佳一中 2022－2023 学年度高二上学期期末考试

数学试题

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的准线方程是

A. $x=-1$ B. $x=-2$

C. $y=-1$ D. $y=-2$

【答案】C

【解析】

【详解】试题分析：由题意得，抛物线可化为 $x^2=4y$，则 $p=2$，所以准线方程为 $y=-1$，故选 C.

考点：抛物线的几何性质.

2. 已知 A，B，C，D，E 是空间中的五个点，其中点 A，B，C 不共线，则“存在实数 x，y，使得 $\overrightarrow{DE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ 是“DE // 平面 ABC”的（ ）

A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】利用存在实数 x，y，使得 $\overrightarrow{DE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow DE$ // 平面 ABC 或 $DE\subset$ 平面 ABC，结合充分必要条件 定义即可求解.

【详解】若 DE // 平面 ABC，则 $\overrightarrow{DE},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 共面，故存在实数 x，y，使得 $\overrightarrow{DE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，所以必要性成立；

若存在实数 x，y，使得 $\overrightarrow{DE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则 $\overrightarrow{DE},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 共面，则 DE // 平面 ABC 或 $DE\subset$ 平面 ABC，所以充分性不成立；

所以 “存在实数 x，y，使得 $\overrightarrow{DE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ 是“DE // 平面 ABC”的必要不充分条件，

故选：B

【点睛】关键点点睛：本题考查空间向量共面的问题，理清存在实数 x，y，使得 $\overrightarrow{DE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow DE//$ 平面 ABC 或 $DE\subset$ 平面 ABC 是解题的关键，属于基础题.

3. 已知直线 $l_1: x-2y-1=0, l_2: 2x+my+2\sqrt{5}-2=0$，若 $l_1 // l_2$，则 l_1 与 l_2 之间的距离为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. $\dfrac{5-2\sqrt{5}}{5}$　　D. $\dfrac{5+2\sqrt{5}}{5}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据直线平行求出 m，再由平行线间的距离公式求解即可.

【详解】因为 $l_1 // l_2$，所以 $m+4=0$，解得 $m=-4$，经检验符合题意；

所以 $l_2: x-2y+\sqrt{5}-1=0$，

所以 l_1 与 l_2 之间的距离 $d=\dfrac{|-1-\sqrt{5}+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=1$，

故选：A

4. 中国古人所使用的音阶是“五声音阶”，即“宫徵（*zhǐ*）商羽角（*jué*）”五个音，中国古代关于这五个音阶的律学理论，叫做“三分损益法”，相关记载最早见于春秋时期《管子 地缘篇》. “三分损益”包含“三分损一”和“三分益一”两层含义，“三分损一”是指将原有长度作三等分而减去其一份生得长度，“三分益一”是指将原有长度作三等分而增添其一份生得长度. 具体来说，以一段圆径绝对均匀的发声管为基数——宫（称为“基本音”），宫管的“三分损一”为徵管，徵管发出的声音即为徵，徵管的“三分益一”为商管，商管发出的声音即为商，商管的“三分损一”为羽管，羽管的“三分益一”为角管，由此“宫、徵、商、羽、角”五个音阶就生成了. 关于五音，下列说法中不正确的是（　　）

A. 五音管中最短的音管是羽管

B. 假设基本音的管长为 81，则角管的长度为 64

C. 五音管中最长的音管是商管

D. 类比题中的“三分损益”可推算：商的“四分损一”为徵

【答案】C

【解析】

【分析】设宫管的长为 a，即可表示出徵、商、羽、角的管长，即可判断 A，B，C；根据“三分损益”的含义可求得商的“四分损一”为徵，判断 D.

