 B. 4 C. 2 D. 1

3. 设 $0 < p < 1$ ，随机变量 ξ 的分布列是

ξ	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}(1-p)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}p$

则当 p 在 $(\frac{2}{3}, \frac{3}{4})$ 内增大时，()

- A. $E(\xi)$ 减小， $D(\xi)$ 减小 B. $E(\xi)$ 减小， $D(\xi)$ 增大
C. $E(\xi)$ 增大， $D(\xi)$ 减小 D. $E(\xi)$ 增大， $D(\xi)$ 增大

4. 中国古代中的“礼、乐、射、御、书、数”合称“六艺”。“礼”，主要指德育；“乐”，主要指美育；“射”和“御”，就是体育和劳动；“书”，指各种历史文化知识；“数”，指数学。某校国学社团开展“六艺”课程讲座活动，每艺安排一节，连排六节，一天课程讲座排课有如下要求：“数”必须排在第三节，且“射”和“御”两门课程相邻排课，则“六艺”课程讲座不同的排课顺序共有 ()

- A. 12 种 B. 24 种 C. 36 种 D. 48 种

5. 已知函数 $f(x) = a(e^2x - 2\ln x) (a > 0)$ ， $D = \left[\frac{1}{e}, 1\right]$ 若所有点 $(s, f(t))$ ， $(s, t \in D)$ 所构成的平面区域面积为

$e^2 - 1$ ，则 $a =$ ()

- A. e B. $\frac{1}{e-2}$ C. 1 D. $\frac{e}{e-2}$

6. 已知 F_1 、 F_2 分别是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点，过 F_2 作双曲线 C 的一条渐近线的垂线，分

别交两条渐近线于点 A 、 B ，过点 B 作 x 轴的垂线，垂足恰为 F_1 ，则双曲线 C 的离心率为 ()

- A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $\sqrt{5}$

7. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $a_n > 0$ ， $q > 1$ ， $a_3 + a_5 = 20$ ， $a_2 a_6 = 64$ ，则 $S_5 =$ ()

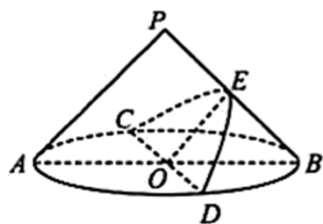
- A. 48 B. 36 C. 42 D. 31

8. 已知向量 $\vec{a} = 1, \vec{b} = \left(\frac{1}{2}, m\right)$ ，若 $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$ ，则实数 m 的值为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\pm \frac{1}{2}$ D. $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

9. 如图，圆锥底面半径为 $\sqrt{2}$ ，体积为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ ， AB 、 CD 是底面圆 O 的两条互相垂直的直径， E 是母线 PB 的中点，已知过 CD 与 E 的平面与圆锥侧面的交线是以 E 为顶点的抛物线的一部分，则该抛物线的焦点到圆锥顶点 P 的距

离等于 ()

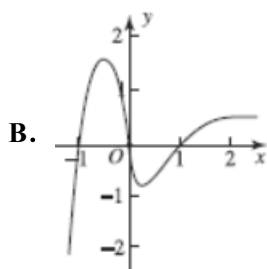
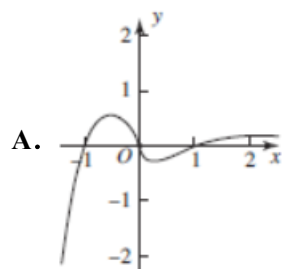


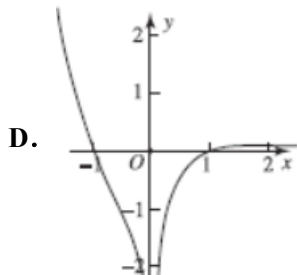
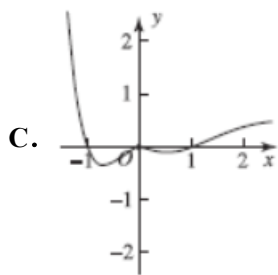
- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{\sqrt{10}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

10. 小明有 3 本作业本，小波有 4 本作业本，将这 7 本作业本混放在一起，小明从中任取两本.则他取到的均是自己的作业本的概率为()

- A. $\frac{1}{7}$ B. $\frac{2}{7}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{18}{35}$

11. 函数 $f(x) = \frac{x \ln |x|}{e^x}$ 的大致图象为 ()





12. 已知 x, y 满足不等式
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq t \\ 2x + y \leq 4 \end{cases}$$
, 且目标函数 $z = 9x + 6y$ 最大值的变化范围 $[20, 22]$, 则 t 的取值范围 ()

