

## 吕梁市 2023-2024 学年高二第一学期期末调研测试

## 数学试题

(本试题满分 150 分, 考试时间 120 分钟. 答案一律写在答题卡上)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上, 认真核对条形码上的姓名、准考证号, 并将条形码粘贴在答题卡的指定位置上.
2. 答题时使用 0.5 毫米的黑色中性(签字)笔或碳素笔书写, 字体工整、笔迹清楚.
3. 请按照题号在各题的答题区域(黑色线框)内作答, 超出答题区域书写的答案无效.
4. 保持卡面清洁, 不折叠, 不破损.

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知圆  $O: x^2 + y^2 - 4x + 6y + 5 = 0$ , 则圆心  $O$  和半径  $r$  分别为 ( )

- A.  $O(-2, 3), r = 3\sqrt{2}$                       B.  $O(2, -3), r = 2\sqrt{2}$   
C.  $O(-2, 3), r = 2\sqrt{2}$                       D.  $O(2, -3), r = 3\sqrt{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】将圆的一般方程化为标准方程, 由此确定圆心坐标及半径.

【详解】圆  $O$  的方程  $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 5 = 0$  可化为  $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 8$ .所以圆心  $O$  的坐标为  $(2, -3)$ , 半径为  $2\sqrt{2}$ ,

故选: B.

2. 双曲线  $C: \frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{4} = 1$ , 则双曲线  $C$  的渐近线方程为 ( )

- A.  $y = \pm 2\sqrt{3}x$                       B.  $y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}x$                       C.  $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x$                       D.  $y = \pm \sqrt{3}x$

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意, 结合双曲线的几何性质, 即可求解.

【详解】由双曲线  $C: \frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{4} = 1$ , 可得  $a = \sqrt{3}, b = 2$ ,

又由双曲线  $C$  的焦点在  $y$  轴上, 所以双曲线  $C$  的渐近线方程为  $y = \pm \frac{a}{b}x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x$ .

故选: C.

3. 已知正项等比数列  $\{a_n\}$  满足  $a_4 = 16, a_6 = 64$ , 则  $S_5 =$  ( )

- A. 62                      B. 30 或 10                      C. 62 或 -22                      D. 30

【答案】A

【解析】

【分析】运用等比数列通项公式基本量的计算, 先求出首项和公比, 然后再运用等比数列前  $n$  项和公式求出前项和.

【详解】设等比数列  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ ,

因为该正项等比数列  $\{a_n\}$  满足  $a_4 = 16, a_6 = 64$ ,

$$\text{所以 } \begin{cases} a_4 = a_1 q^3 = 16 \\ a_6 = a_1 q^5 = 64 \\ q > 0 \end{cases}, \text{ 解得 } a_1 = 2, q = 2,$$

$$\text{故 } S_5 = \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} = \frac{2(1-2^5)}{1-2} = 62.$$

故选: A.

4. 若函数  $f(x) = x(x-c)^2$  在  $x = -2$  处有极小值, 则  $c =$  ( )

- A. -6                      B. -2                      C. -6 或 -2                      D. -4

【答案】A

【解析】

【分析】求得  $f'(x) = (x-c)(3x-c)$ , 由  $f'(-2) = 0$ , 求得  $c = -2$  或  $c = -6$ , 分别求得函数  $f(x)$  的单调区间, 结合函数极值点的定义, 即可求解.

【详解】由函数  $f(x) = x(x-c)^2$ , 可得  $f'(x) = (x-c)^2 + 2x(x-c) = (x-c)(3x-c)$ ,

因为函数在  $x = -2$  处取得极小值, 可得  $f'(-2) = 0$ , 解得  $c = -2$  或  $c = -6$ ,

当  $c = -2$  时, 令  $f'(x) > 0$ , 解得  $x < -2$  或  $x > -\frac{2}{3}$ ; 令  $f'(x) < 0$ , 解得  $-2 < x < -\frac{2}{3}$ ,

函数  $f(x)$  在  $(-\infty, -2)$  上单调递增, 在  $(-2, -\frac{2}{3})$  上单调递减, 在  $(-\frac{2}{3}, +\infty)$  单调递增,

所以  $f(x)$  在  $x = -2$  处有极大值, 不符合题意, 舍去;

当  $c = -6$  时, 令  $f'(x) > 0$ , 可得  $x < -6$  或  $x > -2$ ; 令  $f'(x) < 0$ , 可得  $-6 < x < -2$ ,

函数  $f(x)$  在  $(-\infty, -6)$  上单调递增, 在  $(-6, -2)$  上单调递减, 在  $(-2, +\infty)$  单调递增,

所以  $f(x)$  在  $x = -2$  处有极小值, 符合题意,

综上可得,  $c = -6$ .