【详解】不妨设宫管的长为 a，则徵管的长为 $\frac{2}{3}a$，商管的长为 $\frac{2}{3}a\cdot\frac{4}{3}=\frac{8}{9}a$，

羽管的长为 $\frac{8}{9}a\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{27}a$，角管的长为 $\frac{16}{27}a\cdot\frac{4}{3}=\frac{64}{81}a$，

而 $a>\frac{8}{9}a>\frac{64}{81}a>\frac{2}{3}a>\frac{16}{27}a$，

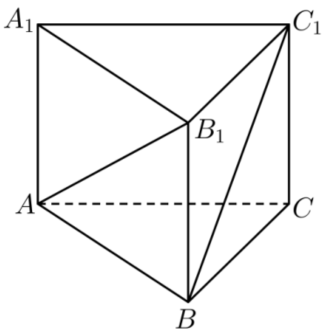
故最长的音管是宫管，最短的音管是羽管，故选项 A 正确，选项 C 错误；

令 $a=81$，即基本音的管长为 81，则 $\frac{64}{81}a=64$，即角管的长度为 64，故选项 B 正确；

商的“四分损一”为 $\frac{8}{9}a\cdot\frac{3}{4}=\frac{2}{3}a$，即为徵，选项 D 正确，

故选：C.

5. 如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，若 $AB=\sqrt{2}BB_1=2$，则 C 到直线 AB_1 的距离为（　　）



A. $\frac{\sqrt{15}}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{15}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{30}}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】取 AC 的中点 O，建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$，根据点到线距离的向量求法和投影的定义计算即可.

【详解】由题意知，$AC=AB=2$，$BB_1=\sqrt{2}$，

取 AC 的中点 O，则 $BO\perp AC$，$BO=\sqrt{3}$，

建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$，

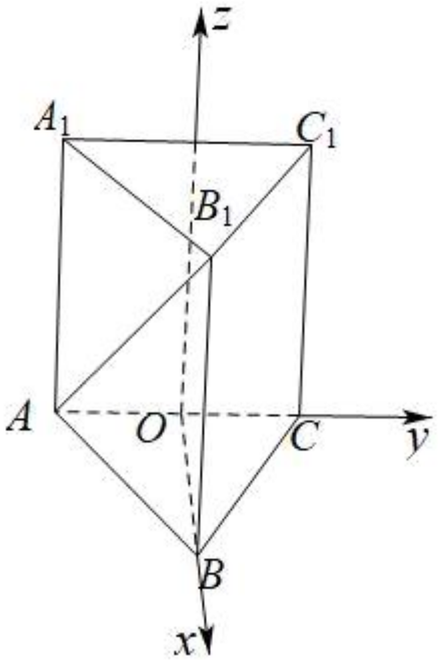
则 $A(0,-1,0)$，$B_1(\sqrt{3},0,\sqrt{2})$，$C(0,1,0)$，

所以 $\overrightarrow{AB_1}=(\sqrt{3},1,\sqrt{2}),\overrightarrow{CA}=(0,-2,0)$，

所以$\overrightarrow{CA}$在$\overrightarrow{AB_1}$上的投影的长度为$\dfrac{\left|\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB_1}\right|}{\left|\overrightarrow{AB_1}\right|}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,

故点C到直线AB_1的距离为：$d=\sqrt{|AC|^2-(\dfrac{\sqrt{6}}{3})^2}=\dfrac{\sqrt{30}}{3}$.

故选：D



6. 已知过点$(0,2)$的直线l与圆心为C的圆$(x-2)^2+(y-1)^2=10$相交于A，B两点，当$\triangle ABC$面积最大时，直线l的方程为（　　）

A. $2x-y+2=0$

B. $2x-y+2=0$或$2x+y-2=0$

C. $x=0$

D. $x=0$或$2x+y-2=0$

【答案】A

【解析】

【分析】由三角形面积公式结合正弦函数的性质得出当$\angle ACB=90°$时$\triangle ABC$面积最大，设出直线l的方程，确定圆心到直线l的距离，列出方程，求解得出直线l的方程.

【详解】$\triangle ABC$的面积$=\dfrac{1}{2}r^2\sin\angle ACB\le\dfrac{1}{2}r^2$，当仅当$\angle ACB=90°$时“=”成立，此时点$C$到直线$l$的距离为$d(C,l)=\sqrt{10}\cos45°=\sqrt{5}$.

当直线l的斜率不存在时，即l：$x=0$，此时圆心到直线l的距离为2，不满足题意；

当直线l的斜率存在时，设l：$y=kx+2$，则$\frac{|2k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{5}$，解得$k=2$，所以方程为$y=2x+2$.

故选：A

【点睛】关键点睛：解决本题的关键是由三角形面积公式得出当$\angle ACB=90^\circ$时$\triangle ABC$面积最大，进而由距离公式得出方程.