A. $[2, 4]$ B. $[4, 6]$ C. $[5, 8]$ D. $[6, 7]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_n + S_n = 32 (n \in \mathbb{N}^*)$, 则 $S_5 = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 已知三棱锥 $A-BCD$ 中, $AD = AC = BC = BD = 3$, $AB = CD = 2$, 则该三棱锥的外接球的表面积是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 若变量 x, y 满足约束条件
$$\begin{cases} x - y + 2 \geq 0 \\ 3x + y \leq 0 \\ x + y \geq 0 \end{cases}$$
, 则 $z = 3x + 2y$ 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 甲、乙、丙、丁 4 名大学生参加两个企业的实习, 每个企业两人, 则“甲、乙两人恰好在同一企业”的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $(\sin A - \sin B)^2 = \sin^2 C - \sin A \sin B$.

(I) 求 C ;

(II) 若 $c = 1$, $\triangle ABC$ 的周长是否有最大值? 如果有, 求出这个最大值, 如果没有, 请说明理由.

18. (12 分) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 左、右顶点分别为 A, B , 过左焦点的直线 l 交椭圆 E 于 C, D 两点 (异于 A, B 两点), 当直线 l 垂直于 x 轴时, 四边形 $ABCD$ 的面积为 1.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设直线 AC, BD 的交点为 Q ; 试问 Q 的横坐标是否为定值? 若是, 求出定值; 若不是, 请说明理由.

19. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 直线 $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$ 过椭圆 C 的右焦点 F , 过 F 的直线 m 交椭圆 C 于 M, N 两点 (均异于左、右顶点).

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 已知直线 $l: x = 4$, A 为椭圆 C 的右顶点. 若直线 AM 交 l 于点 P , 直线 AN 交 l 于点 Q , 试判断 $(\overrightarrow{FP} + \overrightarrow{FQ}) \cdot \overrightarrow{MN}$ 是否为定值, 若是, 求出定值; 若不是, 说明理由.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x - ax^2$ ($a > 0$) (其中 $e = 2.71828$ 是自然对数的底数)

(1) 若 $f(x)$ 在 R 上单调递增, 求正数 a 的取值范围;

(2) 若 $f(x)f'(x)$ 在 $x = x_1, x_2$ ($x_1 < x_2$) 处导数相等, 证明: $x_1 + x_2 < 2 \ln 2a$;

(3) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 证明: 对于任意 $k \leq \frac{1}{e} + 1$, 若 $b < \frac{1}{2}$, 则直线 $y = kx + b$ 与曲线 $y = f(x)$ 有唯一公共点 (注: 当 $k > 1$ 时, 直线 $y = x + k$ 与曲线 $y = e^x$ 的交点在 y 轴两侧).

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = x^2 - a \ln x$, $a \in R$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极值, 求 a 的值;

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上的最小值;

(3) 在 (1) 的条件下, 若 $h(x) = x^2 - f(x)$, 求证: 当 $1 < x < e^2$ 时, 恒有 $x < \frac{4 + h(x)}{4 - h(x)}$ 成立.

22. (10 分) 某百货商店今年春节期间举行促销活动, 规定消费达到一定标准的顾客可进行一次抽奖活动, 随着抽奖活动的有效开展, 参与抽奖活动的人数越来越多, 该商店经理对春节前 7 天参加抽奖活动的人数进行统计, y 表示第 x 天参加抽奖活动的人数, 得到统计表格如下:

x	1	2	3	4	5	6	7
y	5	8	8	10	14	15	17

(1) 经过进一步统计分析, 发现 y 与 x 具有线性相关关系. 请根据上表提供的数据, 用最小二乘法求出 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$;

(2) 该商店规定: 若抽中“一等奖”, 可领取 600 元购物券; 抽中“二等奖”可领取 300 元购物券; 抽中“谢谢惠顾”, 则没有购物券. 已知一次抽奖活动获得“一等奖”的概率为 $\frac{1}{6}$, 获得“二等奖”的概率为 $\frac{1}{3}$. 现有张、王两位先生参与了本次活动, 且他们是否中奖相互独立, 求此二人所获购物券总金额 X 的分布列及数学期望.

参考公式: $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}$, $\sum_{i=1}^7 x_i y_i = 364$, $\sum_{i=1}^7 x_i^2 = 140$.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

利用通项公式找到 x^5 的系数，令其等于-10 即可.