故选: A.

5. 函数  $f(x) = \frac{1}{4}x - \ln x$  的零点个数为 ( )

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】求导可得函数的单调性, 进而结合零点存在性定理即可求.

【详解】 $f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{x}$ , 令  $f'(x) > 0$ , 则  $x > 4$ , 令  $f'(x) < 0$ , 解得  $0 < x < 4$ ,

故  $f(x)$  在  $x > 4$  上单调递增, 在  $x < 4$  上单调递减,

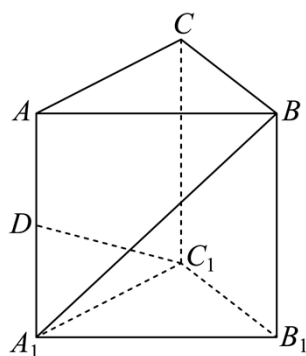
故当  $x=4$  时取最小值  $f(4) = 1 - \ln 4 < 0$ ,

又  $f(1) = \frac{1}{4} > 0$ ,  $f(e^3) = \frac{e^3}{4} - 3 > 0$ ,

所以  $f(x) = 0$  在  $(1, 4), (4, e^3)$  上各有一解, 所以  $f(x)$  有两个零点,

故选: B.

6. 如图, 正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  的各棱长相等,  $D$  为  $AA_1$  的中点, 则异面直线  $A_1B$  与  $C_1D$  所成角的余弦值为 ( )



- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       C.  $\frac{1}{2}$       D. 0

【答案】D

【解析】

【分析】取  $AC$  中点  $E$ ，证得  $BE \perp$  平面  $ACC_1A_1$ ，得到  $BE \perp C_1D$ ，再证得  $A_1E \perp C_1D$ ，从而证得  $C_1D \perp$  平面  $A_1BE$ ，得到  $C_1D \perp A_1B$ ，即可求解.

【详解】取  $AC$  中点  $E$ ，因为  $AB = BC$ ，可得  $BE \perp AC$ ，

又因为  $AA_1 \perp$  平面  $ABC$ ，且  $BE \subset$  平面  $ABC$ ，所以  $BE \perp AA_1$ ，

因为  $AC \cap AA_1 = A$ ，且  $AC, AA_1 \subset$  平面  $ACC_1A_1$ ，所以  $BE \perp$  平面  $ACC_1A_1$ ，

又因为  $C_1D \subset$  平面  $ACC_1A_1$ ，所以  $BE \perp C_1D$ ，

在正方形  $ACC_1A_1$  中， $D, E$  分别为  $AA_1, AC$  的中点，

设  $A_1E \cap C_1D = G$  可得  $\triangle A_1C_1D \cong \triangle AA_1E$ ，

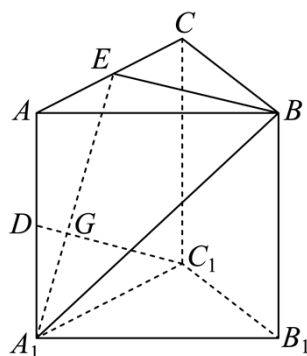
可得  $\angle A_1C_1D = \angle AA_1E, \angle A_1DC_1 = \angle AEA_1$ ，所以  $\angle AA_1E + \angle A_1DC_1 = \frac{\pi}{2}$ ，

所以  $\angle AGD = \frac{\pi}{2}$ ，即  $A_1E \perp C_1D$ ，

因为  $A_1E \cap BE = E$  且  $A_1E, BE \subset$  平面  $A_1BE$ ，所以  $C_1D \perp$  平面  $A_1BE$ ，

又因为  $A_1B \subset$  平面  $A_1BE$ ，所以  $C_1D \perp A_1B$ ，所以异面直线  $A_1B$  与  $C_1D$  所成的角为  $\frac{\pi}{2}$ .

故选：D.