7. 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_1>0$，且$S_{12}=S_{15}$，则使$S_n>0$成立的最大n值为（　　）

A. 13　　　　B. 14　　　　C. 26　　　　D. 27

【答案】C

【解析】

【分析】由$S_{12}=S_{15}$可解得$a_{14}=0$，再利用等差数列的前n项和公式并结合等差数列的性质即可求解

【详解】由$S_{12}=S_{15}\Rightarrow a_{13}+a_{14}+a_{15}=0\Rightarrow 3a_{14}=0\Rightarrow a_{14}=0$

又$a_1>0$，所以公差$d<0$

$$S_{26}=\frac{26\left(a_1+a_{26}\right)}{2}=13\left(a_{13}+a_{14}\right)>0$$

$$S_{27}=\frac{27\left(a_1+a_{27}\right)}{2}=27a_{14}=0$$

所以使$S_n>0$成立的最大n值为26

故选：C

8. 已知F_1，F_2是双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$的左，右焦点，过点$F_1$倾斜角为30°的直线与双曲线的左，右两支分别交于点A，B. 若$|AF_2|=|BF_2|$，则双曲线C的离心率为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　　　B. $\sqrt{3}$　　　　C. 2　　　　D. $\sqrt{5}$

【答案】A

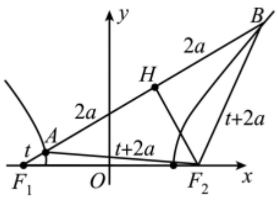
【解析】

【分析】设$|AF_1|=t$，据双曲线的定义可用t表示$|AF_2|,|BF_2|$，作$F_2H\perp AB=H$，构造直角三角形可计算得t，并用勾股定理列出了$\left(\sqrt{3}c\right)^2-c^2=\left(2a\right)^2$，进而可求$e$.

【详解】设$|AF_1|=t$，则$|AF_2|=t+2a=|BF_2|$，

从而$\left|BF_1\right|=t+4a$，进而$\left|BA\right|=4a$.

过F_2作$F_2H\perp AB=H$，则$\left|AH\right|=2a$. 如图：



在$\mathrm{Rt}\triangle F_1F_2H$中，$\left|F_2H\right|=2c\sin 30°=c$，$\left|F_1H\right|=2c\cos\theta=\sqrt{3}c=\left|AF_2\right|$；

在$\mathrm{Rt}\triangle AF_2H$中，$\left(\sqrt{3}c\right)^2-c^2=\left(2a\right)^2$，

即$2c^2=4a^2$，所以$e=\sqrt{2}$.

故选：A

【点睛】（1）焦点三角形为条件求圆锥曲线的离心率，常利用圆锥曲线的定义；

（2）求圆锥曲线的离心率，常利用有关三角形建立关于a,b,c的齐次等式，再化为e的等式可求；

（3）此题的关键是作$F_2H\perp AB=H$得直角三角形，即可求出边长，又可用来建立a,b,c的齐次等式.

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 已知$\vec{e}$为直线l的方向向量，$\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$分别为平面$\alpha,\beta$的法向量$(\alpha,\beta$不重合)，并且直线$l$均不在平面$\alpha,\beta$内，那么下列说法中正确的有（　　）

A. $\vec{e}\perp\overrightarrow{n_1}\Leftrightarrow l\,//\,\alpha$　　B. $\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}\Leftrightarrow\alpha\perp\beta$

C. $\overrightarrow{n_1}\,//\,\overrightarrow{n_2}\Leftrightarrow\alpha\,//\,\beta$　　D. $\vec{e}\perp\overrightarrow{n_1}\Leftrightarrow l\perp\alpha$

【答案】ABC

【解析】

【分析】由空间向量的位置关系对选项逐一判断，

【详解】已知直线l不在平面α内，则$\vec{e}\perp\overrightarrow{n_1}\Leftrightarrow l\,//\,\alpha$，故 A 正确，D 错误，

由空间向量的位置关系得$\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}\Leftrightarrow\alpha\perp\beta$，$\overrightarrow{n_1}\,//\,\overrightarrow{n_2}\Leftrightarrow\alpha\,//\,\beta$，故 B，C 正确，