【详解】

二项式展开式的通项为 $T_{r+1} = C_5^r (x^{\frac{1}{2}})^{5-r} (mx^2)^r = m^r C_5^r x^{\frac{5}{2}r - \frac{5}{2}}$ ，令 $\frac{5}{2}r - \frac{5}{2} = 5$ ，得 $r = 3$ ，

则 $T_4 = m^3 C_5^3 x^5 = -10x^5$ ，所以 $m^3 C_5^3 = -10$ ，解得 $m = -1$.

故选：C

【点睛】

本题考查求二项展开式中特定项的系数，考查学生的运算求解能力，是一道容易题.

2、B

【解析】

根据抛物线定义得 $|AF| = 6 + \frac{p}{2}$ ，即可解得结果.

【详解】

因为 $|AF| = 2p = 6 + \frac{p}{2}$ ，所以 $p = 4$.

故选 B

【点睛】

本题考查抛物线定义，考查基本分析求解能力，属基础题.

3、C

【解析】

$E(\xi) = (-1) \times \frac{1}{3}(1-p) + \frac{1}{3}p = \frac{2}{3}p - \frac{1}{3}$ ， $D(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi)$ ，判断其在 $(\frac{2}{3}, \frac{3}{4})$ 内的单调性即可.

【详解】

解：根据题意 $E(\xi) = (-1) \times \frac{1}{3}(1-p) + \frac{1}{3}p = \frac{2}{3}p - \frac{1}{3}$ 在 $p \in (\frac{2}{3}, \frac{3}{4})$ 内递增，

$$E(\xi^2) = (-1)^2 \times \frac{1}{3}(1-p) + \frac{1}{3}p = \frac{1}{3}$$

$$D(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi) = \frac{1}{3}(1-p) + \frac{1}{3}p - \left(\frac{2}{3}p - \frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{4}{9}p^2 + \frac{4}{9}p + \frac{2}{9} = -\frac{4}{9}\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3},$$

是以 $p = \frac{1}{2}$ 为对称轴，开口向下的抛物线，所以在 $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right)$ 上单调递减，

故选：C.

【点睛】

本题考查了利用随机变量的分布列求随机变量的期望与方差，属于中档题.

4、C

【解析】

根据“数”排在第三节，则“射”和“御”两门课程相邻有 3 类排法，再考虑两者的顺序，有 $A_2^2 = 2$ 种，剩余的 3 门全排列，即可求解.

【详解】

由题意，“数”排在第三节，则“射”和“御”两门课程相邻时，可排在第 1 节和第 2 节或第 4 节和第 5 节或第 5 节和第 6 节，有 3 种，再考虑两者的顺序，有 $A_2^2 = 2$ 种，

剩余的 3 门全排列，安排在剩下的 3 个位置，有 $A_3^3 = 6$ 种，

所以“六艺”课程讲座不同的排课顺序共有 $3 \times 2 \times 6 = 36$ 种不同的排法.

故选：C.

【点睛】

本题主要考查了排列、组合的应用，其中解答中认真审题，根据题设条件，先排列有限制条件的元素是解答的关键，着重考查了分析问题和解决问题的能力，属于基础题.

5、D

【解析】

依题意，可得 $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ 上单调递增，于是可得 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ 上的值域为 $[a(e+2), e^2a]$ ，继而可得

$$a\left(e^2 - e - 2\right) \left(1 - \frac{1}{e}\right) = e^2 - 1, \text{ 解之即可.}$$

【详解】

$$\text{解: } f'(x) = a\left(e^2 - \frac{2}{x}\right) = \frac{a(e^2x - 2)}{x}, \text{ 因为 } x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right], a > 0,$$

所以 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ 上单调递增,

则 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ 上的值域为 $[a(e+2), e^2 a]$,

因为所有点 $(s, f(t)) (s, t \in D)$ 所构成的平面区域面积为 $e^2 - 1$,

所以 $a(e^2 - e - 2) \left(1 - \frac{1}{e}\right) = e^2 - 1$,

解得 $a = \frac{e}{e-2}$,

故选: D.

【点睛】

本题考查利用导数研究函数的单调性, 理解题意, 得到 $a(e^2 - e - 2)(1 - \frac{1}{e}) = e^2 - 1$ 是关键, 考查运算能力, 属于中档题.

6、B

【解析】

设点 B 位于第二象限, 可求得点 B 的坐标, 再由直线 BF_2 与直线 $y = \frac{b}{a}x$ 垂直, 转化为两直线斜率之积为 -1 可得出 $\frac{b^2}{a^2}$

的值, 进而可求得双曲线 C 的离心率.