7. 某工厂去年 12 月试产 1060 个高新电子产品, 产品合格率为 90%. 从今年 1 月份开始, 工厂在接下来的两年中将生产这款产品. 1 月按去年 12 月的产量和产品合格率生产, 以后每月的产量都在前一个月的基础上提高 6%, 产品合格率比前一个月增加 0.4%, 则今年 4 月份的不合格产品的数量是 ( )

- A.  $1.06^5 \times 88$       B.  $1.06^4 \times 88$       C.  $1.06^4 \times 84$       D.  $1.06^5 \times 84$

【答案】B

【解析】

【分析】由条件依次求出 1, 2, 3, 4 月的产量和合格率, 由此可求 4 月份的不合格产品的数量.

【详解】由题知: 1 月份的产量为 1060 个, 合格率是 90%,  
那么, 2 月份的产量为  $1060 \times 1.06$ , 合格率为  $90\% + 0.4\%$ ,

3 月份的产量为  $1060 \times 1.06^2$ , 合格率为  $90\% + 0.4\% \times 2$ ,

则 4 月份的产量为  $1060 \times 1.06^3$ , 合格率为  $90\% + 0.4\% \times 3 = 91.2\%$ ,

则 4 月份的不合格数量是  $1060 \times 1.06^3 \times (1 - 91.2\%) = 1.06^4 \times 88$ ,

故选: B.

8. 若  $a = 0.7, b = e^{-0.3}, c = \ln 1.7$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为 ( )

- A.  $b > a > c$       B.  $b > c > a$       C.  $c > a > b$       D.  $a > b > c$

【答案】A

【解析】

【分析】构造函数  $f(x) = e^x - x - 1$ ,  $g(x) = x - 1 - \ln x, (x > 0)$ , 利用导数求函数最小值, 得到  $e^x \geq x + 1$  和  $x - 1 \geq \ln x$ , 令  $x = 0.7$  即可比较大小.

【详解】令  $f(x) = e^x - x - 1$ , 则  $f'(x) = e^x - 1$ ,

当  $x > 0$  时,  $e^x > 1$ , 所以  $f'(x) > 0$ , 所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增;

当  $x < 0$  时,  $0 < e^x < 1$ , 所以  $f'(x) < 0$ , 所以  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递增,

所以当  $x = 0$  时,  $f(x)_{\min} = f(0) = e^0 - 1 = 0$ ,

所以  $f(x) \geq 0$ , 即  $e^x \geq x + 1$ , 所以  $e^{x-1} \geq x$ , 所以  $e^{-0.3} \geq 0.7$ ,

令  $g(x) = x - 1 - \ln x, (x > 0)$ , 则  $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ ,

当  $x > 1$  时,  $g'(x) > 0$ , 所以  $g(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增;

当  $0 < x < 1$  时,  $g'(x) < 0$ , 所以  $g(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递减;

所以, 当  $x = 1$  时,  $g(x)_{\min} = g(1) = 1 - 1 - \ln 1 = 0$ ,

所以  $g(x) \geq 0$ , 即  $x - 1 \geq \ln x$ , 所以  $x \geq \ln(x + 1)$ , 所以  $0.7 > \ln 1.7$ ,

所以  $e^{-0.3} > 0.7 > \ln 1.7$ .

故选: A.

**二、选择题:** 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项是符合题目要求的, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 设抛物线  $E: x^2 = 2py (p > 0)$  的焦点为  $F$ , 准线为  $y = -1$ , 点  $A, B$  是抛物线  $E$  上不同的两点, 且

$|AF| + |BF| = 8$ , 则 ( )

A.  $p = 2$

B. 以线段  $AB$  为直径的圆必与准线相切

C. 线段  $AB$  的长为定值

D. 线段  $AB$  的中点  $M$  到  $x$  轴的距离为定值

**【答案】** AD

**【解析】**

**【分析】** 根据题意, 求得抛物线  $x^2 = 4y$  及焦点  $F(0, 1)$ , 结合抛物线的几何性质, 逐项判定, 即可求解.

**【详解】** 对于 A 中, 由抛物线  $E: x^2 = 2py (p > 0)$  的准线为  $y = -1$ , 可得  $-\frac{p}{2} = -1$ , 解得  $p = 2$ ,

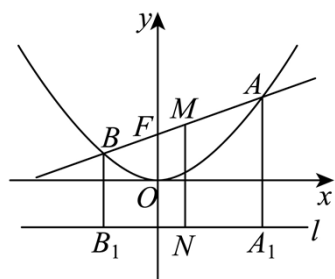
所以抛物线  $E$  的焦点为  $F(0, 1)$  且  $E: x^2 = 4y$ , 所以 A 正确;