故选：ABC

10. 已知等比数列$\left\{a_n\right\}$的各项均为实数，公比为 q，则下列结论正确的是（　　）

A. 若$a_1a_2>0$，则$a_2a_3>0$

B. 若$a_1+a_2<0$，且$a_1+a_3<0$，则$q>-1$

C. 若$a_{n+1}>a_n>0$，则$a_n+a_{n+2}>2a_{n+1}$

D. 若$a_na_{n+1}<0$，$\left(a_{n+1}-a_n\right)\left(a_{n+1}-a_{n+2}\right)<0$

【答案】ABC

【解析】

【分析】由等比数列的通项公式的应用，等比数列的性质的应用，可判断A、B、C、D的结论是否正确.

【详解】显然$q\neq 0$.A：因　$a_1a_2>0$，所以$(a_1q)\cdot(a_2q)=(a_1a_2)\cdot q^2>0$，因此本选项正确；

B：由$a_1+a_3<0\Rightarrow a_1(1+q^2)<0\Rightarrow a_1<0$，而$a_1+a_2<0\Rightarrow a_1(1+q)<0$，显然

$1+q>0\Rightarrow q>-1$，因此本选项正确；

C：由$a_{n+1}>a_n>0\Rightarrow\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1\Rightarrow q>1$，

$a_n+a_{n+2}-2a_{n+1}=a_n+a_nq^2-2a_nq=a_n\left(1-q\right)^2>0\Rightarrow a_n+a_{n+2}>2a_{n+1}$，

因此本选项正确；

D：由$a_na_{n+1}<0\Rightarrow a_n\cdot a_n\cdot q<0\Rightarrow q<0$，$(a_{n+1}-a_n)(a_nq-a_{n+1}q)=-q(a_{n+1}-a_n)^2\geq 0$，

因此本选项不正确.

故选：ABC.

11. 以下关于圆锥曲线的命题中，其中是真命题的有（　　）

A. 双曲线$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$与椭圆$\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{24}=1$有相同的焦点

B. 过双曲线$\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1$的右焦点且被双曲线截得的弦长为10的直线共有2条

C. 设A，B是两个定点，k是非零常数，若$|PA|-|PB|=k$，则动点P的轨迹是双曲线的一支

D. 动圆P过定点$F\left(1,0\right)$且与定直线l：$x=-1$相切，则圆心P的轨迹方程是$y^2=4x$

【答案】AD

【解析】

【分析】求出双曲线与椭圆的焦点坐标即可判断A；求出双曲线的实轴长及过右焦点的直线垂直x轴时所截弦长即可判断B；由双曲线的定义即可判断C；根据抛物线的定义即可判断D.

【详解】对于 A，双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$的焦点为$\left(\pm5,0\right)$，椭圆$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$的焦点为$\left(\pm5,0\right)$，故 A 正确；

对于 B，由双曲线$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$的方程知，右焦点$\left(\sqrt{34},0\right)$，实轴长为 10，所以过右焦点与双曲线左右两支各交于一点且满足弦长为 10 的直线只有 1 条；过右焦点的直线垂直 x 轴时，得两交点坐标为$(\sqrt{34},\frac{9}{5})$、$(\sqrt{34},-\frac{9}{5})$，此时弦长为$\frac{18}{5}<10$，所以过右焦点与双曲线右支相交于两点且满足弦长为 10 的直线有 2 条，综上，过双曲线的右焦点且被双曲线截得的弦长为 10 的直线共有 3 条，故 B 错误；

对于 C，当$|k|=|AB|$时，动点 P 的轨迹是一条射线，当$|k|<|AB|$时，动点 P 的轨迹是双曲线的一支，故 C 错误；

对于 D，因为动圆 P 过定点$F\left(1,0\right)$且与定直线 l：$x=-1$相切，即 P 点到$F\left(1,0\right)$的距离与到直线 l：$x=-1$的距离相等，根据抛物线的定义可得，P 点的轨迹是为以$F\left(1,0\right)$为焦点，$x=-1$为准线的抛物线，所以点 P 的轨迹方程为$y^2=4x$，故 D 正确．