【详解】

设点 B 位于第二象限, 由于 $BF_1 \perp x$ 轴, 则点 B 的横坐标为 $x_B = -c$, 纵坐标为 $y_B = -\frac{b}{a}x_B = \frac{bc}{a}$, 即点 $B\left(-c, \frac{bc}{a}\right)$,

由题意可知, 直线 BF_2 与直线 $y = \frac{b}{a}x$ 垂直, $k_{BF_2} = \frac{-\frac{bc}{a}}{2c} = -\frac{b}{2a} = -\frac{a}{b}$, $\therefore \frac{b^2}{a^2} = 2$,

因此, 双曲线的离心率为 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{3}$.

故选: B.

【点睛】

本题考查双曲线离心率的计算, 解答的关键就是得出 a 、 b 、 c 的等量关系, 考查计算能力, 属于中等题.

7、D

【解析】

试题分析: 由于在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 由 $a_2 a_6 = 64$ 可得: $a_3 a_5 = a_2 a_6 = 64$,

又因为 $a_3 + a_5 = 20$,

所以有: a_3, a_5 是方程 $x^2 - 20x + 64 = 0$ 的二实根, 又 $a_n > 0$, $q > 1$, 所以 $a_3 < a_5$,

故解得: $a_3 = 4, a_5 = 16$, 从而公比 $q = \sqrt{\frac{a_5}{a_3}} = 2, a_1 = 1$;

那么 $S_5 = \frac{2^5 - 1}{2 - 1} = 31$,

故选 D.

考点: 等比数列.

8、D

【解析】

由两向量垂直可得 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$, 整理后可知 $|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$, 将已知条件代入后即可求出实数 m 的值.

【详解】

解: $\because (\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$, $\therefore (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$, 即 $|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$,

将 $|\vec{a}| = 1$ 和 $|\vec{b}|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + m^2$ 代入, 得出 $m^2 = \frac{3}{4}$, 所以 $m = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选:D.

【点睛】

本题考查了向量的数量积, 考查了向量的坐标运算. 对于向量问题, 若已知垂直, 通常可得到两个向量的数量积为 0, 继而结合条件进行化简、整理.

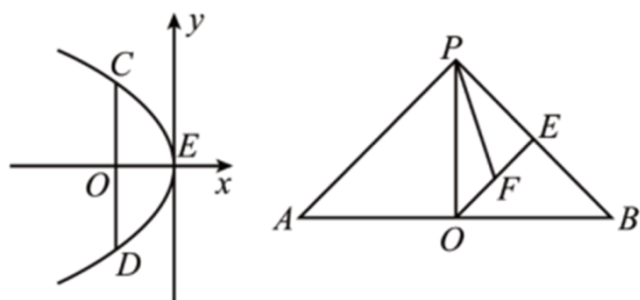
9、D

【解析】

建立平面直角坐标系, 求得抛物线的轨迹方程, 解直角三角形求得抛物线的焦点到圆锥顶点 P 的距离.

【详解】

将抛物线放入坐标系, 如图所示,



$$\because PO = \sqrt{2}, OE = 1, OC = OD = \sqrt{2},$$

$$\therefore C(-1, \sqrt{2}), \text{ 设抛物线 } y^2 = 2px, \text{ 代入 } C \text{ 点,}$$

$$\text{可得 } y^2 = -2x$$

$$\therefore \text{焦点为 } \left(-\frac{1}{2}, 0\right),$$

即焦点为 OE 中点, 设焦点为 F ,

$$EF = \frac{1}{2}, PE = 1, \therefore PF = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

故选: D

【点睛】

本小题考查圆锥曲线的概念, 抛物线的性质, 两点间的距离等基础知识; 考查运算求解能力, 空间想象能力, 推理论证能力, 应用意识.

10、A

【解析】

利用 $P = \frac{n_A}{n}$ 计算即可, 其中 n_A 表示事件 A 所包含的基本事件个数, n 为基本事件总数.

【详解】

从 7 本作业本中任取两本共有 C_7^2 种不同的结果, 其中, 小明取到的均是自己的作业本有 C_3^2 种不同结果,

由古典概型的概率计算公式, 小明取到的均是自己的作业本的概率为 $\frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{1}{7}$.

故选: A.

【点睛】

本题考查古典概型的概率计算问题, 考查学生的基本运算能力, 是一道基础题.

11、A

【解析】

利用特殊点的坐标代入, 排除掉 C, D; 再由 $f(-\frac{1}{2}) < 1$ 判断 A 选项正确.

【详解】

$$f(-1.1) = \frac{-1.1 \ln |1.1|}{e^{1.1}} < 0, \text{ 排除掉 C, D;}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/758006041134007003>