对于 B 中, 如图, 当线段  $AB$  过焦点  $F$  时, 过  $A, B$  作  $AA_1 \perp l, BB_1 \perp l$ ,

取  $AB$  的中点  $M$  作  $MN \perp l$ , 可得  $|MN| = \frac{1}{2}(|AA_1| + |BB_1|) = \frac{1}{2}|AB|$ ,

此时以线段  $AB$  为直径的圆与准线  $l$  相切,

因为直线  $AB$  不一定过抛物线的焦点, 则  $|MN| = \frac{1}{2}|AB|$  不一定成立, 故 B 错误.



对于 C 中, 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ,

由抛物线得的定义得  $|AF| + |BF| = y_1 + y_2 + 2 = 8$ , 所以  $y_1 + y_2 = 6$ ,

当直线  $AB$  过原点时, 设  $y_1 = 0$ , 则  $y_2 = 6$ , 此时  $A(0, 0), B(\pm 2\sqrt{6}, 6)$ , 可得  $|AB| = 2\sqrt{15}$ ,

当直线  $AB$  为 0 时, 可得  $y_1 = y_2 = 3$ , 不妨设  $x_1 = -2\sqrt{3}, x_2 = 2\sqrt{3}$ , 可得  $|AB| = 4\sqrt{3}$ ,

所以  $|AB|$  的长不是定值, 所以 C 错误;

对于 D 中, 由  $y_1 + y_2 = 6$ , 则线段  $AB$  的中点  $M$  到  $x$  轴的距离为  $\frac{y_1 + y_2}{2} = 3$ , 所以 D 正确.

故选: AD.

10. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的首项  $a_1 = 16$ , 公差  $d = -4$ , 在  $\{a_n\}$  中每相邻两项之间都插入 3 个数, 使它们和原数列的数一起构成一个新的等差数列  $\{b_n\}$ ,  $S_n$  是数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和. 以下说法正确的是 ( )

A.  $b_n = n + 15$

B.  $b_{29}$  是数列  $\{a_n\}$  的第 8 项

C. 当  $n = 17$  时,  $S_n$  最大

D.  $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$  是公差为  $-1$  的等差数列

【答案】BC

【解析】

【分析】根据题意, 求得  $a_n = 20 - 4n$ , 结合题意, 得到  $b_n = 17 - n$ , 结合等差数列的性质的求和公式, 逐项判定, 即可求解.

【详解】由等差数列  $\{a_n\}$  的首项  $a_1 = 16$ , 公差  $d = -4$ , 可得  $a_n = 20 - 4n$ ,

对于 A 中, 根据题意, 可得  $b_1 = 16, b_5 = a_2 = 12$ , 所以公差为  $d' = \frac{12-16}{5-1} = -1$ ,

所以数列  $\{b_n\}$  的通项公式为  $b_n = b_1 + (n-1)d' = 17 - n$ , 所以 A 错误;

对于 B 中, 由  $b_{29} = -12$ , 令  $a_n = 20 - 4n = -12$ , 解得  $n = 8$ , 所以 B 正确;

对于 C 中, 令  $b_n = 17 - n \geq 0$ , 解得  $n \leq 17$ , 所以  $n = 16$  或  $n = 17$  时,  $S_n$  取得最大值, 所以 C 正确;

对于 D 中, 由  $S_n = \frac{n(33-n)}{2}$ , 可得  $\frac{S_n}{n} = \frac{33-n}{2} = \frac{33}{2} - \frac{1}{2}n$ , 所以  $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$  是公差为  $-\frac{1}{2}$ , 所以 D 错误.

故选: BC.