故选：AD．

12. 已知F为椭圆C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$的左焦点，直线$l$：$y=kx\left(k\neq0\right)$与椭圆$C$交于 A，$B$两点，$AE\perp x$轴，垂足为$E$，$BE$与椭圆$C$的另一个交点为$P$，则（　　）

A. $\frac{1}{|AF|}+\frac{4}{|BF|}$的最小值为 2

B. $\triangle ABE$面积的最大值为$\sqrt{2}$

C. 直线BE的斜率为$\frac{1}{2}k$

D. $\angle PAB$为钝角

【答案】BC

【解析】

【分析】A 项，先由椭圆与过原点直线的对称性知，$|AF|+|BF|=4$，再利用 1 的代换利用基本不等式可得最小值$\frac{9}{4}$，A 项错误； B 项，由直线与椭圆方程联立，解得交点坐标，得出面积关于 k 的函数关系式，再求函数最值； C 项，由对称性，可设$A\left(x_0,y_0\right)$，则$B\left(-x_0,-y_0\right)$，$E\left(x_0,0\right)$，则可得直线BE的斜率与 k 的关系； D 项，先由 A、B 对称且与点 P 均在椭圆上，可得$k_{PA}\cdot k_{PB}=-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{1}{2}$，又由 C 项可知

$k_{PB}=k_{BE}=\frac{1}{2}k$， 得 $k_{PA}\cdot k_{AB}=-1$，即 $\angle PAB=90^\circ$，排除 D 项.

【详解】对于 A，设椭圆 C 的右焦点为 F'，连接 AF'， BF'，

则四边形 $AF'BF$ 为平行四边形，

$\therefore |AF|+|BF|=|AF|+|AF'|=2a=4$，

$\therefore \frac{1}{|AF|}+\frac{4}{|BF|}=\frac{1}{4}(|AF|+|BF|)\left(\frac{1}{|AF|}+\frac{4}{|BF|}\right)=\frac{1}{4}\left(5+\frac{|BF|}{|AF|}+\frac{4|AF|}{|BF|}\right)\geq\frac{9}{4}$，

当且仅当 $|BF|=2|AF|$ 时等号成立，A 错误；

对于 B，由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\\ y=kx\end{cases}$ 得 $x=\frac{\pm 2}{\sqrt{1+2k^2}}$，

$\therefore |y_A-y_B|=\frac{4|k|}{\sqrt{1+2k^2}}$，

$\therefore \triangle ABE$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|x_A||y_A-y_B|=\frac{4|k|}{1+2k^2}=\frac{4}{\frac{1}{|k|}+2|k|}\leq\sqrt{2}$，

当且仅当 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立，B 正确；

对于 C，设 $A(x_0,y_0)$，则 $B(-x_0,-y_0)$， $E(x_0,0)$，

故直线 BE 的斜率 $k_{BE}=\frac{0+y_0}{x_0+x_0}=\frac{1}{2}\cdot\frac{y_0}{x_0}=\frac{1}{2}k$，C 正确；

对于 D，设 $P(m,n)$，直线 PA 的斜率额为 k_{PA}，直线 PB 的斜率为 k_{PB}，

则 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{n-y_0}{m-x_0}\cdot\frac{n+y_0}{m+x_0}=\frac{n^2-y_0^2}{m^2-x_0^2}$，

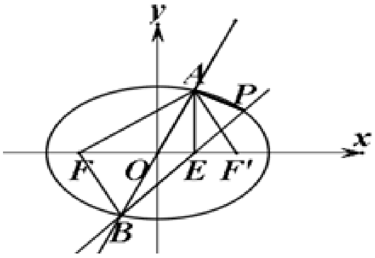
又点 P 和点 A 在椭圆 C 上，$\therefore \frac{m^2}{4}+\frac{n^2}{2}=1$①， $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{2}=1$②，

①－②得 $\frac{n^2-y_0^2}{m^2-x_0^2}=-\frac{1}{2}$，易知 $k_{PB}=k_{BE}=\frac{1}{2}k$，

则 $k_{PA}\cdot\frac{1}{2}k=-\frac{1}{2}$，得 $k_{PA}=-\frac{1}{k}$，

$\therefore k_{PA}\cdot k_{AB}=\left(-\frac{1}{k}\right)\cdot k=-1$，$\therefore \angle PAB=90^{\circ}$，D 错误.

故选：BC.



【点睛】椭圆常用结论：

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$AB$ 为椭圆经过原点的一条弦，P 是椭圆上异于 A、B 的任意一点，若

k_{PA},k_{PB} 都存在，则 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-\frac{b^2}{a^2}$.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 以点 $P(2,-3)$ 为圆心，并且与 y 轴相切的圆的方程是__________.

【答案】$\left(x-2\right)^2+\left(y+3\right)^2=4$

【解析】

【分析】根据圆与 y 轴相切，圆的半径等于点 P 到 y 轴的距离，求出半径 $r=2$，即可求出圆的标准方程.

【详解】设圆　方程为 $(x-2)^2+(y+3)^2=r^2$，

$\because$ 圆与 y 轴相切，$\therefore$ 半径 r 等于圆心 P 到 y 轴的距离，即 $r=2$，

因此，圆的方程为 $(x-2)^2+(y+3)^2=4$，

故答案为：$(x-2)^2+(y+3)^2=4$.

14. 在数列 $\left\{a_n\right\}$ 中，$a_{n+1}-a_n=3n-22$，$a_1=-2$，则 $a_{30}=$______.

【答案】665

【解析】

【分析】利用累加法求得 a_n，进而求得 a_{30}

【详解】依题意，$a_n=\left(a_n-a_{n-1}\right)+\left(a_{n-1}-a_{n-2}\right)+\cdots+\left(a_3-a_2\right)+\left(a_2-a_1\right)+a_1$

$=\left(3n-25\right)+\left(3n-28\right)+\cdots+\left(-16\right)+\left(-19\right)+\left(-2\right)$

$=\frac{3n-25+(-19)}{2}\times(n-1)-2=\frac{3n-44}{2}\times(n-1)-2$.

所以 $a_{30}=\frac{90-44}{2}\times 29-2=665$.

故答案为：665

15. 在抛物线 $y^2=4x$ 上任取一点 A (不为原点)，F 为抛物线的焦点，连接 AF 并延长交抛物线于另一点 B，过 A,B 分别作准线的垂线，垂足分别为 C,D. 记线段 CD 的中点为 T，则 $\triangle ATB$ 面积的最小值为______.

【答案】4

【解析】

【分析】取 AB 的中点为 M，连接 MT，$S_{\Delta ATB}=\frac{1}{2}|TM||y_A-y_B|=\frac{1}{4}|AB||y_A-y_B|$ 可变形为用 y_Ay_B 表示，设直线方程为 $x=my+1$，与抛物线方程联立，消元后应用韦达定理得 y_Ay_B,y_A+y_B，代入 $S_{\triangle ATB}$，再由基本不等式可得最小值.

【详解】焦点为 $F(1,0)$，设直线 AB 方程为 $x=my+1$，

由 $\begin{cases}y^2=4x\\x=my+1\end{cases}\Rightarrow y^2-4my-4=0\Rightarrow y_Ay_B=-4$,

取 AB 中点为 M，连接 MT，则 $|AC|=|AF|$，$|BD|=|BF|$，$|MT|=\frac{1}{2}(|AC|+|BD|)=\frac{1}{2}|AB|$，

$S_{\Delta ATB}=\frac{1}{2}|TM||y_A-y_B|=\frac{1}{4}|AB||y_A-y_B|$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{{y_A}^2}{4}+1+\frac{{y_B}^2}{4}+1\right)\sqrt{{y_A}^2+{y_B}^2-2y_Ay_B}$

$\geq\frac{1}{4}\left(\frac{|y_Ay_B|}{2}+2\right)\sqrt{2|y_Ay_B|-2y_Ay_B}=4$

故 $|y_A|=|y_B|=2$ 时面积最小为 4.

故答案为：4.

【点睛】关键点点睛：本题考查抛物线中与焦点弦有关的面积问题．解题关键是把抛物线的点到焦点的距离转化为到准线的距离，这样三角形的面积可以与焦点弦长联系，从而利用韦达定理求解.