11. 已知函数  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ , 下列说法正确的是 ( )

A.  $f(x)$  的单调递减区间是  $(0, e)$

B.  $f(x)$  在点  $(e^2, f(e^2))$  处的切线方程是  $x - 4y + e^2 = 0$

C. 若方程  $a \ln x = x$  只有一个解, 则  $a = e$

D. 设  $g(x) = x^2 + a$ , 若对  $\forall x_1 \in \mathbb{R}, \exists x_2 \in (1, +\infty)$ , 使得  $g(x_1) = f(x_2)$  成立, 则  $a \geq e$

【答案】BD

【解析】

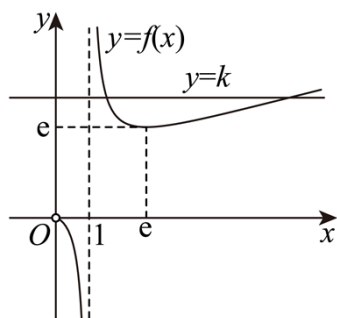
【分析】对函数  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$  求导, 分析其单调性得到其图象, 可判断 ABC, 对应选项 D, 设函数

$f(x) (x \in (1, +\infty))$  的值域为  $E$ ,  $g(x) = x^2 + a$  的值域为  $G$ , 由  $G \subseteq E$  求解判断.

【详解】函数  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ ,  $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ ,  $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$ ,

令  $f'(x) < 0$ , 得  $0 < x < 1$  或  $1 < x < e$ ; 令  $f'(x) > 0$ , 得  $x > e$ ;

可得函数  $f(x)$  在  $(0, 1)$  和  $(1, e)$  上单调递减, 在  $(e, +\infty)$  单调递增, 其大致图象如图:



对于 A, 由上述分析可得 A 错误;

对于 B, 由  $f'(e^2) = \frac{\ln e^2 - 1}{\ln^2 e^2} = \frac{1}{4}$ ,  $f(e^2) = \frac{e^2}{2}$ , 得  $y - \frac{e^2}{2} = \frac{1}{4}(x - e^2)$ ,

所以切线为  $x - 4y + e^2 = 0$ , 故 B 正确;

对于 C, 由方程  $f(x) = \frac{x}{\ln x} = a$  只有一解, 由图象可知,  $a = e$  或  $a < 0$ , 故 C 错误;

对于 D, 设函数  $g(x) (x \in \mathbb{R})$  的值域为  $G$ , 函数  $f(x) (x \in (1, +\infty))$  的值域为  $E$ ,

对于  $g(x) = x^2 + a$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $G = [a, +\infty)$ ,

对于  $f(x)$ ,  $\forall x \in (1, +\infty)$ ,  $E = [e, +\infty)$ ,

若  $\forall x_1 \in \mathbb{R}$ ,  $\exists x_2 \in (1, +\infty)$ , 使得  $g(x_1) = f(x_2)$  成立,

则  $G \subseteq E, \therefore a \geq e$ , 故 D 正确,

故选: BD.

12. 已知正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 2,  $O$  是空间中的一动点, 下列结论正确的是 ( )

A. 若  $M, N, P$  分别为  $AB, BB_1, B_1C_1$  的中点, 则  $BD_1 \perp$  平面  $MNP$

B. 平面  $A_1BC_1 //$  平面  $ACD_1$

C. 若  $\vec{AO} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \lambda\vec{AD} (0 \leq \lambda \leq 1)$ , 则  $B_1O + OD$  的最小值为  $\sqrt{13}$

D. 若  $\vec{AO} = \lambda\vec{AB} + (1 - \lambda)\vec{AD} (0 \leq \lambda \leq 1)$ , 则平面  $OAD_1$  截正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  所得截面面积的最大值为  $4\sqrt{2}$

【答案】BCD

【解析】

【分析】由线面垂直, 面面平行判断 AB, 由平面展开求最值判断 C, 由截面变化求最值判断 D.

【详解】对于 A, 若  $M, N$ , 分别为  $AB, BB_1$  的中点, 则  $AB_1 // MN$ ,

又  $AB_1 \perp A_1B$ , 则  $A_1B \perp MN$ ,

又由正方体性质易知:  $BC \perp$  平面  $ABB_1A_1, MN \subset$  平面  $ABB_1A_1$ , 故  $BC \perp MN$ ,

又  $BC \cap A_1B = B, BC, A_1B \subset$  平面  $A_1BC$ , 故  $MN \perp$  平面  $A_1BC$ ,

又  $A_1C \subset$  平面  $A_1BC$ , 则  $MN \perp A_1C$ , 同理可得  $NP \perp$  平面  $A_1B_1C$ ,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/758016016020007022>