16. 对于数列 $\{a_n\}$，定义 $A_n=a_1+2a_2+\cdots+2^{n-1}a_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的“加权和”，已知某数列 $\{a_n\}$ 的“加权和” $A_n=n\cdot 2^{n+1}$，记数列 $\{a_n+pn\}$ 的前 n 项和为 T_n，若 $T_n\leq T_5$ 对任意的 $n\in\mathrm{N}^*$ 恒成立，则实数 p 的取值范围为______.

【答案】$\left[-\frac{12}{5},-\frac{7}{3}\right]$

【解析】

【分析】根据数列新定义可得 $a_1+2a_2+\ldots+2^{n-2}a_{n-1}+2^{n-1}a_n=n\cdot 2^{n+1}$，从而 $n\geq 2$ 时，$a_1+2a_2+\cdots+2^{n-2}a_{n-1}=(n-1)\cdot 2^n$，相减求得 $a_n=2n+2$，进而求得 T_n 的表达式，利用 $T_n\leq T_5$ 对任意的 $n\in\mathrm{N}^*$ 恒成立，列出不等式组，即可求得答案.

【详解】由题意可得 $a_1+2a_2+\ldots+2^{n-2}a_{n-1}+2^{n-1}a_n=n\cdot 2^{n+1}$，

$\therefore n\geq 2$ 时，$a_1+2a_2+\cdots+2^{n-2}a_{n-1}=(n-1)\cdot 2^n$，

两式相减可得：$2^{n-1}a_n=n\cdot 2^{n+1}-(n-1)\cdot 2^n$，

化为 $a_n=2n+2$，

$n=1$ 时，$a_1=2^2=4$，满足上式，

故 $a_n=2n+2,n\in\mathrm{N}^*$

故 $T_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+p(1+2+\cdots+n)=\frac{n(4+2n+2)}{2}+p\cdot\frac{n(n+1)}{2}=n(n+3)+p\cdot\frac{n(n+1)}{2}$，

$\because T_n\leq T_5$ 对任意的 $n\in\mathrm{N}^*$ 恒成立，

$\therefore \begin{cases}T_4\leq T_5\\T_6\leq T_5\end{cases}$，即 $\begin{cases}28+10p\leq 40+15p\\54+21p\leq 40+15p\end{cases}$，

解得 $-\frac{12}{5}\leq p\leq -\frac{7}{3}$，即 $p\in\left[-\frac{12}{5},-\frac{7}{3}\right]$，

故答案为：$\left[-\frac{12}{5},-\frac{7}{3}\right]$

【点睛】关键点点睛：根据数列新定义可得 $a_1+2a_2+\ldots+2^{n-2}a_{n-1}+2^{n-1}a_n=n\cdot 2^{n+1}$，从而 $n\geq 2$ 时，$a_1+2a_2+\cdots+2^{n-2}a_{n-1}=(n-1)\cdot 2^n$，相减求得 a_n，从而可求得 T_n 的表达式，因此解答的关键就在于将 $T_n\leq T_5$ 对任意的 $n\in\mathrm{N}^*$ 恒成立转化为解 $\begin{cases}T_4\leq T_5\\T_6\leq T_5\end{cases}$ 的问题.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17. 已知双曲线 C 的焦点在 x 轴上，焦距为 4，且它的一条渐近线方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

（1）求 C 的标准方程；

（2）若直线 $l: y=\frac{1}{2}x-1$ 与双曲线 C 交于 A，B 两点，求 $|AB|$.

【答案】（1） $\frac{x^2}{3}-y^2=1$

（2） $10\sqrt{3}$

【解析】

【分析】（1）焦点在 x 轴上，设方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 根据题意求出 a,b 即可

（2）设点，联立方程组，消元得一元二次方程，由韦达定理，然后利用弦长公式计算即可

【小问 1 详解】

因为焦点在 x 轴上，设双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ ，

由题意得 $2c=4$，

所以 $c=2$，①

又双曲线 C 的一条渐近线为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ ，

所以 $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，②

又 $a^2+b^2=c^2$，③

联立上述式子解得 $a=\sqrt{3}$， $b=1$，

故所求方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$；

【小问 2 详解】

设 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$ ，

联立 $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x-1 \\ \frac{x^2}{3}-y^2=1 \end{cases}$ ，整理得 $\frac{1}{4}x^2+3x-6=0$ ，